CLASES DE HOMOTOPÍA DE SISTEMAS DE CURVAS EN UN TORO SÓLIDO DE GÉNERO 2

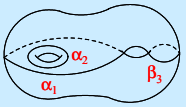
Raquel Águeda Maté

Dpto. de Análisis Económico y Finanzas, Fac. de Derecho y CC. Sociales de Ciudad Real (Universidad de Castilla - La Mancha)

Contexto

Espacios de deformación de grupos Kleinianos libres, generados por un elemento parabólico y uno loxodrómico.

Se corresponden con representaciones en $PSL(2,\mathbb{C})$, discretas, fieles y que preservan el tipo, del grupo fundamental de una 3-variedad hiperbólica M obtenida estrangulando β_3 en un toro sólido de género 2.



Estudiamos estructuras geométricas en $\overset{o}{M}$ estudiando la frontera de su núcleo convexo, homeomorfa a ∂M, y su lugar geométrico de plisado, en nuestro caso, un sistemas de curvas.

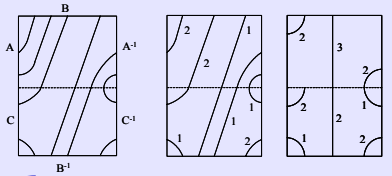
Definición

Un sistema de curvas $\underline{\gamma}$ es una familia de lazos simples, esenciales y disjuntos en ∂M, donde sus componentes son homotópicamente distintos.

Parametrización de clases de ∂M-homotopía de sistemas de curvas en ∂M.

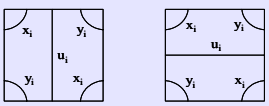
$[\underline{\gamma}] \to \mathbf{p}(\underline{\gamma}) = (q_1(\underline{\gamma}), q_2(\underline{\gamma}), p_1(\underline{\gamma}), p_2(\underline{\gamma}))$. Véase [1].

Ejemplo:



$\mathbf{p}(\underline{\gamma}) = (5, 3, 2, 1)$

Dos tipos de cajas:



$$\epsilon_i = \begin{cases} 1 \text{ si } y_i \le x_i \\ -1 \text{ si } x_i < y_i \end{cases}$$

$q_i(\underline{\gamma}) = u_i + |x_i - y_i|$ $\quad q_i(\underline{\gamma}) = |x_i - y_i|$

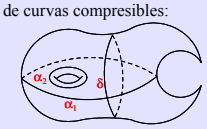
$p_i(\underline{\gamma}) = \epsilon_i |x_i - y_i|$, $\quad p_i(\underline{\gamma}) = \epsilon_i(u_i + |x_i - y_i|)$.

¿Cuándo dos sistemas de curvas no homótopos en ∂M son homótopos en M?

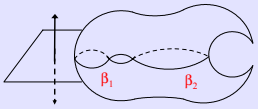
Encontramos en cada clase de M-homotopía $[[\underline{\gamma}]]$ un sistema de curvas representante $\underline{\gamma}^0$ en ∂M, único salvo ∂M-homotopía.

Utilizamos homeomorfismos de $\mathrm{Mod}_0^*(M)$: se extienden de ∂M a M y son homótopos a la identidad.

1. Extensiones de giros de Dehn alrededor de curvas compresibles:
α_2, δ y $\tau_{\alpha_2}^n(\delta)$, $n \in \mathbb{Z}$.



2. Involución hiperelíptica f.



TEOREMA

Sea $\underline{\gamma}$ un sistema de curvas en ∂M con $\mathbf{p}$-coordenadas $\mathbf{p}(\underline{\gamma}) = (q_1, q_2, p_1, p_2)$, entonces existe un sistema de curvas $\underline{\gamma}^0$ en ∂M, M-homótopo al dado, con $\mathbf{p}$-coordenadas $\mathbf{p}(\underline{\gamma}^0) = (q_1(\underline{\gamma}^0), q_2(\underline{\gamma}^0), p_1(\underline{\gamma}^0), p_2(\underline{\gamma}^0))$ tales que $q_1(\underline{\gamma}^0) \le q_2(\underline{\gamma}^0)$ y $0 \le p_2(\underline{\gamma}^0) < q_2(\underline{\gamma}^0)$.

Además, el sistema de curvas $\underline{\gamma}^0$ es único salvo ∂M-homotopía.

Lo demostramos:

1. Proposición

Sea $\underline{\gamma}$ un sistema de curvas en ∂M y g un homeomorfismo de M, entonces $q_2(g(\underline{\gamma})) = q_2$.

Iniciamos un proceso de "reducción" hasta conseguir que $q_1(g(\underline{\gamma})) \le q_1$ mientras $q_2(g(\underline{\gamma})) = q_2$.

2. Proposición

Si $q_2 < q_1$, $p_1 > 0$ y $p_1 < q_1$, entonces

$$q_1(\tau_\delta(\underline{\gamma})) = \begin{cases} -q_1 + 2p_1 + 2\max\{q_2, p_1\} & \text{si } \chi < 2p_1 - \dfrac{\min\{q_2, p_1\}}{2} \\ q_1 - 4p_1 & \text{si } 2p_1 - \dfrac{\min\{q_2, p_1\}}{2} \le \chi \end{cases}$$

$$q_2(\tau_\delta(\underline{\gamma})) = q_2$$

$$p_1(\tau_\delta(\underline{\gamma})) = \begin{cases} -p_1 & \text{si } \chi < 2p_1 - \min\{q_2, p_1\} \\ q_1 - q_2 - 5p_1 + 2\min\{q_2, p_1\} & \text{si } 2p_1 - \min\{q_2, p_1\} \le \chi \\ & \text{y } \chi < 2p_1 - \dfrac{\min\{q_2, p_1\}}{2} \\ q_1 - q_2 - 3p_1 & \text{si } 2p_1 - \dfrac{\min\{q_2, p_1\}}{2} \le \chi < 2p_1 \\ p_1 & \text{si } 2p_1 \le \chi \end{cases}$$

$$p_2(\tau_\delta(\underline{\gamma})) = \begin{cases} 2\min\{q_2, p_1\} + p_2 & \text{si } \chi < 2p_1 - \min\{q_2, p_1\} \\ -q_1 + q_2 + 4p_1 + p_2 & \text{si } 2p_1 - \min\{q_2, p_1\} \le \chi < 2p_1 \\ p_2 & \text{si } 2p_1 \le \chi \end{cases}$$

Corolario

Si $q_2 < q_1$, $p_1 > 0$, $p_1 < q_1$ y $\chi > p_1 - \dfrac{\min\{q_2, p_1\}}{2}$, entonces $q_1(\tau_\delta(\underline{\gamma})) < q_1$.

¿Y si q_1 no se reduce utilizando τ_δ?

3. Proposición

Si $q_2 < q_1$, $p_1 < 0$, $|p_1| < q_1$ y $\chi \le |p_1| \le q_2$, entonces $q_1(f(\underline{\gamma})) \le q_2$.

4. Proposición

Sea $\underline{\gamma}$ un sistema de curvas con $\mathbf{p}(\underline{\gamma}) = (q_1, q_2, p_1, p_2)$ tales que $p_1 > 0$ y $p_1 < q_1$, entonces existe $\tilde{g} \in \mathrm{Mod}_0^*(M)$ tal que $\tilde{g}(\underline{\gamma})$ es un sistema de curvas con $q_1(\tilde{g}(\underline{\gamma})) < q_1$.

$\tilde{g}$ es:

$$\begin{cases} \tau_{\tau_{a_1}(\delta)}^{-1} & \text{si } \chi < p_1 - \dfrac{\min\{q_2, p_1\}}{2} \text{ y } q_2 < p_1 \\ f \circ \tau_\delta & \text{si } \chi < p_1 - \dfrac{\min\{q_2, p_1\}}{2} \text{ y } p_1 \le q_2 \\ f \circ \tau_\delta & \text{si } \chi = p_1 - \dfrac{\min\{q_2, p_1\}}{2} \\ \tau_\delta & \text{si } \chi > p_1 - \dfrac{\min\{q_2, p_1\}}{2} \end{cases}$$

5.

- En general para reducir q_1: $g = \tau_{a_1}^{\left[\frac{p_1}{q_1}\right]} \circ \tilde{g} \circ \tau_{a_1}^{-\left[\frac{p_1}{q_1}\right]}$.
- Repetimos el proceso un número finito de veces:
$q_1(g_{i+1} \circ g_i \circ \ldots \circ g_1(\underline{\gamma})) \le q_1(g_i \circ \ldots \circ g_1(\underline{\gamma}))$ para $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ y $q_1(g_m \circ g_{m-1} \circ \ldots \circ g_2 \circ g_1(\underline{\gamma})) \le q_2$.
- $q_2\left(\tau_{a_2}^{-\left[\frac{p_2}{q_2}\right]}(\underline{\gamma})\right) > p_2\left(\tau_{a_2}^{-\left[\frac{p_2}{q_2}\right]}(\underline{\gamma})\right) \ge 0$.
- Unicidad.

[1] L. Keen, J. Parker, C. Series, Combinatorics of simple closed curves on the twice punctured torus. Israel J. Math. 112 (1999), 29-60.