Operadores composición con peso entre ciertas C^*-álgebras

Ana Mª Ródenas
Departament de Matemàtiques
Campus del Riu Sec
Universitat Jaume I (Castelló)

Resumen. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos C^*-álgebras conmutativas con unidad. Estudiamos aquí hasta qué punto la existencia de un isomorfismo de grupos K definido entre los grupos de unitarios de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ ayuda a la hora de encontrar una relación entre los espacios de estructura $\sigma(\mathcal{A})$ y $\sigma(\mathcal{B})$ de estas C^*-álgebras. Impondremos a K algunas condiciones más de tipo algebraico-geométricas para alcanzar este objetivo. De hecho, si suponemos que K es además una aplicación biseparadora, entonces $\sigma(\mathcal{A}) \simeq \sigma(\mathcal{B})$ y K adquiere la estructura de un operador composición con peso. Como consecuencia, las C^*-algebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son $*$-isomorfas. Mostramos a su vez algunos ejemplos con los que queremos enfatizar el hecho de que el concepto de ser biseparador es fundamental para obtener este tipo de resultados que siguen la línea del Teorema clásico de Banach-Stone.

1. Preliminares y Planteamiento del Problema

Los operadores composición con peso o aplicaciones del tipo Banach-Stone han sido estudiados en numerosas ocasiones, con diferentes dominios e imágenes. Una de las herramientas más potentes a la hora de caracterizar este tipo de aplicaciones es el concepto de **aplicación separadora**.

Denotamos por $C(X)$ al espacio de las funciones continuas que toman valores en $\mathbb{R}$ ó en $\mathbb{C}$. Puede recibir diferentes estructuras: *anillo conmutativo, álgebra de Banach, C^*-álgebra, retículo de Banach...*

Sea, pues, $T : C(X) \to C(Y)$ una aplicación lineal; entonces T es una isometría sobreyectiva, un isomorfismo de anillos o un isomorfismo de reticulos, si T es un **operador composición con peso**. La **continuidad automática** de T es otra de las propiedades que se pueden deducir a partir de una **aplicación separadora**, bajo algunas condiciones más.

AQUÍ: ¿Teorema del tipo Banach-Stone para C^*-álgebras generales? ¿Condiciones para caracterizar una C^*-álgebra a partir de su grupo de unitarios?

Sean, pues, **$\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos C^*-álgebras conmutativas con unidad**. Entonces:

- El ***espacio de estructura*** de $\mathcal{A}$, $\sigma(\mathcal{A})$, se compone de todos los homomorfismos de $\mathcal{A}$ en $\mathbb{C}$.
- $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ es el ***grupo de unitarios*** de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{U}(\mathcal{A})_0$ la componente conexa de la identidad.
- Se define la ***transformada de Gelfand*** de $a \in \mathcal{A}$ como la aplicación $\widehat{a} : \sigma(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$, $\chi \mapsto \chi(a)$. La aplicación $\varphi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to C(\sigma(\mathcal{A}), \mathbb{C})$, $a \mapsto \widehat{a}$, es un $*$-isomorfismo isométrico (Teorema de Gelfand-Naimark para C^*-álgebras conmutativas con unidad).

Definición. *Un homomorfismo $H : \mathcal{U}(\mathcal{A}) \to \mathcal{U}(\mathcal{B})$ se dice que es* **separador**, *si para todo par de elementos a, $b \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$ tales que $(a - 1_{\mathcal{A}}) * (b - 1_{\mathcal{A}}) = 0$, entonces $(Ha - 1_{\mathcal{B}}) * (Hb - 1_{\mathcal{B}}) = 0$.*

Sea $H : \mathcal{U}(\mathcal{A}) \to \mathcal{U}(\mathcal{B})$ un isomorfismo de grupos biseparador (H^{-1} es separador) tal que:
1. $H_{|\{\mathbb{T}1_{\mathcal{A}}\}}$ es continua. **2.** $H(\mathcal{U}(\mathcal{A})_0) = \mathcal{U}(\mathcal{B})_0$

Del diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}(\mathcal{A}) \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{A}}"'] & \mathcal{U}(\mathcal{B}) \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \\ C(\sigma(\mathcal{A}), \mathbb{T}) \arrow[r, "H'"] & C(\sigma(\mathcal{B}), \mathbb{T}) \end{tikzcd}$$

se deduce que $H'(\widehat{a}) = \widehat{Ha}$ para todo $a \in \mathcal{U}(\mathcal{A})$. Luego
Proposición. *Supongamos que $H : \mathcal{U}(\mathcal{A}) \to \mathcal{U}(\mathcal{B})$ es un isomorfismo de grupos biseparador que verifica las dos condiciones anteriores. Entonces $\mathbf{H'}$ es un isomorfismo de grupos biseparador que es continuo restringido a las funciones constantes y $H'(C^o(\sigma(\mathcal{A}), \mathbb{T})) = C^o(\sigma(\mathcal{B}), \mathbb{T})$.*

2. Relación entre los espacios de estructura de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$

Definición. *Dado $y \in \sigma(\mathcal{B})$, se define el* **soporte** *de $\delta_y \circ H'$ como el conjunto*

$$supp(\delta_y \circ H') := \{x \in \sigma(\mathcal{A}) : \ \forall W \in \mathcal{N}(x) \exists f \in \mathcal{U}(\mathcal{A})_0 \text{ t.q. } coz(f) \subseteq W \text{ and } (\delta_y \circ H')(f) \neq 1_{\mathbb{T}}.\}$$

El siguiente resultado es fundamental a la hora de definir la aplicación entre $\sigma(\mathcal{A})$ y $\sigma(\mathcal{B})$.
Proposición. *Para todo $y \in \sigma(\mathcal{B})$ existe un único $x \in \sigma(\mathcal{A})$ tal que $supp(\delta_y \circ H') = \{x\}$.*

Por tanto, queda definida la aplicación $h : \sigma(\mathcal{B}) \to \sigma(\mathcal{A})$, $y \mapsto supp(\delta_y \circ H')$. Esencial en la prueba de que h es una biyección es el siguiente conjunto. Dado $x \in \sigma(\mathcal{A})$:

$$I_x := \{f \in C^o(\sigma(\mathcal{A}), \mathbb{T}) : \ \exists V \in \mathcal{N}(x) \text{ such that } f_{|V} \equiv 1_{\mathbb{T}}\}.$$

Proposición. *Sea $H' : C^o(\sigma(\mathcal{A}), \mathbb{T}) \longrightarrow C^o(\sigma(\mathcal{B}), \mathbb{T})$ un isomorfismo de grupos biseparador satisfaciendo las propiedades nombradas en la segunda parte. Entonces, para todo $y \in \sigma(\mathcal{B})$, $\mathbf{H'I_{h(y)} = I_y}$.*

De la Proposición anterior se deduce que h es una biyección. Por tanto, basta demostrar la continuidad de h, ya que $\sigma(\mathcal{B})$ es compacto y $\sigma(\mathcal{A})$ es, en particular, Hausdorff. Finalmente

Proposición. *La aplicación $h : \sigma(\mathcal{B}) \to \sigma(\mathcal{A})$ es un homeomorfismo.*

3. Representación de H'

Teorema. *Sea $H' : C^o(\sigma(\mathcal{A}), \mathbb{T}) \longrightarrow C^o(\sigma(\mathcal{B}), \mathbb{T})$ un isomorfismo de grupos biseparador que además es continuo restringido a las aplicaciones constantes. Entonces existe un homeomorfismo $h : \sigma(\mathcal{B}) \to \sigma(\mathcal{A})$ tal que $(H'f)(y) = H'(\overline{f(h(y))})(y)$ para toda $f \in C^o(\sigma(\mathcal{A}), \mathbb{T})$ y para todo $y \in \sigma(\mathcal{B})$, y además, H' es continua.*

Como consecuencia, H' es continua y obtenemos una primera representación de H' como aplicación del tipo de Banach-Stone.

Técnicas de la dualidad de Pontryagin: dualizamos H', $\widehat{H'} : C^o(\sigma(\mathcal{B}), \mathbb{T})^\wedge \to C^o(\sigma(\mathcal{A}), \mathbb{T})^\wedge$, que sigue siendo **continua** y además, respecto de la topología compacta abierta. Más aún, si la restringimos a $\sigma(\mathcal{B})$, ésta es **continua** respecto de la **topología original** de $\sigma(\mathcal{B})$. Por tanto:

Proposición. $\widehat{H'}_{|\sigma(\mathcal{B})}(\sigma(\mathcal{B})) \subseteq \{nh(y) : \ n \in \mathbb{Z}, \ h(y) \in \sigma(\mathcal{A})\}$

Definimos, entonces, $\beta : \sigma(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ de forma que para todo $y \in \sigma(\mathcal{B})$, $\delta_y \circ H' = \beta(y)\delta_{h(y)}$. Así pues, $\forall f \in C^o(\sigma(\mathcal{A}), \mathbb{T})$ y $\forall y \in \sigma(\mathcal{B})$:

$$(H'f)(y) = (\delta_y \circ H')(f) = \beta(y)\delta_{h(y)}(f) = f(h(y))^{\beta(y)},$$

esto es, H' es finalmente una **aplicación del tipo Banach-Stone**.

4. Regreso a las C^*-álgebras

Ahora es cuando estamos en condiciones de construir un $*$-isomorfismo entre las C^*-álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, teniendo en cuenta que $h : \sigma(\mathcal{B}) \to \sigma(\mathcal{A})$ es un homeomorfismo.

Teorema. Las C^*-álgebras conmutativas con unidad $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son $*$-isomorfas.

-Esquema de la prueba-

- Se define el candidato a ser el isomorfismo C^*-algebras $C(\sigma(\mathcal{A}), \mathbb{C})$ and $C(\sigma(\mathcal{B}), \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} K : C(\sigma(\mathcal{A}), \mathbb{C}) &\longrightarrow C(\sigma(\mathcal{B}), \mathbb{C}) \\ f &\longmapsto f \circ h. \end{aligned}$$

- K es un isomorfismo de grupos.
- Como las transformadas de Gelfand $\varphi_{\mathcal{A}}$ y $\varphi_{\mathcal{B}}$ son también $*$-isomorfismos, entonces $K' : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un $*$-isomorfismo que verifica que $\varphi_{\mathcal{B}} \circ K' = K \circ \varphi_{\mathcal{A}}$.

A lo largo de todo el trabajo, nuestras **herramientas** han sido:

1. Propiedades de las aplicaciones separadoras.
2. Propiedades de las C^*-álgebras. Relación entre éstas y los grupos de funciones continuas evaluadas en $\mathbb{T}$.
3. Técnicas de la dualidad de Pontryagin. Propiedades de $\mathbb{T}$.

5. Algunos Ejemplos

Sea G un grupo localmente compacto. Asociada a G, puede construirse una C^*-algebra, que recibe el nombre de **C^*-álgebra de grupo $C^*(G)$** de G. Si G es además abeliano, entonces $C^*(G)$, ya conmutativa, puede identificarse con $C_0(\widehat{G})$, donde $\widehat{G}$, el grupo dual de G en el sentido de Pontryagin, es el espacio de estructura de dicha álgebra.

EJEMPLO 1. *Construimos un isomorfismo topológico H entre $C(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{T})$ y $C(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{T})$ teniendo en cuenta que $C(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{T}) \cong C(\mathbb{T}, \mathbb{T}) \times C(\mathbb{T}, \mathbb{T}) \cong (C^o(\mathbb{T}, \mathbb{T}) \times \widehat{\mathbb{T}}) \times (C^o(\mathbb{T}, \mathbb{T}) \times \widehat{\mathbb{T}})$. Si $(f, g) \in C(\mathbb{T}, \mathbb{T})^2 \cong C(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{T})$, entonces definimos*

$$\begin{aligned} H : C(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{T}) &\longrightarrow C(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{T}) \\ (f, g) &\longmapsto ((\tilde{f}, \chi_{n-m}), (\tilde{g}, \chi_n)), \end{aligned}$$

donde $f = (\tilde{f}, \chi_n)$ y $g = (\tilde{g}, \chi_m)$ y $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^o(\mathbb{T}, \mathbb{T})$, mientras que $\chi_n, \chi_m \in \widehat{\mathbb{T}}$, con $n, m \in \mathbb{Z}$.
Conclusión: Este isomorfismo H es una isometría pero **no** se puede representar mediante un homeomorfismo h entre $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2$.

EJEMPLO 2. *Los grupos $\Gamma_1 = \mathbb{Z} \times \oplus_\omega \mathbb{Z}_2$ y $\Gamma_2 = \oplus_\omega \mathbb{Z} \times \oplus_\omega \mathbb{Z}_2$ verifican*

$$\mathcal{U}(C^*(\Gamma_1)) = C(\mathbb{T} \times 2^\omega, \mathbb{T}) \cong C(\mathbb{T}^\omega \times 2^\omega, \mathbb{T}) = \mathcal{U}(C^*(\Gamma_2)),$$

donde $\widehat{\Gamma}_1 = \mathbb{T} \times 2^\omega$ and $\widehat{\Gamma}_2 = \mathbb{T}^\omega \times 2^\omega$ son los espacios de estructura de $C^*(\Gamma_1)$ y $C^*(\Gamma_2)$, respectivamente. Pero las componentes conexas de la identidad de $\widehat{\Gamma}_1$ y $\widehat{\Gamma}_2$ no tienen la misma dimensión, luego los grupos no pueden ser homeomorfos.
Conclusión: Tenemos dos grupos topológicos cuyas C^*-álgebras de grupo asociadas **no son isomorfas** pero **SÍ** sus grupos de unitarios.