# Algunas aplicaciones entre espacios de funciones absolutamente continuas

Luis Dubarbie Fernández, en colaboración con Jesús Araujo
Universidad de Cantabria

*Estudiamos las aplicaciones (bi)separadoras entre espacios de funciones absolutamente continuas definidas en intervalos compactos de* $\mathbb{R}$*.*
*Se obtiene su representación, basada en la existencia de una relación topológica entre los espacios de base, se deduce la continuidad automática de éstas y se estudian las condiciones para que una aplicación separadora sea biseparadora.*
*Analizaremos el caso en que las funciones toman valores escalares* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) *y en el que toman valores en espacios de Banach (reales o complejos).*

## CASO ESCALAR

**Definiciones:**
Diremos que $f$ es **absolutamente continua** en $[a,b]$ si:
$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$$

para cada familia finita de subintervalos disjuntos dos a dos $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{n}$ de $[a,b]$ verificando que

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta.$$

Denotaremos el conjunto de las funciones absolutamente continuas en $[a,b]$ como $AC([a,b])$.

Diremos que una aplicación $T : AC([a,b]) \to AC([c,d])$ es **separadora** si verifica que:

$$f \cdot g \equiv 0 \Rightarrow Tf \cdot Tg \equiv 0,$$

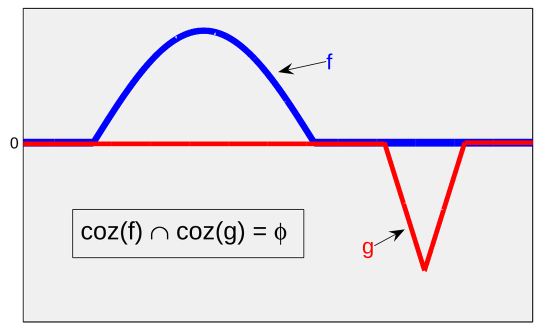
o equivalentemente

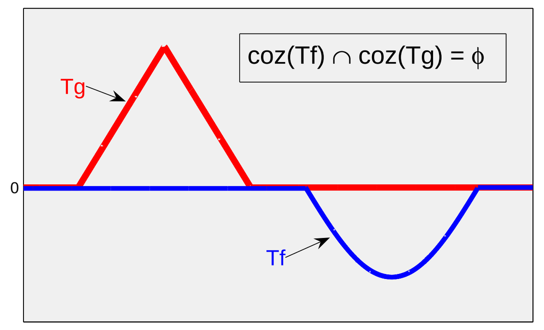
$$\mathrm{coz}(f) \cap \mathrm{coz}(g) = \emptyset \Rightarrow \mathrm{coz}(Tf) \cap \mathrm{coz}(Tg) = \emptyset,$$

donde

$$\mathrm{coz}(f) = \{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\}.$$

$T$ es **biseparadora** si $T$ y $T^{-1}$ son separadoras.




**Teorema:**
Sea $T : AC([a,b]) \to AC([c,d])$ una aplicación lineal, biyectiva y separadora. Entonces:

$$\boxed{Tf(y) = a(y) f(h(y)),\ \forall f \in AC([a,b]), \forall y \in [c,d]}$$

con $h : [c,d] \to [a,b]$ un homeomorfismo y $a \in AC([c,d])$. Además, $T$ es continua.

**Teorema:**
Sea $T : AC([a,b]) \to AC([c,d])$ lineal y biyectiva.

$T$ **separadora** $\Rightarrow$ $T$ **biseparadora.**

## CASO VECTORIAL

**Definiciones:**
Una función $f$ tomando valores en un espacio de Banach $E$ es **absolutamente continua** en $[a,b]$ si:
$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \|f(b_i) - f(a_i)\|_E < \epsilon$$

para cada familia finita de subintervalos disjuntos dos a dos $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{n}$ de $[a,b]$ verificando que

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta.$$

Denotaremos este conjunto como $AC([a,b],E)$.

Diremos que $T : AC([a,b],E) \to AC([c,d],F)$ es **separadora** si verifica que:

$$\|f(x)\|_E \|g(x)\|_E = 0, \forall x \Rightarrow \|Tf(y)\|_F \|Tg(y)\|_F = 0, \forall y.$$

**Teorema:**
Sea $T : AC([a,b],E) \to AC([c,d],F)$ una aplicación lineal, biyectiva y biseparadora. Entonces:

$$\boxed{Tf(y) = J(y)(f(h(y))), \forall f \in AC([a,b],E), \forall y \in [c,d]}$$

donde $J(y) : E \to F$ es lineal y biyectiva, para cada $y \in [c,d]$, y $h$ un homeomorfismo entre $[c,d]$ y $[a,b]$.

**Corolario:**
Si $E$ es un espacio de Banach de dimensión finita y $T : AC([a,b],E) \to AC([c,d],F)$ una aplicación lineal, biyectiva y biseparadora, entonces:

$$\boxed{Tf = J(f \circ h), \forall f \in AC([a,b],E)}$$

donde

$$\begin{aligned} J : [c,d] &\to L(E,F) \\ y &\mapsto J(y) \end{aligned}$$

es una aplicación continua si consideramos la topología $SOT$ en $L(E,F)$ y además $\dim(F) = \dim(E)$.

**Líneas de investigación:**
-Sea $T : AC([a,b],E) \to AC([c,d],F)$ lineal y biyectiva
 $T$ separadora $\Rightarrow$ $T$ biseparadora **??**
 $T$ isometría $\Rightarrow$ $T$ separadora **??**
-Generalizar los resultados anteriores a otros espacios base.
-Aplicaciones separadoras entre espacios de funciones de Lipschitz.

**Referencias:**

1. J.Araujo, *Realcompactness and Banach-Stone theorems*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 11 (2004) 247-258.
2. S. Hernández, E. Beckenstein y L. Narici, *Banach-Stone theorems and separating maps*, Manuscripta Mathematica 86 (1995) 409–416.
3. E. Hewitt y K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag (1975).
4. K.Jarosz, *Automatic continuity of separating linear isomorphisms*, Canad. Math.Bull. 33 (1990) 139-144.