

# TEMA 3: Control Estadístico de la Calidad

---

1. Introducción al control de la calidad.
2. Métodos de mejora de la calidad
3. Gráficos de control de Shewhart:
  - Gráficos  $c$
  - Gráficos  $np$
  - Gráficos  $\bar{X}$  y  $R$
4. Interpretación de los gráficos

# Control Estadístico de la Calidad

---

Definimos el “**Control Estadístico de la Calidad**” como la aplicación de diferentes técnicas estadísticas a procesos industriales, administrativos y/o servicios con objeto de comprobar si todas y cada una de las partes del proceso o servicio cumplen unas ciertas exigencias de calidad y ayudar a cumplirlas. Entendiendo por **calidad** de un producto o servicio como su adecuación para ser usado.

# Calidad

---

Podemos definir:

- **Calidad de diseño:** todos los productos y servicios pueden proporcionarse con diferentes niveles de calidad elegidos en la fase de diseño del producto o servicio.
- **Calidad de conformidad:** grado de adecuación a las especificaciones y tolerancias del diseño que se consigue en la fase de fabricación del producto. Depende del proceso de fabricación que se use, los sistemas de control de calidad, el grado de seguimiento de los programas de calidad, de la maquinaria usada, etc.

# Calidad

---

Al **mejorar** la **calidad**:

- Se reduce el número de unidades defectuosas que deben desecharse
- Se reduce el número de unidades defectuosas que deben reprocesarse
- Se eliminan tests e inspecciones
- Se producen menos retrasos
- Se aprovecha mejor el tiempo de máquinas y operarios
- Se utilizan mejor los materiales

Estos efectos contribuyen a **aumentar** la **productividad**.

## Ejemplo

Una fábrica produce diariamente 80 viguetas, de las cuales hay 60 conforme a las especificaciones, pero hay 20 defectuosas. El 45% de las viguetas defectuosas debe ser desechada y el 55% restante debe ser reparada. Supongamos que el coste de fabricación por unidad es de 150€ y el coste de reparación es 50€ por unidad. ¿Cuánto cuesta cada vigueta producida? ¿Cuántas viguetas se producen diariamente?

Se introduce un programa de calidad que reduce el número de viguetas defectuosas a 4 ¿cuál es el coste unitario ahora? ¿y el número medio de viguetas?

# Calidad

---

Al **mejorar** la **calidad**:

- Se reduce el número de unidades defectuosas que deben desecharse
- Se reduce el número de unidades defectuosas que deben reprocesarse
- Se eliminan tests e inspecciones
- Se producen menos retrasos
- Se aprovecha mejor el tiempo de máquinas y operarios
- Se utilizan mejor los materiales

Estos efectos contribuyen a **aumentar** la **productividad**.

## Ejemplo

$$60 + 0,55 \times 20 = 71 \text{ viguetas/día}$$

$$\frac{80 \times 150 + 20 \times 0,55 \times 50}{60 + 20 \times 0,55} = 171,76 \text{ euros}$$

$$76 + 0,55 \times 4 = 78,2 \text{ viguetas/día}$$

$$\frac{80 \times 150 + 4 \times 0,55 \times 50}{76 + 4 \times 0,55} = 154,86 \text{ euros}$$

# Variabilidad

---

La mayor dificultad para proporcionar productos o servicios de calidad perfecta es la **variabilidad** inherente a cualquier proceso de fabricación o de prestación de servicios.

Si la diferencia entre dos unidades es pequeña no tiene importancia, pero si es relativamente grande, alguna unidad puede ser inaceptable, o lo que es lo mismo defectuosa.

El estudio y evaluación de esa variabilidad es el objetivo de la aplicación de técnicas estadísticas al control de la calidad.

# Variabilidad

---

El principal objetivo del control de calidad será **reducir** sistemáticamente la **variabilidad** en productos y servicios. Para ello es necesario, primero identificar las causas que provocan variabilidad y posteriormente eliminarlas del proceso de fabricación.

Diremos que un proceso está **bajo control** o **en estado de control** cuando la característica de calidad observada en el proceso varía de forma estable alrededor de un valor medio fijo.

# Variabilidad

---

Las causas de variabilidad se pueden clasificar como:

- **Causas comunes:** (o aleatorias) afectan a todo el proceso de fabricación. Suelen ser muchas pero cada una de ellas tiene muy poca influencia en la variabilidad total. Se observan cuando el proceso está bajo control. Resultan de cambios inherentes al proceso, (ej. variaciones de  $T^a$  y humedad en el ambiente...)
- **Causas especiales** o **asignables:** hacen que el proceso abandone su estado de control. Suelen ser pocas, pero sus efectos son muy importantes. Aparecen esporádicamente afectando alguna fase concreta del proceso. El tratamiento adecuado, incluye su detección y eliminación del sistema. (ej. ajuste incorrecto de una máquina, errores humanos...).

El objetivo del **Control Estadístico de la Calidad** es detectar rápidamente la ocurrencia debida a causas asignables e investigar las causas que la han producido para eliminarlas.



# Métodos de mejora de la calidad

---

Las siete herramientas de Ishiwaka\*, son un conjunto de técnicas de control estadístico utilizadas durante el proceso de fabricación del producto o de prestación del servicio para mejorar la calidad y la productividad:

- Plantillas para recogida de datos (plantillas que recogen datos de una característica de calidad)
- Histogramas (representación gráfica de las variables)
- Diagramas causa-efecto (busca el factor principal de los problemas)
- Diagramas de Pareto (representación gráfica de variables cualitativas)
- Diagramas de dispersión (estudia la relación entre 2 variables)
- Gráficos de flujo (esquema que describe el proceso en sus múltiples partes con el fin de identificar el problema)
- **Gráficos de control** (representación de una característica de la calidad con límites de control)

\* Ingeniero japonés experto en el control de la calidad.

# Métodos de mejora de la calidad

- Plantillas para recogida de datos (plantillas que recogen datos de una característica de calidad)

PLANTILLA DE INSPECCIÓN

Nº:

Producto:  
Uso:  
Especificación:  
Nº Lote:

Sección:  
Fecha:  
Inspector:

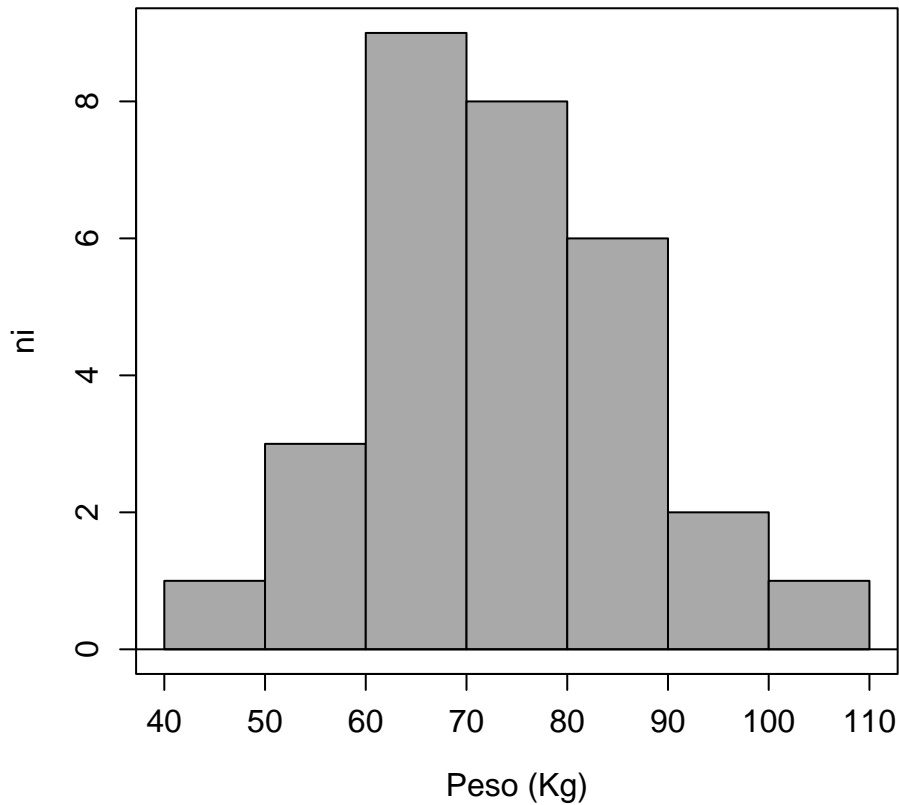
	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3	3.1	3.2	3.3
30											
25				*							
20				*	*						
15			*	*	*	*	*				
10			*	*	*	*	*	*			
5		*	*	*	*	*	*	*	*	*	
Frec.	1	3	13	22	20	12	13	10	5	3	0

A medida que se van registrando las mediciones nos va mostrando como se reparten.

# Métodos de mejora de la calidad

---

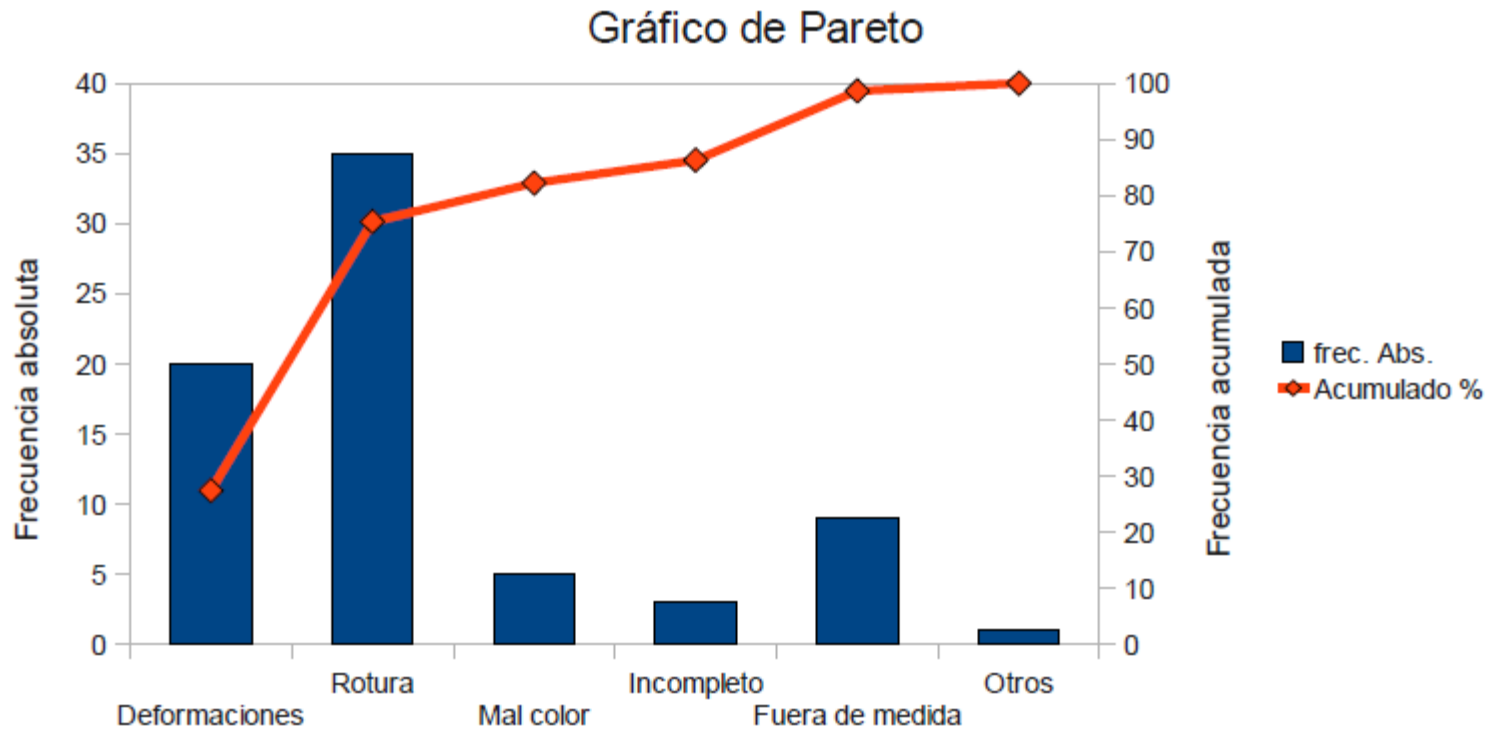
- Histogramas (representación gráfica de las variables)



Nos permite ver rápidamente como se distribuyen las mediciones contenidas en una tabla.

# Métodos de mejora de la calidad

- Diagramas de Pareto (representación gráfica de variables cualitativas)

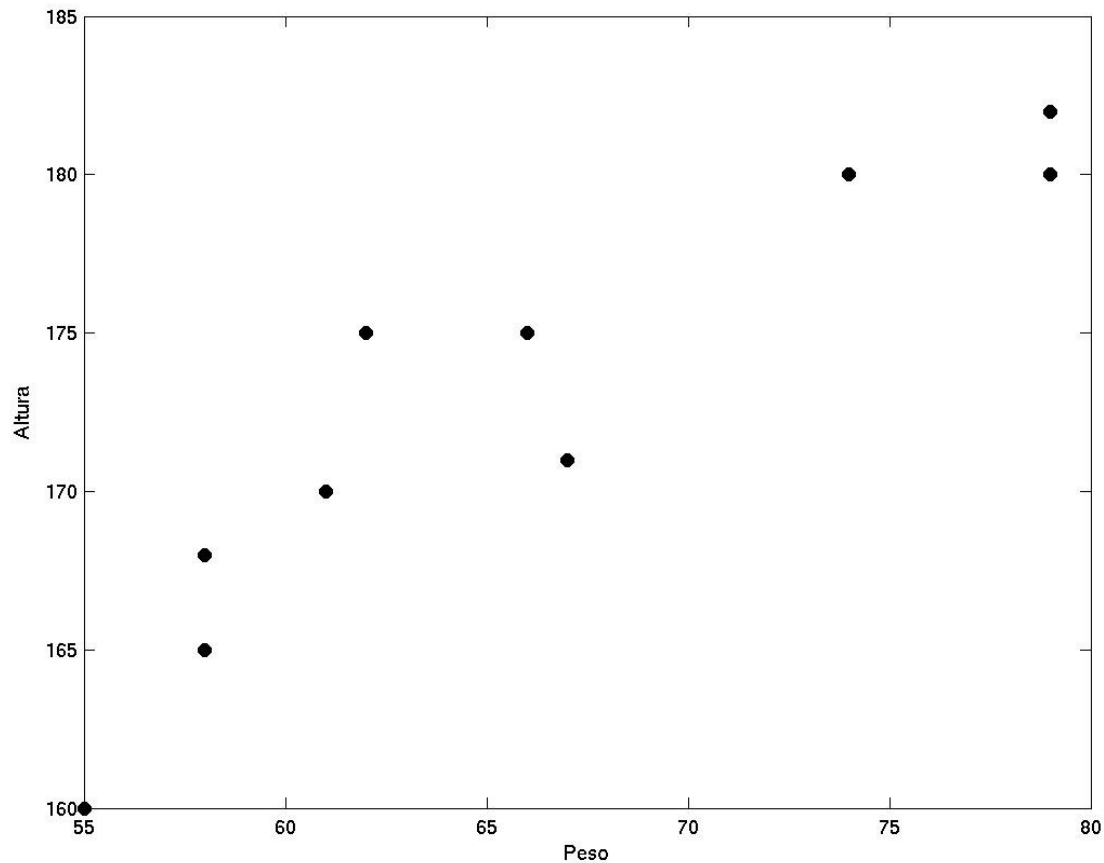


Eliminando del proceso las causas que provocan los dos primeros tipos de defectos desaparecerían la mayoría de los defectos.

# Métodos de mejora de la calidad

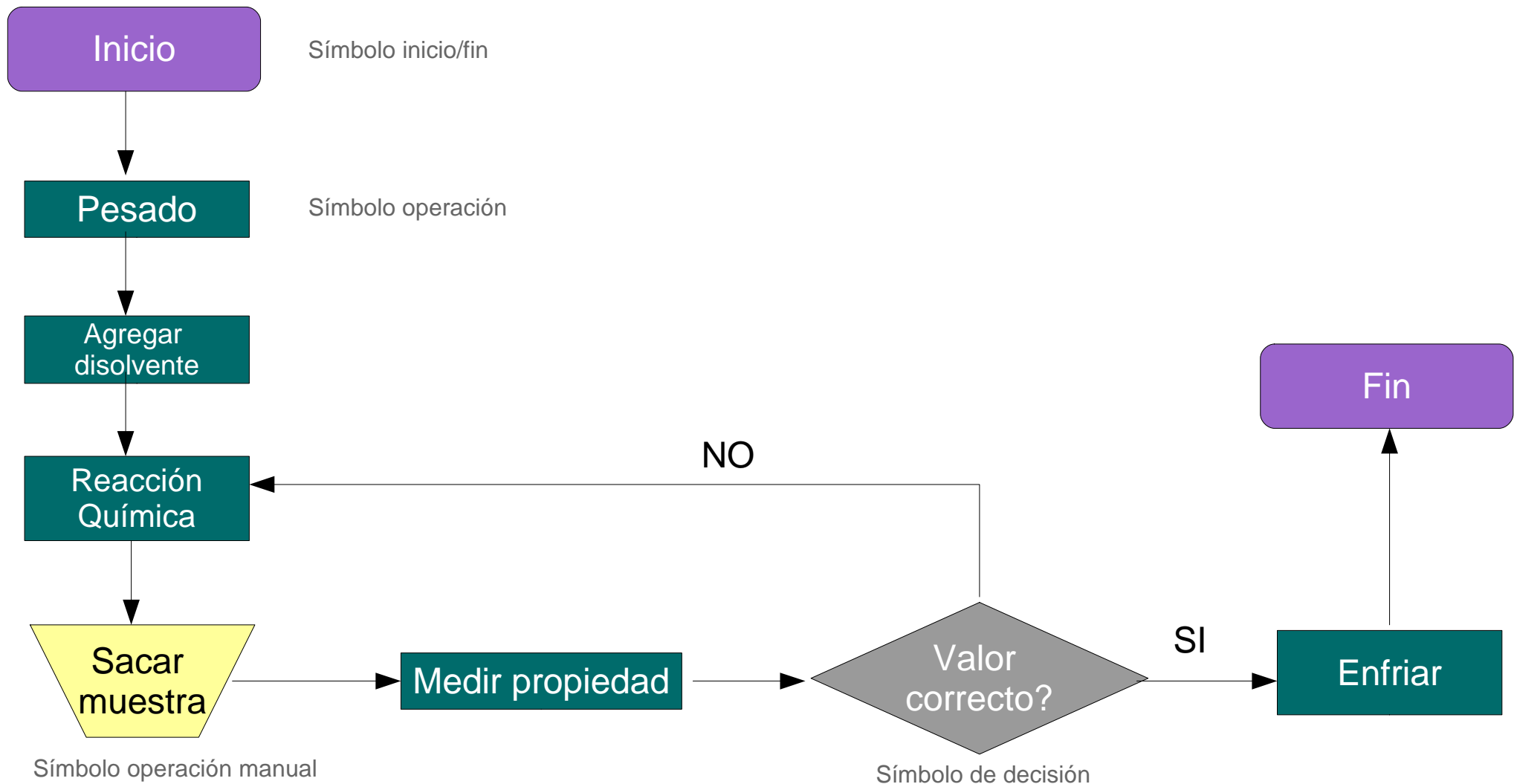
---

- Diagramas de dispersión (estudia la relación entre 2 variables)



# Métodos de mejora de la calidad

- Gráficos de flujo (esquema que describe el proceso en sus múltiples partes con el fin de identificar el problema)



# Gráficos de Control

---

Los **gráficos de control** son una herramienta de control estadístico que se utiliza para monitorizar las causas comunes de variabilidad y detectar la ocurrencia de causas especiales a lo largo del tiempo.

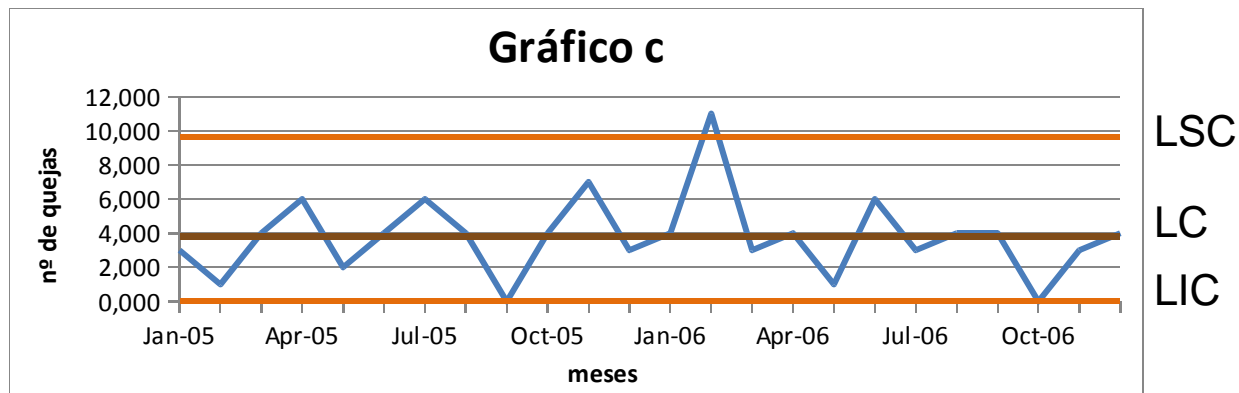
Nos indica si el proceso está o no en “**Estado de control**”.

Los más conocidos son los Gráficos de Control de Shewart\*.

\* Ingeniero americano de la Bell Telephone Laboratories, experto en el control de la calidad.

# Gráficos de Control de Shewart

Los gráficos de control de Shewart representan en el eje de abcisas el tiempo o una variable relacionada con el tiempo y en el eje de ordenadas una característica de la calidad.



Además muestra una línea central (**LC**), que debe coincidir con el valor medio de la característica de calidad estudiada, y dos líneas que representan el límite superior de control (**LSC**) y el límite inferior de control (**LIC**), que generalmente se sitúan a  $\pm 3$  desviaciones estandar de la línea central.

Todo valor que esté fuera del intervalo de los límites de control se dice que está **fuera de control**.



# Gráficos de Control de Shewart

---

Los Gráficos de Control de Shewart varían según el tipo de dato que representan:

- **Gráfico c**: número total de defectos durante sucesivos intervalos de tiempo o espacio de longitud fija.
- Gráfico u: número de defectos por unidad de medida
- **Gráfico np**: cantidad de unidades defectuosas en la muestra
- Gráfico p: proporción de unidades defectuosas en la muestra
- **Gráficos X, R** y S: características de calidad de tipo continuo, media y variabilidad (rango y desviación típica) del proceso.

# Gráficos de Control de Shewart

---

Para la construcción de los gráficos de control debemos suponer que la variable objeto de la calidad sigue una ley normal con parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ . Para contrastar la hipótesis de que el valor medio de la característica de calidad es  $\mu$ , se construye la región de aceptación  $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$  tomando como nivel de significación 0,003.

A  $\mu-3\sigma$  se le llama límite inferior de control y a  $\mu+3\sigma$  se le llama límite superior de control. En los casos en los que  $\mu-3\sigma$  sea negativo y este no tenga sentido, se tomará el límite inferior como 0.

# Gráficos de Control de Shewart

---

Al monitorizar un proceso con un gráfico de control puede ocurrir:

- Alarma verdadera: ocurre una causa especial y se detecta.
- Ocurre una causa especial pero no se detecta.
- Falsa alarma: no ocurre ninguna causa especial pero el gráfico de control produce una alarma.
- No ocurre ninguna causa especial y el gráfico de control no produce ninguna alarma

La determinación de LIC y LSC debe hacerse de forma que se detecte la presencia de causas especiales con la mayor probabilidad posible y lo más rápidamente posible, minimizando al mismo tiempo la tasa de falsas alarmas.

# Gráfico c

---

Estamos interesados en el número total de defectos durante sucesivos intervalos de tiempo o espacio de longitud fija. Sabemos que el número  $X$  de estos debe pertenecer a la familia de Poisson, cuya función de probabilidad será:

$$p_X(x) = e^{-c} \frac{c^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

donde la media y la varianza de  $X$  serán iguales a  $c$ .

Cuando la media  $c$  de  $X$  es suficientemente grande como para que la distribución de Poisson pueda aproximarse por la distribución normal, los límites de control quedarán definidos como:

$$LIC = c - 3\sqrt{c}$$

$$LSC = c + 3\sqrt{c}$$

LC se corresponde con el valor de  $c$

# Ejercicio

Una compañía que fabrica teclados realiza diariamente análisis de calidad a 25 teclados con el fin de determinar el número total de teclas defectuosas. La producción será satisfactoria si el número de teclas defectuosas no varía de 4. En la siguiente tabla se muestran el número de teclas defectuosas en 30 jornadas:

3	8	2	2	3	4	4	9	7	0
2	5	5	8	5	6	7	4	4	2
3	3	5	6	3	5	3	5	0	4

Obtener el gráfico de control del proceso y determinar si el proceso está bajo control.

# Ejercicio

Un pequeño restaurante de carretera ha recogido todos los meses durante dos años el número de quejas que ha recibido en relación a los servicios que presta:

2009	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
quejas	3	1	4	6	2	4	6	4	0	4	7	3
2010	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
quejas	4	11	3	4	1	6	3	4	4	0	3	4

Realiza un gráfico de control e indica si el proceso se encuentra bajo control o no.

# Gráfico np

---

Estamos interesados en el número  $X$  de unidades defectuosas en una muestra de tamaño  $n$ . En este caso,  $X$  debe ser una distribución binomial y su función de probabilidad será:

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}. \quad x = 0, 1, \dots, n$$

La media de  $X$  es  $np$  y la varianza  $np(1-p)$ .

Si el valor de  $n$  es suficientemente grande como para que la distribución binomial pueda aproximarse por la distribución normal, los límites de control se definirían como:

$$LIC = np - 3\sqrt{np(1-p)}$$

$$LSC = np + 3\sqrt{np(1-p)}$$

LC sería  $np$ .

$p$  podría ser el histórico si se dispone de él o el estimado a partir de la muestra.

# Ejercicio

Una empresa fabrica pequeñas piezas de PVC mediante un proceso mecanizado. Al analizar las piezas se puede determinar si estas tienen las dimensiones adecuadas o no, en cuyo caso se considera defectuosa. La empresa quiere elaborar un gráfico de control para controlar el número de piezas defectuosas producidas por la máquina. Para ello se seleccionaron 30 muestras de tamaño 50, obteniéndose los siguientes datos:

muestra	Nº defectuosas	muestra	Nº defectuosas	muestra	Nº defectuosas
1	12	11	5	21	20
2	15	12	6	22	18
3	8	13	17	23	24
4	10	14	12	24	15
5	4	15	22	25	9
6	7	16	8	26	12
7	16	17	10	27	7
8	9	18	5	28	13
9	14	19	13	29	9
10	10	20	11	30	6

Construya el gráfico de control para la empresa y analice la información obtenida.



# Gráficos de tipo continuo

---

Los gráficos para características de tipo continuo presentan una diferencia importante con respecto a los gráficos  $c$  y  $np$  vistos. En los casos vistos, al conocer la media de un proceso queda completamente determinada la varianza (distribución binomial y Poisson), por lo que sólo es necesario monitorizar la media (la variabilidad queda monitorizada).

Al trabajar con medidas continuas, en las que se suele usar la distribución de probabilidad normal, en esta la media y la varianza no están relacionadas, por lo que habrá que monitorizar por un lado la media del proceso, gráfico  $\bar{X}$  y por otro la variabilidad, gráfico  $R$  (para el rango) o gráfico  $S$  (para la desviación típica).

# Gráfico X

Es una representación de las medias observadas para la característica de calidad medida en sucesivos intervalos de muestreo  $t = 1, 2, \dots$

$$\bar{x}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ti}$$

n: número de observaciones en cada intervalo de muestreo t

Los límites de control se suelen calcular a partir del rango medio de los datos observados en cada intervalo t,

$$R_t = \max(x_{t1}, \dots, x_{tn}) - \min(x_{t1}, \dots, x_{tn}) \Rightarrow \bar{R} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t R_i$$

A partir de este rango medio es posible obtener un estimador de la desviación típica de las observaciones individuales  $x_{ti}$  y así un estimador de la desviación típica de las medias  $\bar{x}_t$  obtenidas en cada intervalo de muestreo t:

$$\hat{\sigma}_x = \frac{\bar{R}}{d_2} \Rightarrow \hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}} = \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}$$

donde  $d_2$  es una constante en función de n

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_2$	1.128	1.693	2.059	2.326	2.534	2.704	2.847	2.970	3.078

# Gráfico X

---

LC puede ser igual a la media  $\mu$  histórica de la característica medida en caso de ser conocida, o a la media de las medias observadas:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \bar{x}_i$$

Los límites de control quedan definidos como:

$$\text{LIC} = \bar{\bar{x}} - 3\hat{\sigma}_{\bar{x}}$$

$$\text{LSC} = \bar{\bar{x}} + 3\hat{\sigma}_{\bar{x}}$$

# Ejercicio

En una fábrica que produce tuberías se han medido los diámetros (en mm) de 16 tuberías. En la siguiente tabla se muestran los datos obtenidos a lo largo de 8 intervalos de muestreo sucesivos, en cada uno de los cuales se han seleccionado al azar 2 tuberías para medir sus diámetros  $x_{t1}$  y  $x_{t2}$ . Dibujar el gráfico  $\bar{X}$ , ¿puede decirse que la media del proceso está bajo control?

Intervalo de muestreo (t)	$x_{t1}$	$x_{t2}$
1	80	82
2	83	81
3	81	80
4	79	80
5	81	79
6	80	80
7	81	81
8	79	81

# Gráfico R

---

Es una representación de los rangos  $R_t$ , calculados para el gráfico X. En este la desviación típica de los rangos  $R_t$  obtenidos en cada intervalo de muestreo  $t$  puede calcularse como:

$$\hat{\sigma}_R = \frac{\bar{R}}{d_R}$$

donde  $d_R$  es una constante en función de  $n$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_R$	1.323	1.906	2.340	2.691	2.988	3.247	3.472	3.676	3.861

Por tanto, los límites de control del gráfico R se calculan:

$$LIC = \bar{R} - 3\hat{\sigma}_R$$

$$LSC = \bar{R} + 3\hat{\sigma}_R$$

LC será igual al rango medio.

# Ejercicio

En una fábrica que produce tuberías se han medido los diámetros (en mm) de 16 tuberías. En la siguiente tabla se muestran los datos obtenidos a lo largo de 8 intervalos de muestreo sucesivos, en cada uno de los cuales se han seleccionado al azar 2 tuberías para medir sus diámetros  $x_{t1}$  y  $x_{t2}$ . Dibujar el gráfico R, ¿puede decirse que la variabilidad del proceso está bajo control?

Intervalo de muestreo (t)	$x_{t1}$	$x_{t2}$
1	80	82
2	83	81
3	81	80
4	79	80
5	81	79
6	80	80
7	81	81
8	79	81

# Interpretación de los gráficos

---

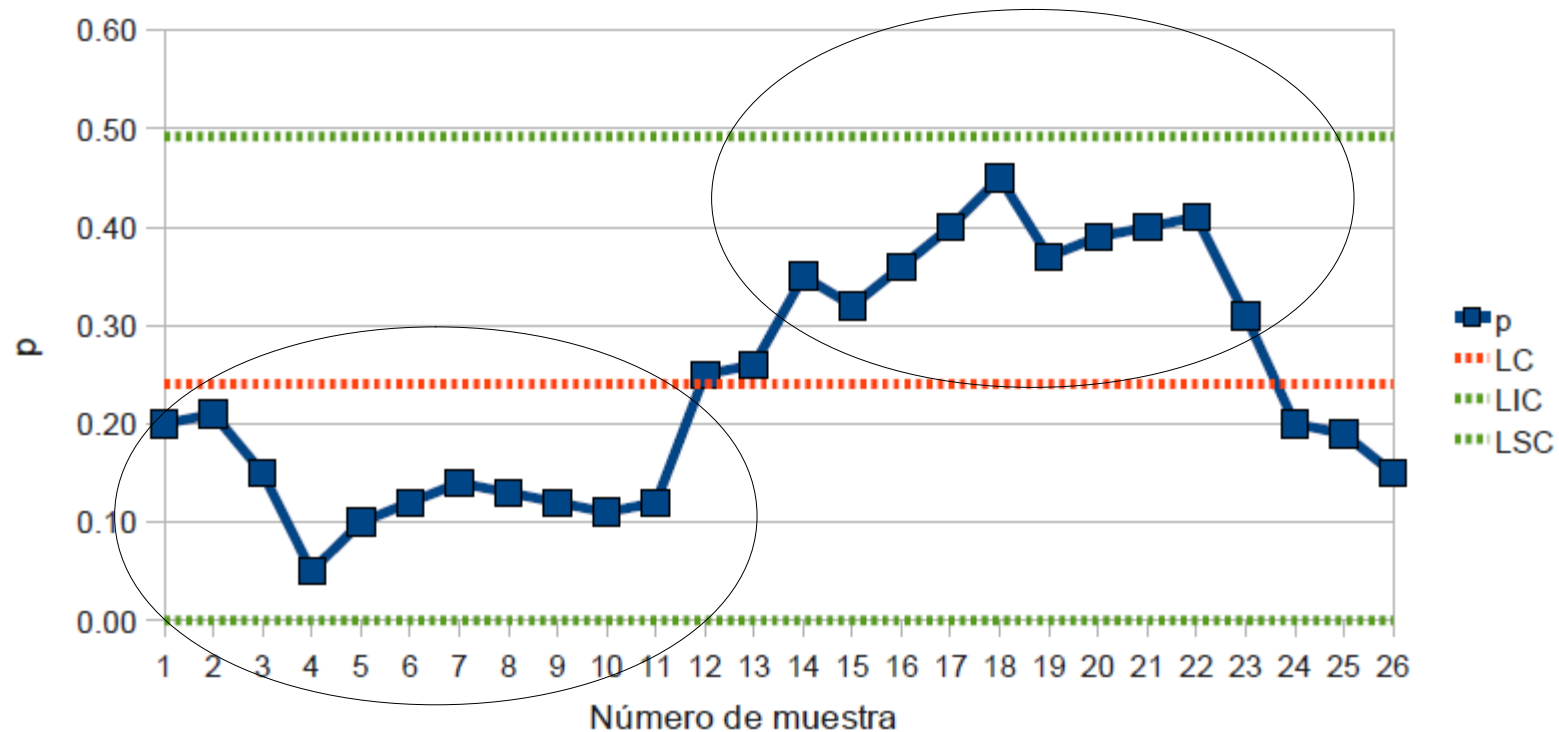
Cada vez que aparece un punto fuera de los límites de control se declara la ocurrencia una alarma, cuyo origen hay que investigar para eliminar el problema del proceso. Mientras todos los puntos se encuentren entre LIC y LSC la monitorización continúa.

Puede ocurrir que todos los puntos estén entre LIC y LSC pero el proceso no esté bajo control y pueda declararse una alarma:

- **Racha:** 8 puntos o más consecutivos a un mismo lado de la línea central
- **Tendencia:** 8 puntos o más en orden creciente o decreciente
- **Periodicidad:** se repite el mismo patrón de puntos en periodos de longitud fija (aparecen ciclos).
- **Inestabilidad:** fluctuaciones cerca de LIC y LSC
- **Superestabilidad:** 16 puntos o más entre  $-\sigma$  y  $+\sigma$

# Interpretación de los gráficos

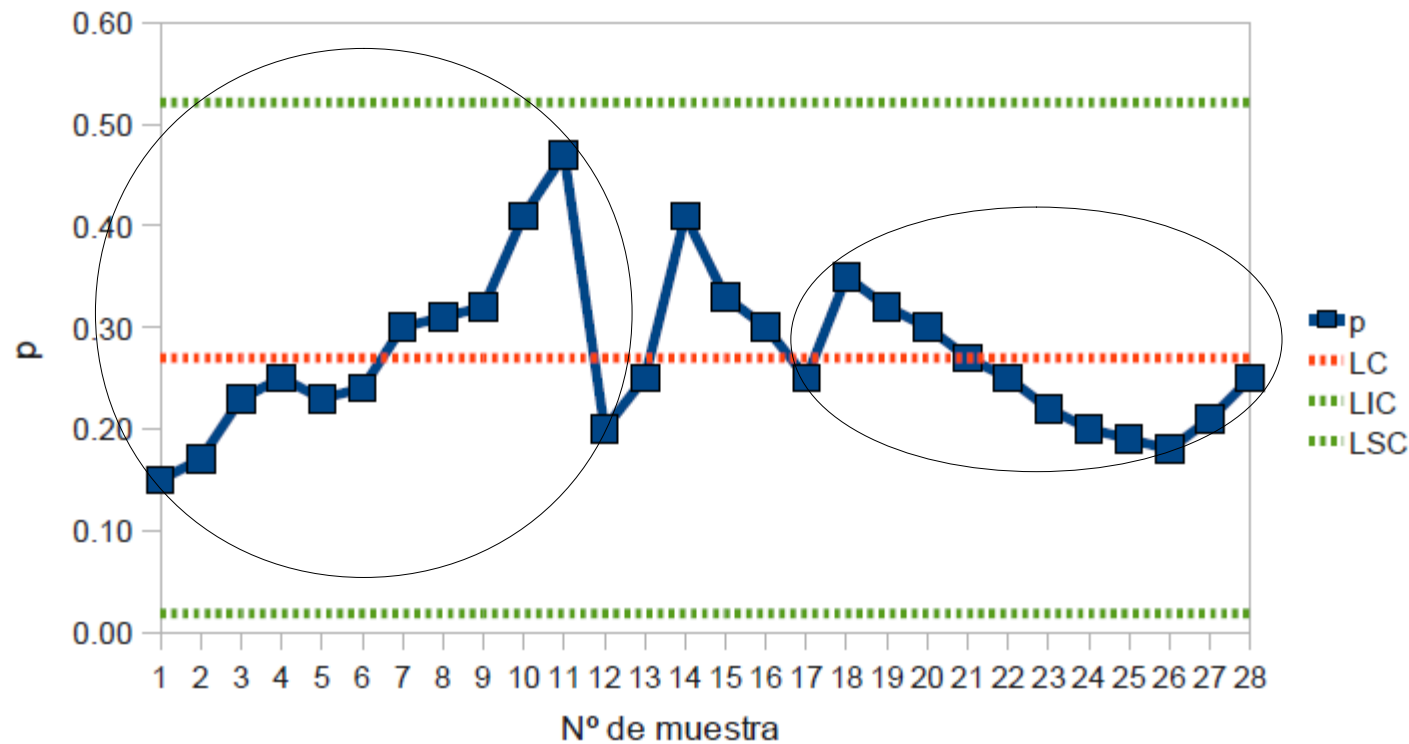
- **Racha:** 8 puntos o más consecutivos a un mismo lado de la línea central





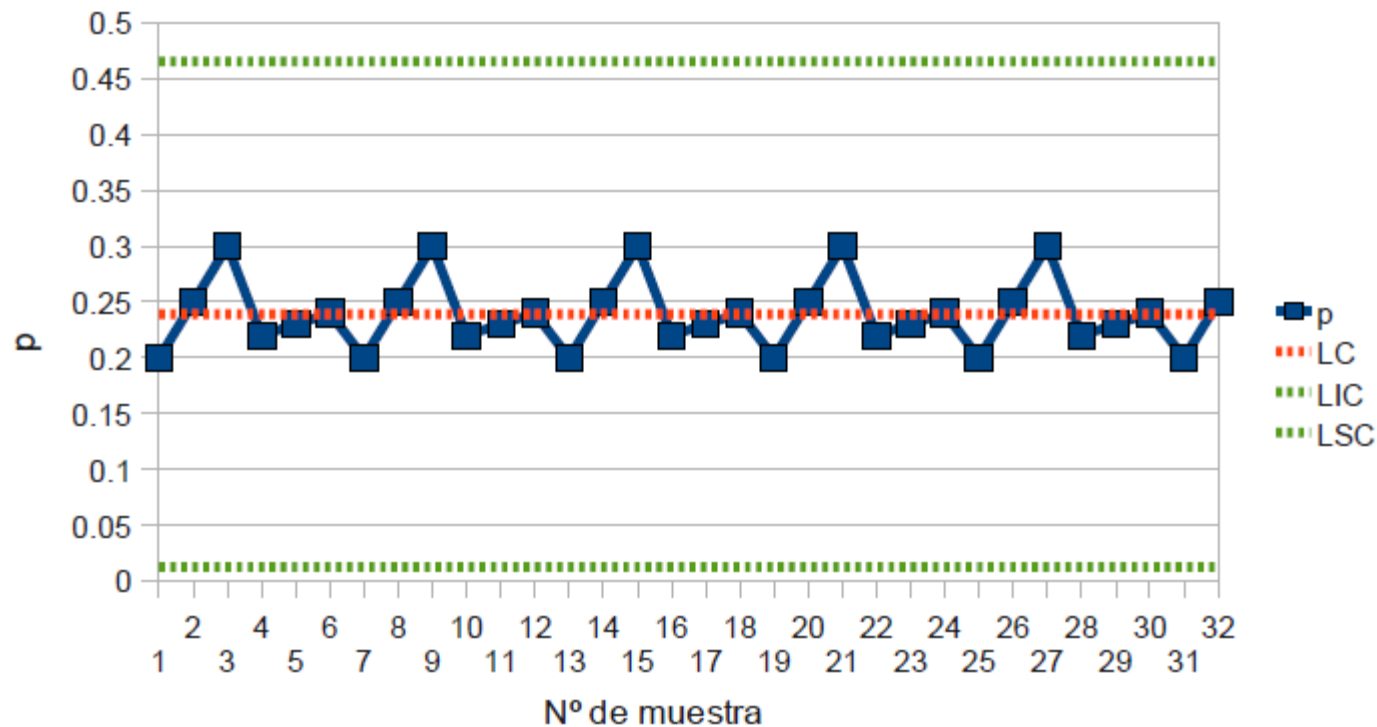
# Interpretación de los gráficos

- **Tendencia:** 8 puntos o más en orden creciente o decreciente



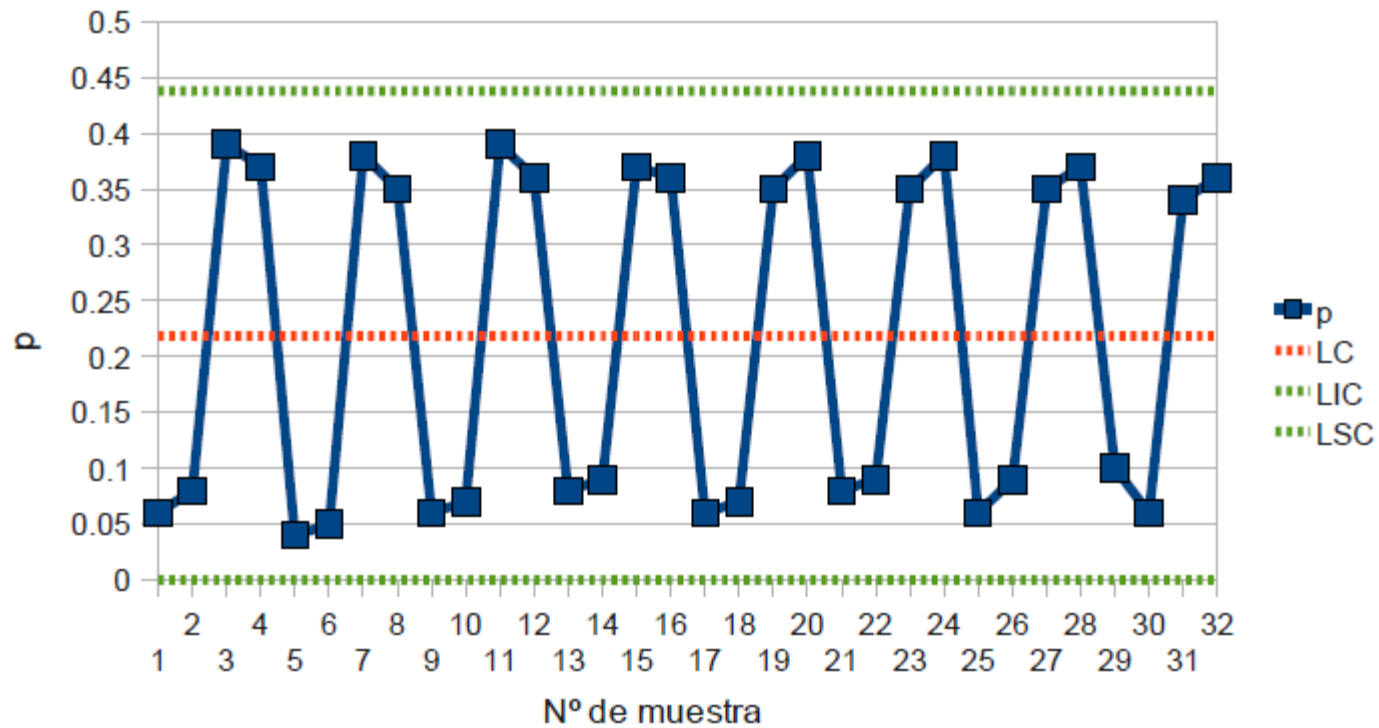
# Interpretación de los gráficos

- **Periodicidad:** se repite el mismo patrón de puntos en periodos de longitud fija (aparecen ciclos).



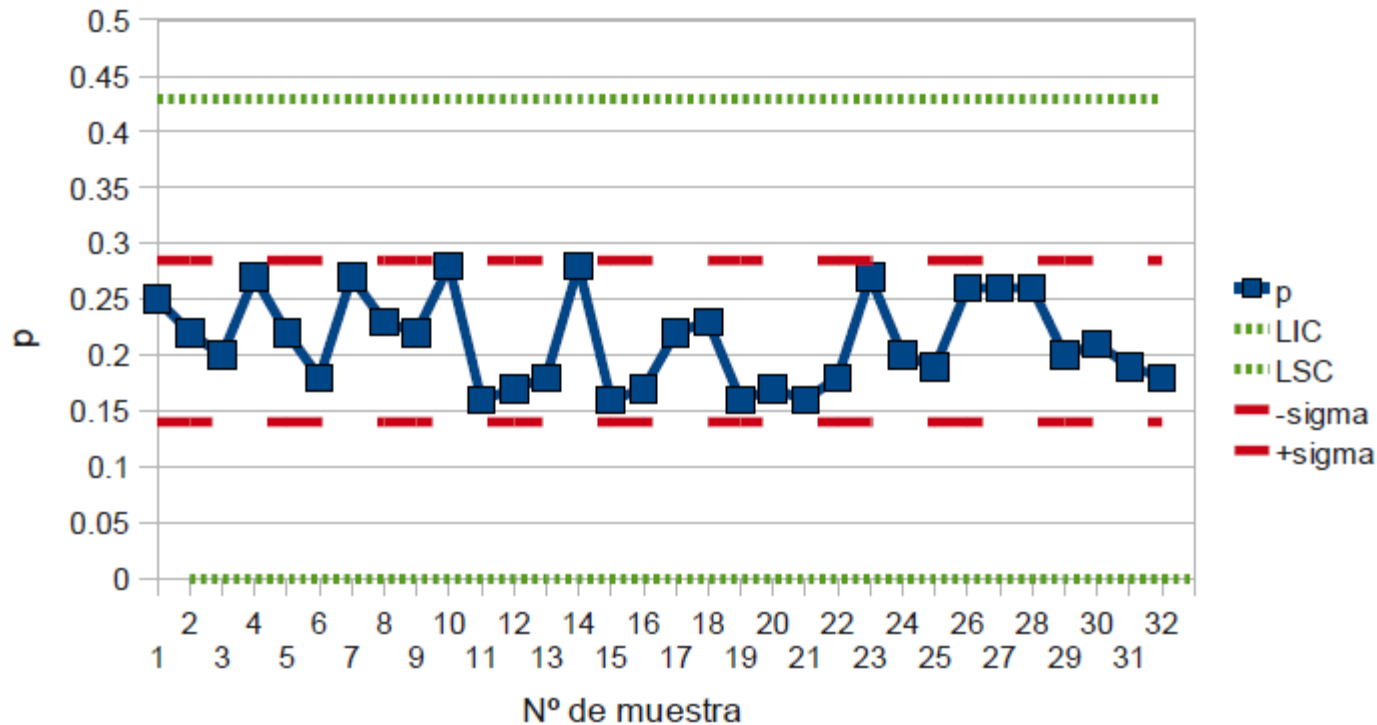
# Interpretación de los gráficos

- **Inestabilidad:** fluctuaciones cerca de LIC y LSC



# Interpretación de los gráficos

- **Superestabilidad:** 16 puntos o más entre  $-\sigma$  y  $+\sigma$



# Interpretación de los gráficos

---

Si adoptamos como protocolo que cada vez que ocurre una de esas situaciones se declara una alarma:

- Aumentará la sensibilidad del proceso de monitorización: mayor probabilidad/rapidez para detectar alarmas.
- Aumentará el número medio de falsas alarmas: usamos varios criterios para detectar alarmas cada uno con su tasa de falsas alarmas.

El primer caso es beneficioso pero el segundo es perjudicial.

Debe adoptarse una solución de compromiso que permita **optimizar** la **detección** de **alarmas verdaderas**, **minimizando** la tasa de **falsas alarmas**.