

1. Mosaicos aperiódicos

Un *mosaico* de $\mathbb{R}^2$ es una descomposición en subconjuntos llamados *teselas*, obtenidos por traslación (o mediante un grupo de movimientos rígidos que contega a las traslaciones) a partir de un conjunto de teselas modelo o *prototeselas*.

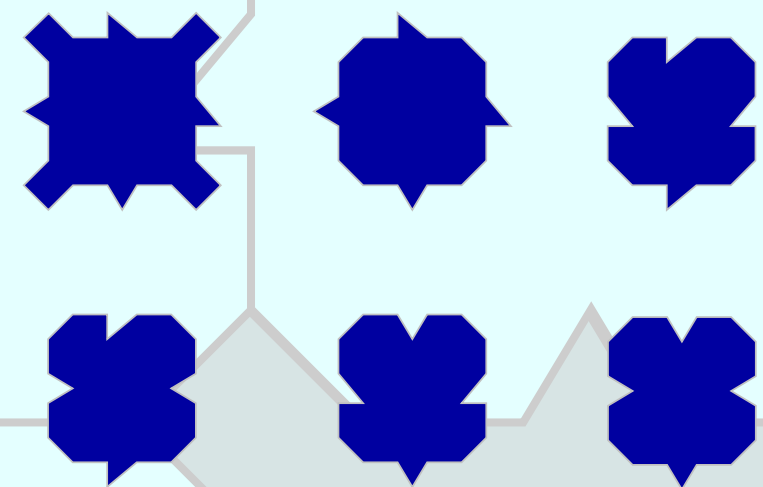
Los mosaicos que no son conservados por ninguna traslación se llaman *aperiódicos*. El interés por ellos nace en los años 60 de los trabajos de H. Wang sobre las máquinas de Turing. Wang había conjeturado la no existencia de prototeselas aperiódicas, i.e. que teselan el plano sólo de forma aperiódica. Sin embargo, en 1966, su alumno R. Berger construyó un contraejemplo con 20.426. R. M. Robinson y R. Ammann redujeron este número a 6 de forma indepiente. En 1977, R. Penrose dió un ejemplo con dos: la flecha y la cometa.

En 1982, el descubrimiento de los *sólido casi cristalinos* hizo retomar el interés por los mosaicos aperiódicos, pues éstos proporcionan modelos para sus patrones de difracción.

Nuestro propósito es mostrar que:

- el *espacio de los mosaicos de Robinson* se puede dotar de una topología natural que lo cubierte en un espacio foliado,
- la dinámica medible del único minimal está representada por una *máquina de sumar binaria*.

El propio Robinson muestra en [6] como codificar sus mosaicos mediante enteros 2-ádicos, aunque no explicita la dinámica.



Las 6 prototeselas de Robinson.

2. Espacio foliado de Gromov-Hausdorff

Sea $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ el conjunto de todos los mosaicos $\mathcal{T}$ obtenidos a partir del mismo conjunto finito de prototeselas $\mathcal{P}$. Se define la *topología de Gromov-Hausdorff* haciendo que dos mosaicos sean próximos si coinciden en una gran bola centrada en el origen, salvo pequeñas traslaciones. De manera explícita, una base de entornos de $\mathcal{T}$ viene dada por:

$$U_{\varepsilon, \varepsilon'}^R = \{\mathcal{T}' / \exists v, v' \in \mathbb{R}^2 : \|v\| < \varepsilon, \|v'\| < \varepsilon', R(\mathcal{T} + v, \mathcal{T}' + v') > R\}$$

donde

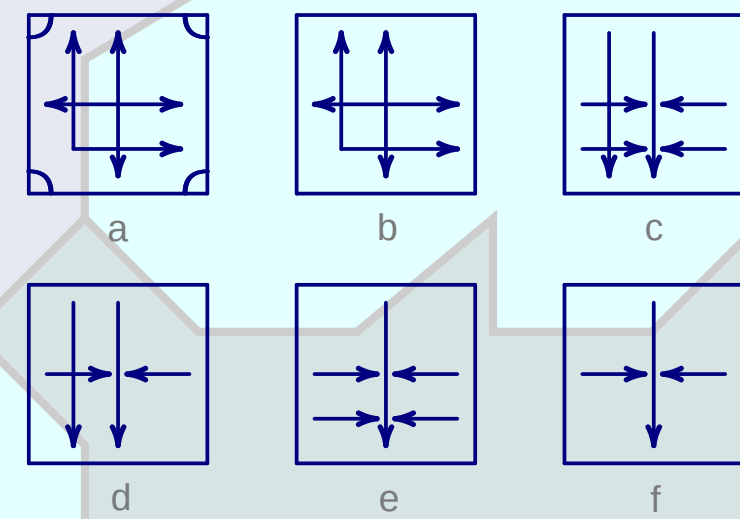
$$R(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = \sup\{R > 0 : B_{\mathcal{T}}(0, R) = B_{\mathcal{T}'}(0, R)\}.$$

Esta topología convierte a $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ en un espacio foliado compacto. Las hojas de la foliación son las órbitas de la acción natural de $\mathbb{R}^2$. Los conjuntos minimales están caracterizados por la siguiente *condición de repetición uniforme*: $\forall r > 0 \exists R = R(r) > 0$ tal que cualquier motivo de diámetro $< r$ posee una copia por traslación dentro de cualquier bola de radio R .

3. Mosaicos de Robinson

Un *mosaico de Robinson* se obtiene a partir de las 6 prototeselas aperiódicas descubiertas por Robinson en 1971 (véase [6]). Las dos primeras se denominan *cruces*, respectivamente *con cuernos* y *sin cuernos*. Las restantes, con muescas, se llaman *brazos*.

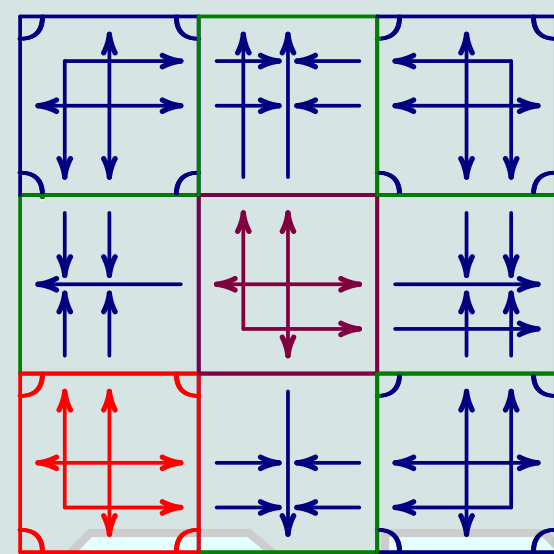
Hay otra representación más cómoda por cuadrados decorados (véanse [5] y [6]):



La dirección de las dobles flechas permite distinguir distintos tipos de cruces. Conviene aclarar que las teselas de los mosaicos de Robinson pueden obtenerse a partir de las 6 prototeselas por traslación, pero también mediante giros de 90, 180 y 270 grados o por reflexión respecto del eje de ordenadas. Se trata realmente de 32 tipos de teselas por traslación.

Por otra parte, la mayoría de los mosaicos de Robinson satisfacen la condición de repetición uniforme, pues se construyen mediante un *proceso repetitivo*:

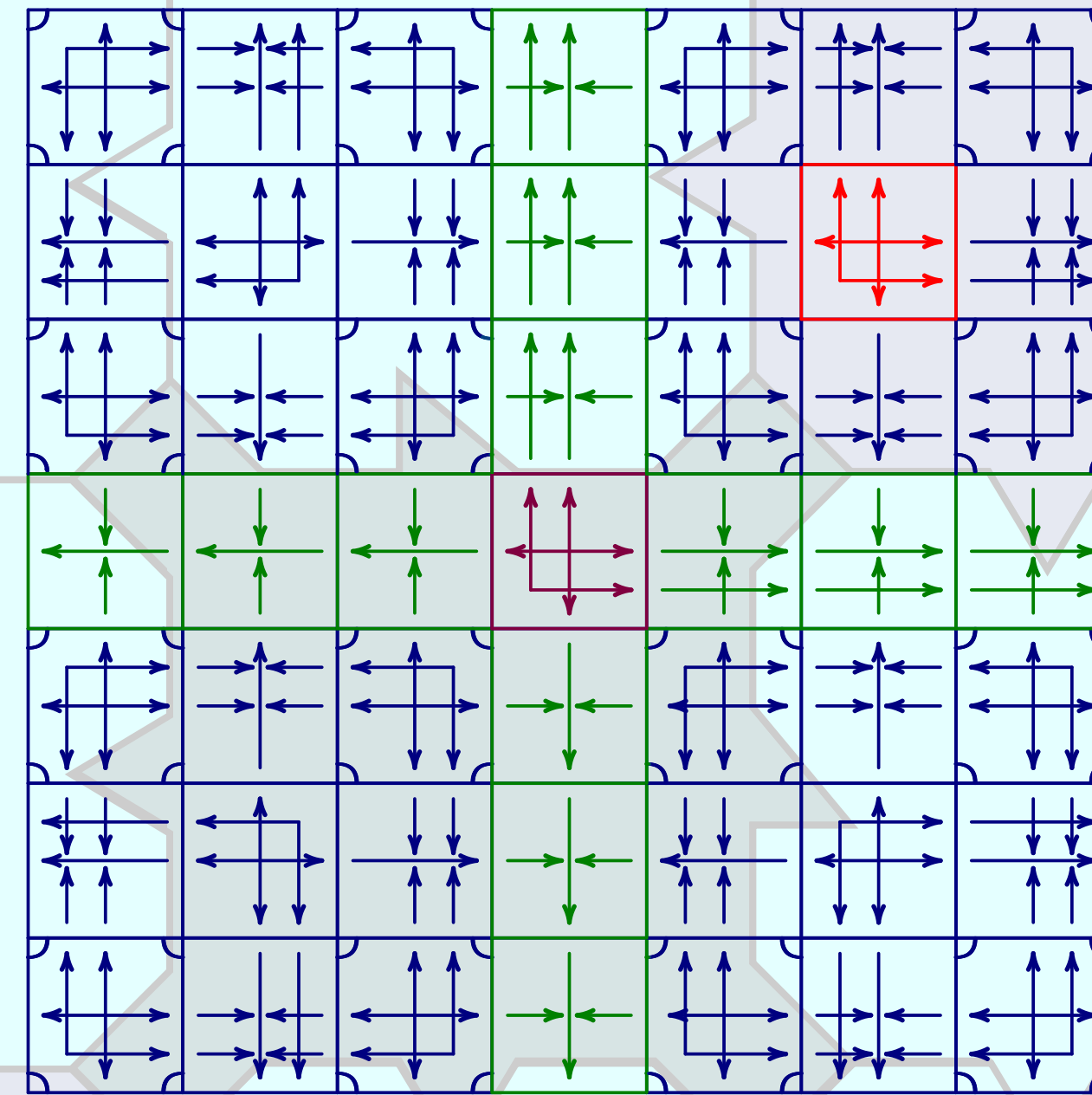
- Se parte de un cruce con cuernos, con una de las cuatro orientaciones posibles.
- Se replica (mediante giros de 90, 180 y 270 grados).
- Se añade un motivo formado por 5 teselas en forma de cruz. Para ello se elige la pieza central, un cruce sin cuernos, quedando determinadas las restantes.



Se obtiene así un bloque de 3×3 teselas. De igual manera, puede construirse un bloque de lado $(2^{n+1} - 1)$ a partir de un bloque de lado $(2^n - 1)$. La elección de los cruces centrales determina la región del plano que se tesela:

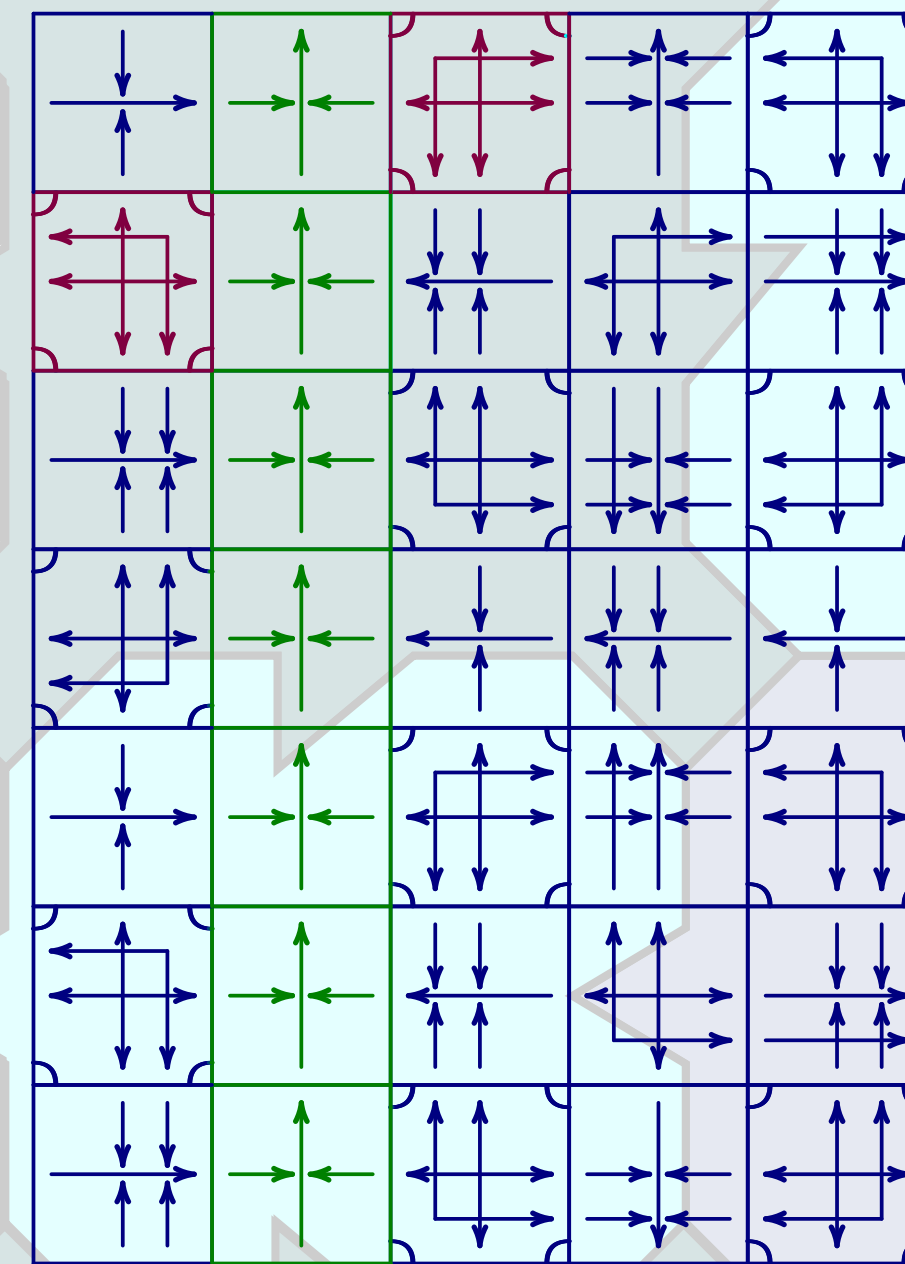
- un cuarto de plano
- un semiplano
- un plano completo.

Para teselar todo el plano, también podemos replicar un semiplano y después pegar el original y la réplica por filas o columnas infinitas de teselas de tipo (d) o (f). Igualmente, se puede replicar un cuarto de plano y pegar las réplicas mediante una cruz infinita determinada por la elección de su cruce central.



Mosaico de $\mathfrak{R}_4$.

Pero los pegados no tienen por qué ser simétricos, ya que podemos introducir “fallas” que suprimen el carácter repetitivo. Luego debemos distinguir el conjunto $\mathfrak{T}$ de todos los mosaicos de Robinson del subconjunto $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2 \cup \mathfrak{R}_4$ de los mosaicos repetitivos contruidos sin pegado, y por réplica y pegado simétrico de semiplanos o de cuartos de plano.

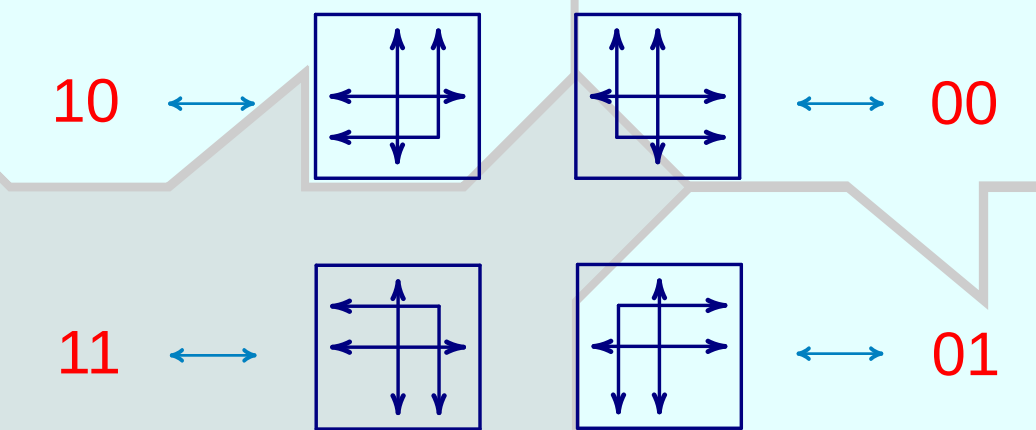


Mosaico de $\mathfrak{T} \setminus \mathfrak{R}$.

Teorema 1 ([4]) El espacio de los mosaicos de Robinson repetitivos $\mathfrak{R}$ es el único subconjunto minimal del espacio foliado $\mathfrak{T}$ de los mosaicos de Robinson.

4. Codificación

Identificando cada una de las cuatro orientaciones de un cruce sin cuernos con una pareja de elementos del conjunto $\{0, 1\}$, obtenemos una correspondencia entre $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ y $\mathfrak{R}$.



En principio, cada sucesión $\alpha = \{\alpha_n\} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ determina una sucesión de bloques. Si la unión de éstos cubre el plano, determina un mosaico de $\mathfrak{R}_1$. En otro caso, un semiplano o cuarto de plano, pero podemos recurrir a la réplica y pegado. Como sólo tenemos un número finito de posibilidades de pegado, es posible construir una aplicación boreliana e inyectiva

$$\Phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathfrak{R}.$$

Observemos que:

- Los mosaicos $\Phi(\alpha)$ y $\Phi(\beta)$ son trasladados uno de otro $\iff$ las sucesiones α y β son *cofinales*, i.e. existe $n \geq 0$ tal que $\alpha_m = \beta_m, \forall m \geq n$.
- Fijado un punto base en cada prototesela, la imagen de Φ está contenida en el conjunto Σ formado por los mosaicos del plano cuyo origen coincide con el punto base de algún cruce sin cuernos. Cualquier elemento de $\mathfrak{R}_1 \cap \Sigma$ posee un antecedente, pero no ocurre lo mismo con los elementos de $\mathfrak{R}_2 \cap \Sigma$ y $\mathfrak{R}_4 \cap \Sigma$.
- La aplicación Φ define una equivalencia orbital estable (en el sentido de [3]) entre la relación cofinal sobre el conjunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (dotado de la medida $\mu_2(C_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}) = \frac{1}{2^n}$) y la relación de equivalencia inducida por la acción de $\mathbb{R}^2$ sobre el conjunto $\mathfrak{R} \cap \Sigma$ (dotado de una medida invariante μ descrita en términos de tasa de aparición).

Se llama *máquina de sumar binaria* al sistema dinámico generado por la transformación $S : x \in \mathbb{Z}_2 \mapsto x + 1 \in \mathbb{Z}_2$ del anillo de los enteros 2-ádicos $\mathbb{Z}_2$, identificado con el conjunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Salvo en el caso de las sucesiones $000\dots$ y $111\dots$, las órbitas de este sistema dinámico coinciden con las clases de cofinalidad.

Teorema 2 ([4]) La dinámica transversa del espacio de los mosaicos de Robinson repetitivos $\mathfrak{R}$ está representada en sentido medible por una máquina de sumar binaria.

Bibliografía

- [1] F. Alcalde Cuesta, A. Lozano Rojo et M. Macho Stadler, Dynamique et géométrie non commutative de la lamination de Ghys-Kenyon. Preprint, 2006.
- [2] J. Bellissard, R. Benedetti and J.M. Gambaudo, Spaces of Tilings, Finite Telescopic Approximations and Gap-Labeling. Por aparecer en *Comm. Math. Phys.*
- [3] D. Gaboriau, Coût des relations d'équivalence et des groupes. *Invent. Math.* **139**, (2000), 41-98.
- [4] P. González Sequeiros, *A dinámica dos mosaicos de Robinson*. Tesiña de Licenciatura, Universidade de Santiago de Compostela, 2006.
- [5] B. Grünbaum and G. C. Shephard, *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman & Co., New York, 1987.
- [6] R. M. Robinson, Undecidability and Nonperiodicity of Tilings of the Plane. *Inventiones Math.*, **12** (1971), 177-209.