# Categoría de Lusternik-Schnirelmann fuerte propia

Pedro R. García Díaz (prgdiaz@ull.es)
*Departamento de Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna, Tenerife*

## Resumen

La categoría de Lusternik-Schnirelmann fuerte de un espacio $X$, $\mathrm{Cat}(X)$, fue definida originalmente por Ganea en [2] como el menor $n$ tal que existe un CW-complejo del mismo tipo de homotopía de $X$ que puede ser recubierto por $n+1$ subcomplejos contráctiles. Ganea probó además que $\mathrm{Cat}(X) \leq n$ si, y sólo si, existen sucesiones cofibradas $L_i \to X_i \to X_{i+1}$, $0 \leq i < n$ con $X_0 \simeq *$ y $X_n \simeq X$. Si se consideran suspensiones iteradas en esta caracterización, $L_i = \Sigma^i U_i$, aparece el invariante denominado longitud de cono, $\mathrm{Cl}(X)$, definido y estudiado en [3]. Un hecho sorprendente es que $\mathrm{Cat}(X) = \mathrm{Cl}(X)$, debido a Cornea [4].

La noción de categoría fuerte fue exitosamente generalizada al marco de la homotopía propia en [1]. Sin embargo, debido a que la categoría propia adolece de buenas propiedades axiomáticas, los resultados de Cornea no se pueden verificar directamente. En este trabajo analizamos estos resultados a través de la categoría de espacios exteriores [5, 6]. Fruto de este análisis, aparecerán nuevas propiedades para la categoría fuerte propia.

## Preliminares

La categoría de espacios y aplicaciones propias, **P**, es el ámbito comúnmente usado para el estudio de los espacios no compactos. Una aplicación continua se dice propia si preserva las antiimágenes de compactos. Consideraremos la categoría $\mathbf{P}^{\mathbb{R}_+}_w$ de pares $(X, \alpha)$ con $X$ Hausdorff, localmente compacto y $\sigma$-compacto, $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrowtail X$ una cofibración propia y morfismos aquellas aplicaciones propias que hacen conmutativos los correspondientes triángulos bajo $\mathbb{R}_+$. Un hecho destacable es que en esta categoría $(\mathbb{R}_+, id)$ es objeto inicial y final salvo homotopía.

La *categoría de Lusternik-Schnirelmann fuerte propia*, p-Cat$(-)$, es un invariante por homotopía propia. Viene caracterizada por:

$$\textit{p-Cat}(X) \leq n \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l}\textit{Existe } Y \in \mathbf{P}^{\mathbb{R}_+}_w,\ Y \simeq_p X, \textit{ tal que}\\ Y = \cup int(Y_i), \textit{ con } Y_i \textit{ cerrado e}\\ Y_i \simeq_p \mathbb{R}_+, 1 \leq i \leq n.\end{array}\right\} \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l}\textit{Existen cofibras homotópicas en } \mathbf{P}^{\mathbb{R}_+}_w,\\ A_i \to X_i \to X_{i+1},\ 1 \leq i \leq n-1\\ \textit{con } X_1 \simeq_p \mathbb{R}_+ \textit{ y } X_n \simeq_p X.\end{array}\right.$$

Un *espacio exterior* $(X, \mathcal{E} \subseteq \tau)$ es un espacio topológico $(X, \tau)$ junto con una familia no vacía de abiertos $\mathcal{E}$, denominada *externología* que es cerrada por intersecciones finitas y que cuando $E \subseteq U$, $E \in \mathcal{E}$, $U \in \tau$, entonces $U \in \mathcal{E}$. Una aplicación $f : (X, \mathcal{E} \subseteq \tau) \to (X', \mathcal{E}' \subseteq \tau')$ se dice que es *exterior* si es continua y $f^{-1}(E) \in \mathcal{E}$, para todo $E \in \mathcal{E}'$. Cabe destacar que la categoría de espacios y aplicaciones exteriores, que denotaremos por **E**, es completa y cocompleta [5].

Un ejemplo clave de externología para cualquier espacio topológico $X$ es la *externología cocompacta*, $\mathcal{E}_{cc}$, que está formada por la familia de los complementos de los compactos-cerrados de $X$. La asignación $X \mapsto X_{cc}$ define el embebimiento, $(-)_{cc} \colon \mathbf{P} \hookrightarrow \mathbf{E}$.

Nuestro marco de trabajo será la categoría $\mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}_0 \subseteq \mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}_w$ cuyos objetos son los espacios exteriores bien basados $(X, \alpha)$ para los que existe una aplicación exterior $r : X \to \mathbb{R}_+$, que es necesariamente única salvo homotopía exterior.

**Teorema.** *$\mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}_0$ es una J-categoría (en el sentido de Doeraene).*

## El punto de vista exterior

La existencia del embebimiento $(-)_{cc} \colon \mathbf{P}^{\mathbb{R}_+}_w \hookrightarrow \mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}_0$ permite enfocar algunos entes definidos en la categoría propia desde una perspectiva distinta. Por ejemplo, se pueden construir nuevos invariantes por homotopía propia que poseen buenas propiedades y que están estrechamente relacionados con otros invariantes propios ya existentes.

Dentro del ámbito exterior se pueden dar las nociones de *categoría de Lusternik-Schnirelmann fuerte exterior*, e-Cat$(-)$, y diferentes versiones de *longitud de cono exterior*, e-cl$(-)$ y e-Cl$(-)$, coincidentes todas ellas entre sí:

**Teorema.**

$$\begin{array}{c}
\textit{e-Cat}(X) \leq n\\
\|\\
\left\{\begin{array}{l}\textit{Existe } Y \in \mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}_0,\ Y \simeq X, \textit{ tal}\\ \textit{que } Y = \cup Y_i\,, \textit{ con } Y_i \textit{ abierto}\\ \textit{e } Y_i \simeq \mathbb{R}_+,\ 1 \leq i \leq n.\end{array}\right\}\\
\Updownarrow\\
\textit{e-cl}(X) \leq n\\
\|\\
\left\{\begin{array}{l}\textit{Existen cofibras homotópicas en } \mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}_0,\\ A_i \to X_i \to X_{i+1}\,,\ 1 \leq i \leq n-1\\ \textit{con } X_1 \simeq \mathbb{R}_+ \textit{ y } X_n \simeq X.\end{array}\right\}\\
\Updownarrow\\
\textit{e-Cl}(X) \leq n\\
\|\\
\left\{\begin{array}{l}\textit{Existen cofibras homotópicas en } \mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}_0,\\ \Sigma^{i-1}A_i \to X_i \to X_{i+1}\,,\ 1 \leq i \leq n-1\\ \textit{con } X_1 \simeq \mathbb{R}_+ \textit{ y } X_n \simeq X.\end{array}\right\}
\end{array}$$

La importancia de estas construcciones radica en su relación con la *categoría de Lusternik-Schnirelman exterior*, definida y desarrollada en [6]:

**Teorema.**

$$\textit{e-cat}^*(X) \leq \textit{e-Cat}(X) \leq \textit{e-cat}^*(X) + 1$$

Obviamente, e-Cat$(-_{cc})$ es un invariante por homotopía propia. Posee buenas propiedades como la compatibilidad respecto a productos y, al igual a como ocurre en el caso clásico, es una aproximación de la *categoría de Lusternik-Schnirelman propia*.

**Corolario.**

$$\textit{p-cat}^*(X) \leq \textit{e-Cat}(X_{cc}) \leq \textit{p-Cat}(X) \leq \textit{p-cat}^*(X) + 1$$

Dado que la externología cocompacta no se conserva por equivalencias de homotopía exterior, en la construcción de e-Cat$(-_{cc})$ es posible que intervengan sucesiones de cofibras homotópicas exteriores que no necesariamente tienen sentido en la categoría propia. Sorprendentemente, el resultado anterior indica que $|\text{e-Cat}(-_{cc}) - \text{p-Cat}(-)| \leq 1$.

## Referencias

[1] Ayala, R. y Quintero, A., *On the Ganea strong category in proper homotopy*. Proc. Edinburgh Math. Soc. 41(2) (1998), 247-263.

[2] T. Ganea, *Lusternik-Schnirelmann category and strong category*. Ill. J. Math. 11 (1967), 417-427.

[3] O. Cornea. *Cone-length and Lusternik-Schnirelmann category*. Topology 33 (1994), 95-111.

[4] O. Cornea. *Strong category equals cone-length*. Topology 34 (1995), 377-381.

[5] García-Calcines, J.M., García-Pinillos, M., Hernández-Paricio, L.J., *A closed model category for proper homotopy and shape theory*. Bull. Austral. Math. Soc. 57(2) (1998) 221-242.

[6] García-Calcines, J.M., García-Díaz, P.R., Murillo Mas, A., *A Whitehead-Ganea approach for proper Lusternik-Schnirelmann category*. Por aparecer en Math. Proc. Camb. Phil. Soc.

XIII eTop

Castro Urdiales, 3-4 de noviembre de 2006