Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

Un ejemplo de laminación minimal que no es únicamente ergódica

Álvaro Lozano Rojo (UPV–EHU)*

ZTF-FCT Zientzia eta Teknologia Fakultatea / Facultad de Ciencia y Tecnología

1. Introducción

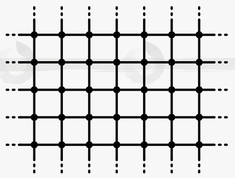
E. Ghys ha construido en [3] una laminación por superficies de Riemann con tipos conformes diferentes. De hecho, todas las hojas son parabólicas, salvo una única hoja hiperbólica. La idea es la siguiente: considera el espacio de los subárboles infinitos del grafo de Cayley de $\mathbb{Z}^2$, lo dota de la topología de Gromov-Hausdorff que lo convierte en un espacio foliado por árboles, construye un conjunto minimal a partir de un árbol repetitivo y termina sustituyendo los árboles por superficies de Riemann. Este ejemplo es únicamente ergódico, según hemos probado en [1]. Sin embargo, E. Blanc ha construido un ejemplo que no es únicamente ergódico (véase [2]), usando la misma idea, pero sustituyendo $\mathbb{Z}^2$ por el grupo libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

El objetivo del póster es construir un espacio foliado minimal, dotado de dos medidas ergódicas diferentes que distinguen dos tipos de hojas, unas son subárboles del grafo de Cayley de $\mathbb{Z}^2$ con crecimiento lineal y otras con crecimiento subcuadrático.

2. El espacio foliado de Gromov–Hausdorff

Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de los subárboles infinitos del grafo de Cayley de $\mathbb{Z}^2$ que tiene al origen como vértice. Lo dotamos de la métrica de Gromov–Hausdorff de manera que:

«dos árboles son cercanos si coinciden en una gran bola centrada en el origen»



El grafo de Cayley de $\mathbb{Z}^2$.

Un argumento diagonal clásico muestra que **$\mathcal{T}$ es un conjunto de Cantor**.

Se define en $\mathcal{T}$ la relación *ser trasladados* por:

$$T \mathcal{R} T' \iff T = T' - v \text{ para cierto } v \in \mathbb{Z}^2$$

Cada clase $\mathcal{R}[T]$ está dotada de una estructura de grafo que se obtiene al unir T y $T' \in \mathcal{T}$ si $T = T' - v$ con $|v| = 1$. Obsérvese que cada vértice $v \in T$ determina un árbol $T' = T - v \in \mathcal{R}[T]$ y que dos vértices v y $v' \in T$ determinan el mismo árbol si $T = T + v - v'$. En consecuencia podemos pensar en $\mathcal{R}[T]$ como los vértices del grafo $T/\operatorname{Iso}(T)$. En particular, si T es *aperiódico* (i.e., no coincide con ninguno de sus trasladados) se puede identificar T y $\overline{\mathcal{R}}[T]$.

Según [1], es posible construir un espacio foliado por grafos $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ de manera que $(\mathcal{T}, \mathcal{R})$ sea relación de equivalencia inducida sobre los vértices.

Los subconjuntos minimales de $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ corresponden con las envolturas (i.e. las clausuras de las hojas $\overline{\mathcal{R}}[T]$) de los árboles **repetitivos** T, que son aquellos que *«se parecen a sí mismos en torno a cualquier vértice»*, es decir, $\forall r > 0$, $\exists R > 0$ tal que

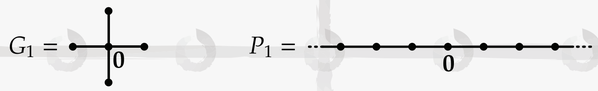
$$\forall y \in T,\ B_T(0,r) + v = B_T(v,r) \subseteq B_T(y,R), \text{ para cierto } v \in \mathbb{Z}^2$$

3. Construcción del ejemplo

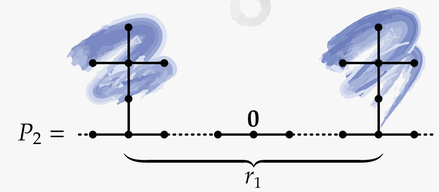
La construcción del ejemplo se realiza fabricando dos árboles aperiódicos y repetitivos, utilizando para ello dos motivos con diferentes tasas de aparición en uno y otro árbol.

Ambos árboles pertenecen a la misma laminación minimal, ya que están definidos mediante los mismos motivos.

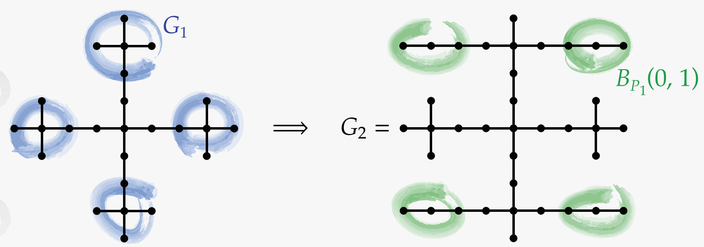
Se comienza con dos árboles G_1 y P_1



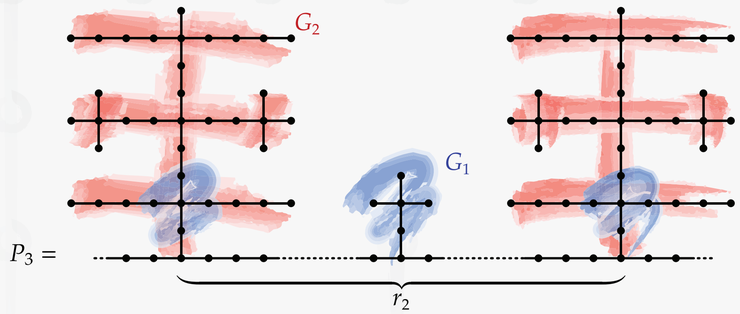
Se escoge $r_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\#G_1/r_1 \leqslant 1/3$. Pegamos a P_1, mediante aristas, copias de G_1 espaciadas por r_1



Alrededor de G_1 se disponen 4 copias de G_1 en forma de cruz pegadas por 4 aristas. A cada "brazo" vertical de esta cruz se le añade a cada lado una copia de $B_{P_1}(0,1)$ unida mediante una arista



Se continua de esta forma para construir P_3 y G_3: se escoge $r_2 \in r_1\mathbb{N}$ tal que $\#G_2/r_2 \leqslant 1/3^2$. Se insertan copias de G_2 distantes entre sí r_2 sustituyendo algunas de las copias de G_1



Se disponen 5 copias de G_2 en forma de cruz y como antes se añaden 4 copias de $B_{P_2}(0, \frac{3^2-1}{2})$ todo unido mediante aristas de forma similar a G_2.

Se continua así inductivamente y se obtienen dos árboles aperiódicos y repetitivos P_∞ y G_∞.

Cualquier motivo de P_∞ se encuentra en G_∞ y viceversa, en otras palabras, $X = \overline{\mathcal{R}[P_\infty]} = \overline{\mathcal{R}[G_\infty]}$

4. Propiedades ergódicas

Es posible construir medidas de probabilidad sobre $\mathcal{T}$ mediante sucesiones de bolas en las hojas: dado $T \in X$

$$\mu_T\big(B(T', e^{-r})\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\big(B_{T'}(0,r) \cap B_T(0,n)\big)}{\#B_T(0,n)} \tag{1}$$
$$= \text{Tasa de aparición de } B_{T'}(0,n) \text{ en } T$$

El crecimiento polinomial de $\mathbb{Z}^2$ permite probar que las medidas μ_T son $\mathcal{R}$-invariantes, es decir, $\mu_T(B) = \mu_T(B - v)$ para $v \in \mathbb{Z}^2$ y $A \in \mathcal{B}(\mathcal{T})$.

Las sucesiones $\{G_n\}$ y $\{B_{P_\infty}(0,n)\}_n$ definen dos medidas de probabilidad $\mathcal{R}$-invariantes μ_G y μ_P respectivamente. Dichas medidas **son distintas**. En efecto, sea

$$X_{G_k} = \{T \in X \text{ tales que } G_k - v \subseteq T,\ v \in G_k\}$$
$$= \{\text{árboles de } X \text{ que tienen una copia de } G_k \text{ alrededor de } (0,0)\}$$

Dado que se han colocado las copias de G_k en P_∞ a una distancia r_k suficientemente grande como para que $\#G_k/r_k \leqslant 1/3^k$, la tasa de aparición de G_k en P_∞ es *pequeña*. De hecho

$$\mu_P(X_{G_k}) \leqslant \frac{1}{3^{k-1}} \implies \mu_P\Big(\bigcap_k X_{G_k}\Big) = 0.$$

Por otro lado en G_∞ existen *muchas copias* de G_k. Así, es posible concluir que

$$\mu_G(X_{G_k}) \geqslant \frac{5}{12} \implies \mu_G\Big(\bigcap_k X_{G_k}\Big) > 0.$$

Como consecuencia de lo anterior, se tiene que:

- μ_G-casi todas las hojas de $\mathcal{L}$ tiene el tipo de crecimiento de la función $f(x) = x^{\ln 5/\ln 3}$ (que es el tipo de crecimiento de G_∞);
- μ_P-casi todas las hojas de $\mathcal{L}$ tienen dos finales y crecimiento lineal (que es el tipo de crecimiento de P_∞).

References

[1] F. Alcalde Cuesta, A. Lozano Rojo y M. Macho Stadler, *Dynamique et géométrie non commutative de la lamination de Ghys-Kenyon*. Preprint, 2006.

[2] E. Blanc, Examples of mixed minimal foliated spaces. `http://www.umpa.ens-lyon.fr/~eblanc/preprints/mixed.ps`.

[3] E. Ghys, *Laminations par surfaces de Riemann*. Panoramas & Synthèses, **8** (1999), 49–95.

[4] Á. Lozano Rojo. The Cayley foliated space of a graphed pseudogroup, in *Proceedings of the XIV Fall Workshop on Geometry and Physics*. Por aparecer en *Publ. de la RSME*, 2006.

*Parcialmente financiado por los proyectos UPV 00127.310-E-15916 y MEC MTM2004-08214