Número de ramificación de un pseudogrupo de tipo finito*

María Pérez Fernández de Córdoba

Universidade de Santiago de Compostela.

1. NÚMERO DE RAMIFICACIÓN DE UN GRAFO

Sea G un grafo de geometría acotada (i.e. el número de aristas con origen en un vértice está uniformemente acotado), dotado de la métrica d que hace a cada arista isométrica al intervalo $[0,1]$. La noción de **número de ramificación** mide el promedio de descendientes de un vértice, es decir, de aquellos vértices vecinos que están más alejados de un vértice 0 prefijado. En efecto, se define:

$$\boxed{br(G) = inf\{\lambda \geq 1 \mid inf_{\Pi} \sum_{e \in \Pi} \lambda^{-d(0,e)} = 0\}}$$

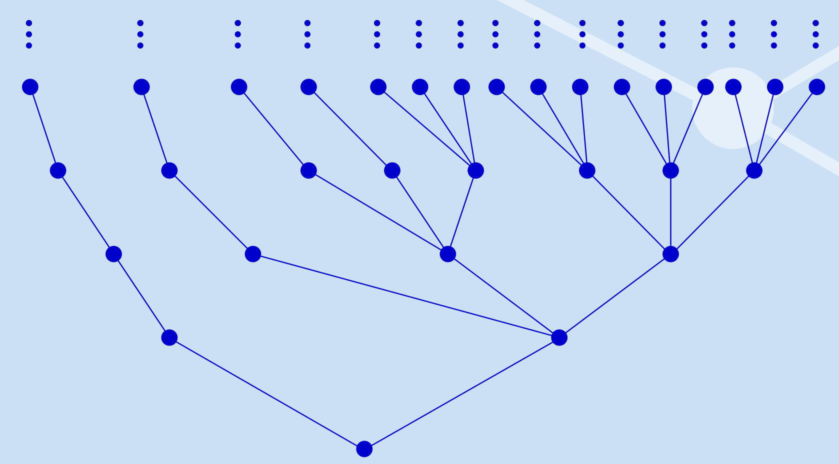
donde Π es un conjunto de aristas que separan 0 del infinito [4]. Hay una relación clara entre el número de ramificación $br(G)$ y la tasa de crecimiento exponencial

$$gr(G) = \liminf_{n \to \infty} v(n)^{\frac{1}{n}}$$

donde $v(n) = \sharp B_d(0,n)$. En efecto,

$$\boxed{br(G) \leq gr(G)}$$

Aunque en muchos ejemplos ambas cantidades coinciden, hay casos en los que esto no ocurre:



$br(T) = 1 \qquad gr(T) = 2.$

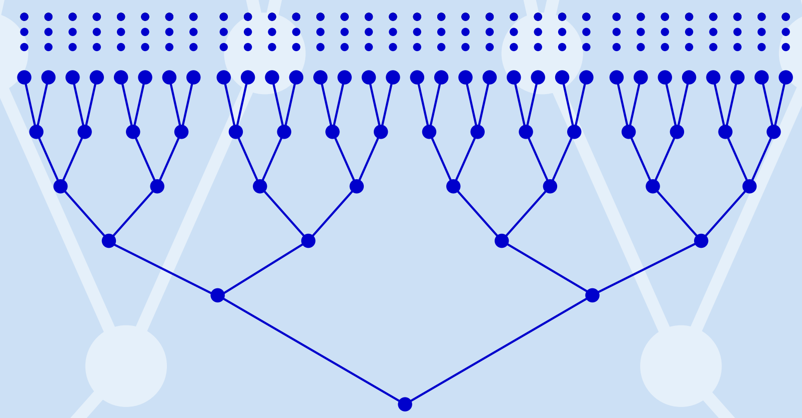
2. NATURALEZA DEL INVARIANTE

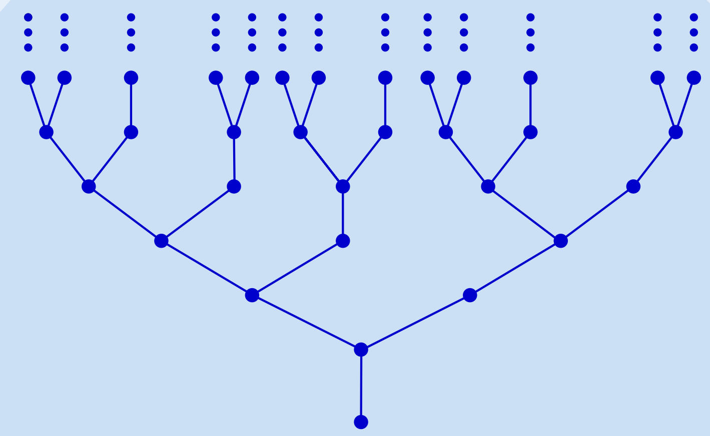
La definición de $br(G)$ usa la estructura métrica de G. Resulta natural preguntarse si esta cantidad es independiente de la estructura métrica a gran escala. Recordemos que dos grafos G y G' son *casi-isométricos* (en el sentido de Gromov) si existe una aplicación bilipschitziana entre dos redes (constituídas por vértices).

Para ver como afecta la casi-isometría al número de ramificación, uno puede restringirse a las dos situaciones siguientes:

- G es un subgrafo de G' tal que la distancia de cualquier vértice de G' a G está uniformemente acotada.
- G y G' son grafos lipschitzianamente equivalentes con el mismo conjunto de vértices.

En el primer caso se tiene $br(G) = br(G')$. El árbol binario G y el árbol de Fibonacci G' satisfacen la segunda situación. En este caso, $br(G) = 2$ y $br(G') = \Phi$ siendo Φ la razón áurea.





El árbol de Fibonacci representa el crecimiento demográfico de una pareja de conejos cuya madurez sexual se alcanza al cabo de un mes.

Tal y como ocurre en este ejemplo, los números de ramificación de dos grafos casi-isométricos G y G' con constante de Lipschitz C están relacionados por:

$$\boxed{br(G) \leq br(G')^C}$$

El número de ramificación de un árbol T está relacionado con la dimensión de Hausdorff $HD(\partial T)$ del subespacio de finales ∂T de la siguiente manera:

$$\boxed{br(T) = e^{HD(\partial T)}}$$

Si T y T' son casi-isométricos, entonces $HD(\partial T) \leq CHD(\partial T')$ donde C es la constante de Lipschitz.

3. NÚMERO DE RAMIFICACIÓN DE UN PSEUDOGRUPO

Sea X un espacio boreliano estándard, dotado de una medida de probabilidad μ. Sea Σ una familia finita de isomorfismos borelianos entre partes borelianas de X que respeten los conjuntos de medida nula. Tal familia genera un pseudogrupo de transformaciones no singulares de X de tipo finito Γ.

Cada órbita $\Gamma(x)$ es el conjunto de vértices de un grafo localmente finito $\Gamma_\Sigma(x)$. Dos elementos $y, z \in \Gamma(x)$ están unidos por una arista si existe $\gamma \in \Sigma$ tal que $\gamma(y) = z$.

Sea $br_\Sigma : X \to [1, \infty)$ la aplicación de ramificación definida por $br_\Sigma(x) = br(\Gamma_\Sigma(x))$. Como consecuencia de una versión del lema de la hipersuperficie de [3], descrita en [2], se tiene:

PROPOSICION 1. *La aplicación br_Σ es una aplicación boreliana constante sobre las órbitas.*

Se define el **número de ramificación** del pseudogrupo (Γ, X, μ) dotado de la estructura de grafo definida por Σ por:

$$\boxed{br(\Gamma, X, \mu, \Sigma) = \int br_\Sigma(x) d\mu(x)}$$

Como corolario de la proposición anterior, se tiene:

TEOREMA 2. *Si la medida μ es ergódica, entonces $br(\Gamma, X, \mu, \Sigma) = br(\Gamma_\Sigma(x))$, para μ-casi todo $x \in X$.*

TEOREMA 3 ([1]) . *Si μ es ergódica y $br(\Gamma, X, \mu, \Sigma) = 1$, entonces la relación de equivalencia definida por la acción de Γ es promediable.*

EJEMPLO 4. Si un grupo discreto Γ actúa sobre un espacio compacto, la elección de un sistema de generadores Σ permite dotar a cada órbita $\Gamma(x)$ de una estructura de grafo $\Gamma_\Sigma(x)$. Si la isotropía de x es trivial, $\Gamma_\Sigma(x)$ es el grafo de Cayley $\mathcal{C}(\Gamma, \Sigma)$ de (Γ, Σ).

La acción de un grupo promediable Γ deja siempre invariante una medida de probabilidad. Cuando la acción es esencialmente libre, la función br_Σ es constante c.p.d. y coincide con el número de ramificación de $\mathcal{C}(\Gamma, \Sigma)$. En el caso del grupo del sereno $\Gamma = \mathbb{Z} \ltimes \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \times \{n\}$, este número coincide con Φ.

Referencias

[1] F. ALCALDE, *Moyennes harmoniques*. Sometido a publicación, 2006.

[2] E. BLANC,*Propriétés génériques des laminations*. Thèse UCB-Lyon 1, 2001.

[3] E. GHYS, Topologie des feuilles génériques. *Ann. of Math.* , **141** (1995), 347-422.

[4] R. LYONS, Random walks and percolation on trees. *Ann. Probab.*, **18** (1990), 931-958.

*Trabajo parcialmente financiado por la Xunta de Galicia (Bolsa de 3º ciclo) y Ministerio de Educación y Ciencia (proyecto MTM2004-08214).