LA TOPOLOGÍA DE LOS ATRACTORES

José Manuel Rodríguez Sanjurjo

Universidad Complutense

XIII ENCUENTRO DE TOPOLOGÍA

CASTRO URDIALES

TEORÍA DE ČECH

Homología y cohomología
Teoremas de dualidad (Alexander y Lefschetz)
Teoría de la forma (Borsuk)

TEORÍA DE MORSE

Flujos gradiente
Flujos de Morse-Smale
Teoría de Conley-Zehnder
de descomposiciones de Morse.

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE

M.A. Morón
F. Ruiz del Portal
J.J. Sánchez-Gabites
J.M.R. Sanjurjo

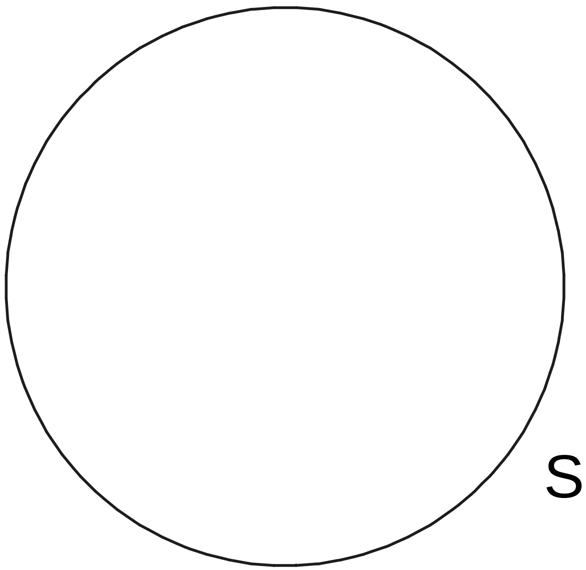
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

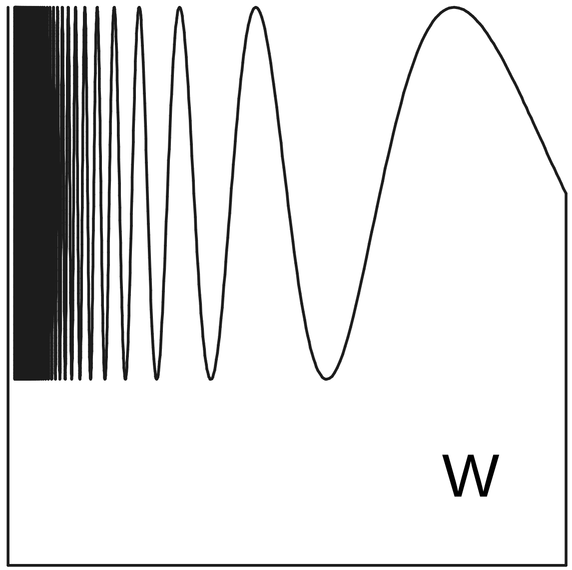
A.Giraldo

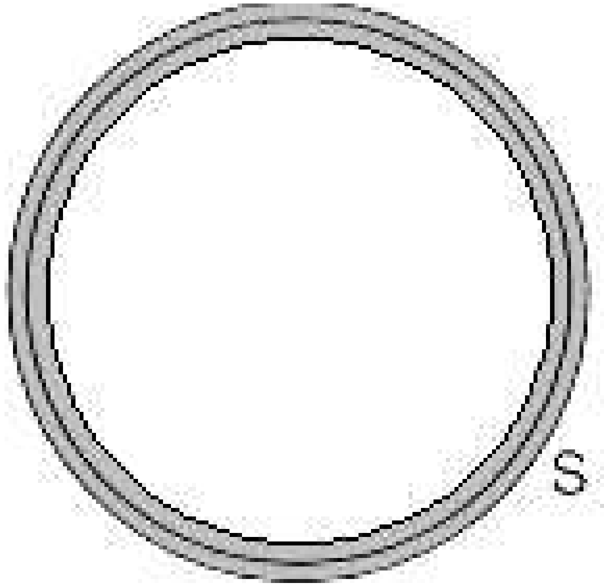
UNIVERSIDAD DE ALCALÁ DE HENARES

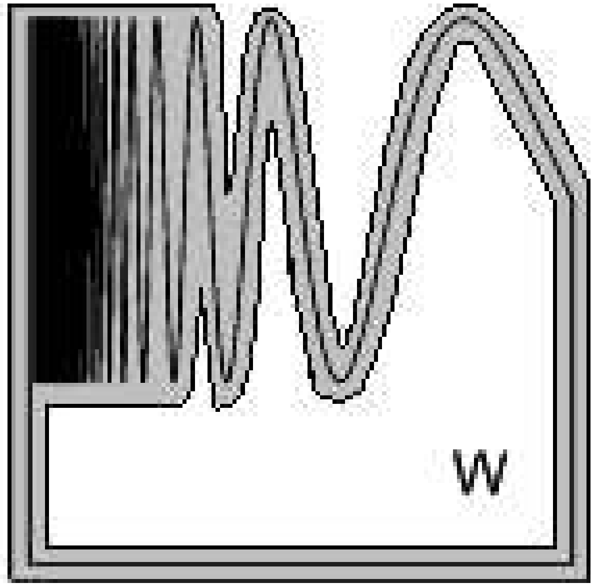
J.M. Salazar

Dos compactos con la misma forma:









Los entornos de ambos conjuntos son **homeomorfos**.

Las primeras **aplicaciones de la teoría de la forma a los sistemas dinámicos** son debidas a H. Hastings, quien demostró lo que llamó un teorema de Poincaré-Bendixson en dimensiones superiores.

Teorema (Hastings) *Sea M una subvariedad n-dimensional de* $\mathbb{R}^n$ *compacta y con borde. Sea* $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *un sistema dinámico tal que las órbitas a través del borde de M entran en el interior de M para tiempos positivos. Entonces, existe un compacto invariante y asintóticamente estable,* K*, en el interior de M tal que* **la inclusión** $i : K \longrightarrow M$ **es una equivalencia "shape"***.*

Este resultado fue una de las motivaciones para que varios autores comenzaran a estudiar las relaciones entre los sistemas dinámicos y la teoría de la forma y, en concreto, las propiedades topológicas de los atractores.

Teorema *Sea* $\varphi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ *un flujo continuo definido en una variedad, o más generalmente en un* ANR *localmente compacto,* M*, y sea* K *un* **atractor** *(asintóticamente estable) de* φ*. Entonces* K *tiene la* **forma de un poliedro***.*

En la formulación del resultado anterior han intervenido, además de nuestro grupo, Bogatyi y Gutsu (para variedades diferenciables) y Günther y Segal (para variedades topológicas). Una consecuencia importante de este teorema es que **los atractores de flujos** en $ANR's$ **tienen homología y cohomología de Čech finitamente generada** que se anula en dimensiones superiores.

Günther y Segal han demostrado un resultado recíproco para compactos de dimensión finita.

Una **pregunta natural**, a la vista del resultado anterior, **es si los conjuntos invariantes aislados tienen forma poliedral**. La respuesta es negativa: hemos probado que todo compacto finito dimensional, K, se puede sumergir en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ de modo que existe un flujo en $\mathbb{R}^n$ que tiene a K como conjunto invariante aislado. Por tanto, es necesario suponer hipótesis adicionales para garantizar la forma poliedral de los conjuntos invariantes aislados.

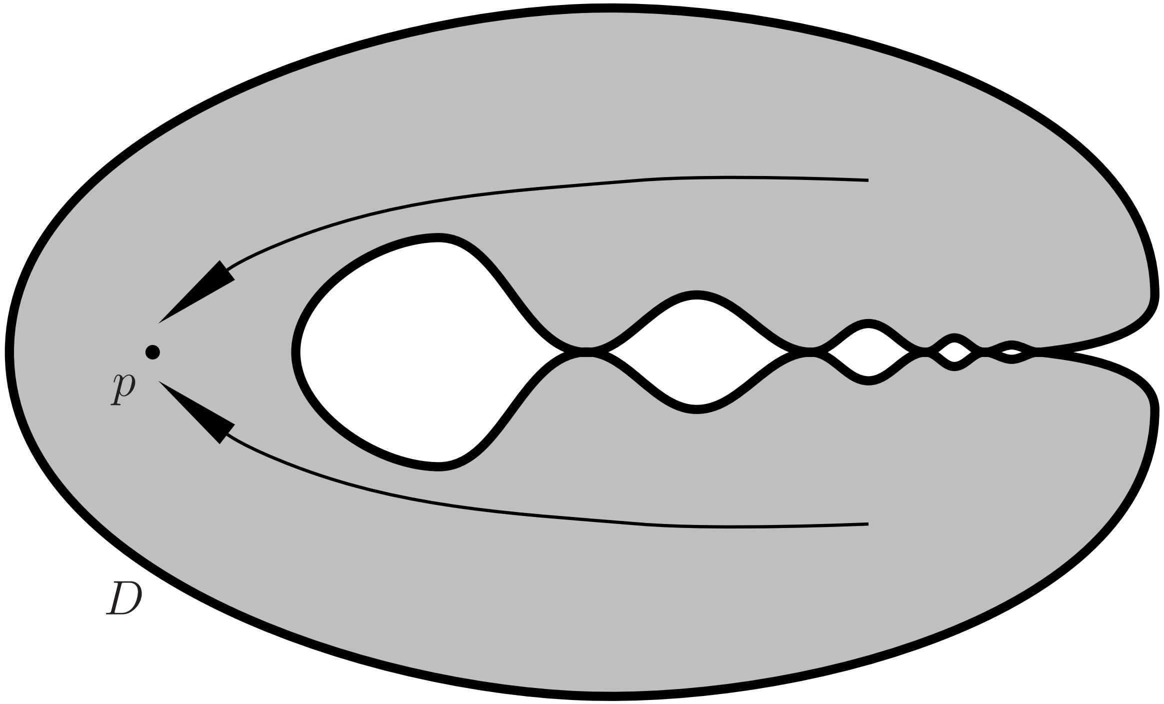
Teorema *Sea K un* **conjunto invariante aislado "non-saddle"** *de un flujo $\varphi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$, donde M es una variedad o, más generalmente, un ANR localmente compacto. Entonces K tiene* **forma poliedral***.*

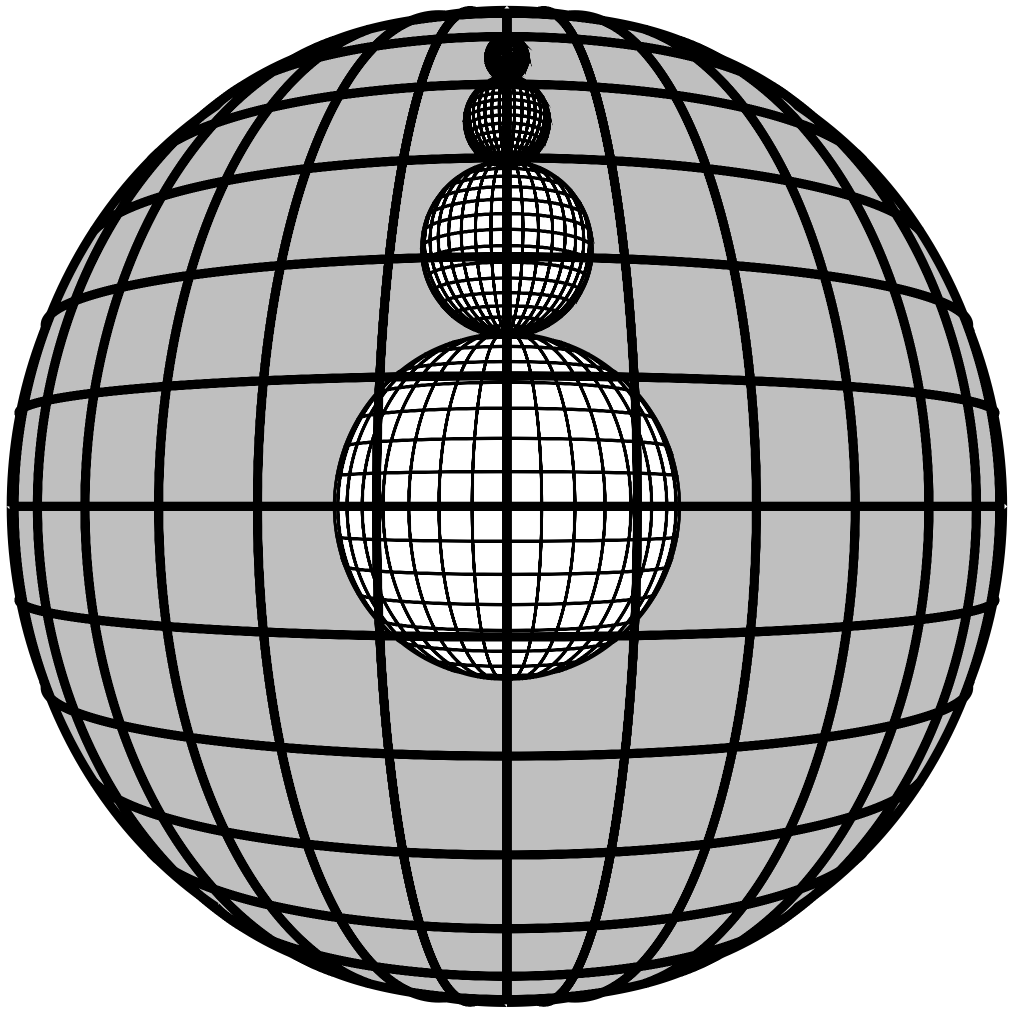
Recíprocamente, si un compacto finito dimensional K tiene la forma de un poliedro entonces puede ser sumergido en una variedad M como conjunto invariante aislado non-saddle de M.

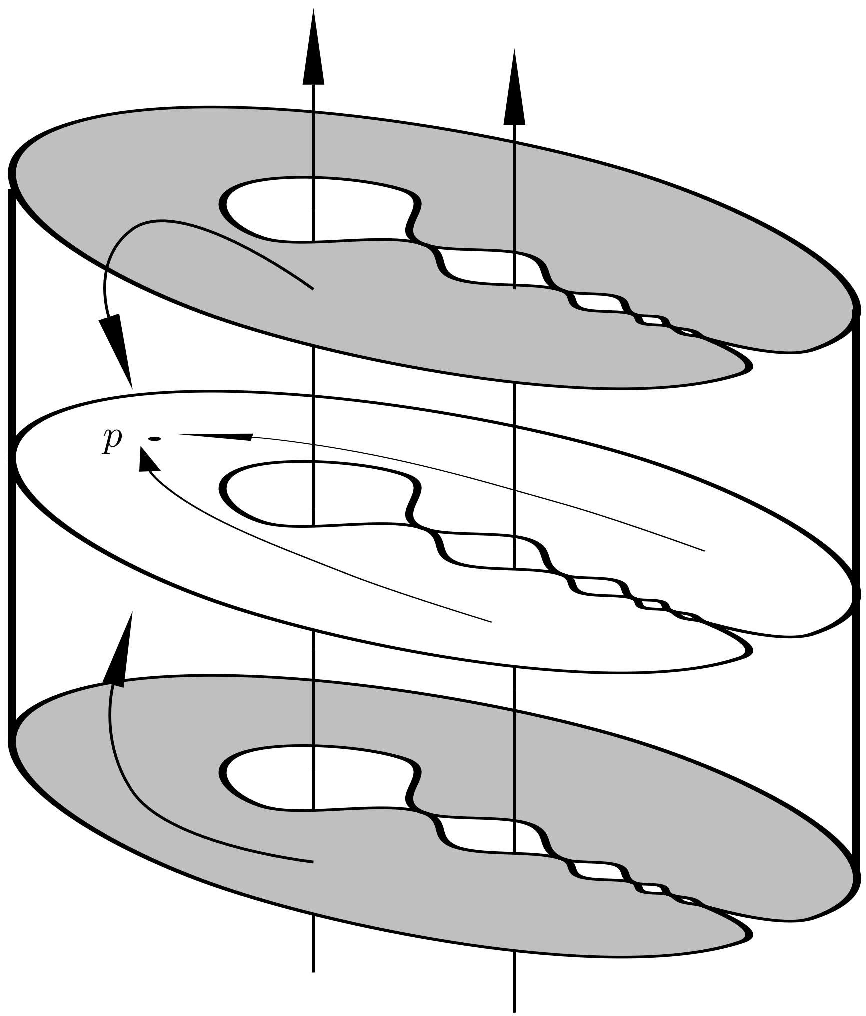
La teoría de la forma proporciona la noción topológica adecuada para formular la **robustez de los atractores**.

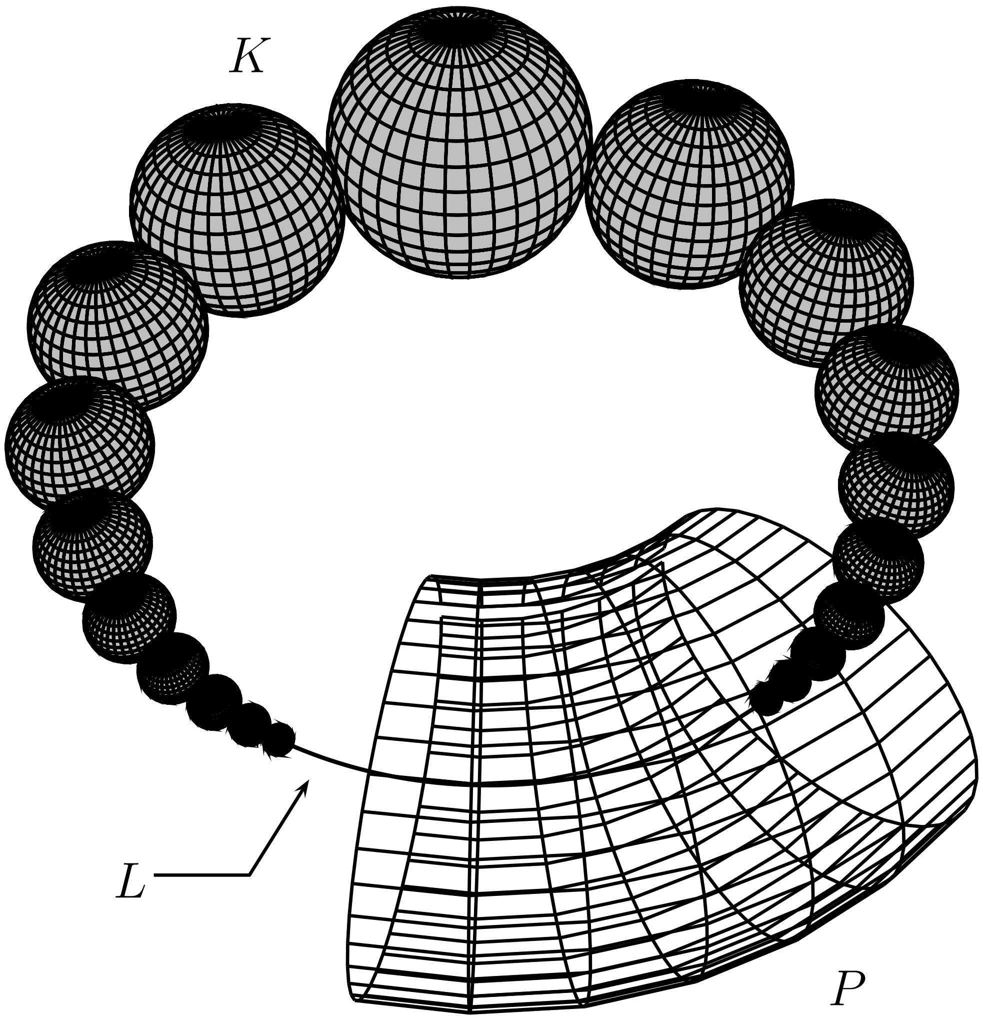
Teorema *Sea* $\varphi_\lambda : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ *una* **familia uniparamétrica de flujos** *en una variedad* M *con* $\lambda \in [0,1]$. *Sea* K_0 *un* **atractor estable** *de* φ_{λ_0} *para* $\lambda_0 \in [0,1]$. *Entonces para todo entorno* U *de* K_0 *en* M **existe** $\varepsilon > 0$ *tal que, para todo* $\lambda \in [\lambda_0 + \varepsilon, \lambda_0 - \varepsilon]$, φ_λ **tiene un atractor estable** K_λ *contenido en* U *con* $Sh(K_\lambda) = Sh(K_0)$.

El teorema anterior pone de manifiesto que **los atractores son robustos**, no sólo en sentido dinámico, sino, también, **en sentido topológico**, pues pequeñas perturbaciones del flujo conservan, además de la propiedad de atracción la forma del atractor.


p
D




p


K
L
P

Teorema *Sea $K \subset M$ un* **atractor** *asintóticamente estable en una variedad y supongamos que el* **borde** $D = \partial \mathcal{A}(K)$ **de su región de atracción es compacto**. *Entonces D* **tiene un número finito de componentes conexas**.

Además, si D **es un compacto invariante aislado** *cuyo* **índice cohomológico de Conley** *1-dimensional satisface $CH^1(D) = 0$ entonces D tiene* **la forma de un poliedro** *y, por tanto, homología y cohomología de Čech finitamente generadas.*

Si el flujo es diferenciable y M es una **variedad compacta orientable** *entonces, con las mismas hipótesis anteriores, existe un* **repulsor** *K' en $M - \overline{\mathcal{A}(K)}$ con región de repulsión $\mathcal{R}(K') = M - \overline{\mathcal{A}(K)}$ tal que el* **número de componentes** *de K' está* **acotado** *superiormente por*

$$rango(CH^{n-1}(D)) + \#(componentes\ de\ D).$$

Los dos siguientes teoremas ilustran situaciones en las que es posible comparar de modo satisfactorio las propiedades topológicas del borde de un entorno positivamente invariante y el borde del atractor.

Teorema *Sea K un* **atractor** *de un flujo en un espacio métrico localmente compacto M y $P \subset \mathcal{A}(K)$ un* **entorno compacto positivamente invariante** *de K. Supongamos que ∂K es un atractor para el flujo restringido a K cuyo* **repulsor dual** *está contenido en una* **espina homotópica** *$L \subset int(K)$ de P. Entonces $Sh(\partial K) = Sh(\partial P)$.*

Teorema *Sea $P \subset \mathcal{A}(K)$ un* **entorno positivamente invariante** *de un* **atractor** *K de un flujo diferenciable definido en una n-variedad orientable M. Supongamos que el borde ∂K es una $(n-1)$-variedad orientable con índice cohomológico $CH^{n-1}(\partial K) = 0$. Entonces ∂K y ∂P son* **homotópicamente equivalentes**.

En la teoría de Conley aparece constantemente la **dualidad atractor-repulsor** en los flujos definidos en espacios compactos. Si estos espacios son variedades y los atractores satisfacen ciertas condiciones topológicas, entonces esta dualidad queda reflejada en la forma de esos conjuntos.

Teorema *Sean K_1 y K_2* **atractores** *de flujos $\varphi_1, \varphi_2 : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$, donde M es una variedad compacta. Supongamos que K_1 y K_2 satisfacen ciertas propiedades topológicas relacionadas con la ILC (condición de los lazos inesenciales). Supongamos, además, que $Sh(K_1) = Sh(K_2)$. Entonces los* **repulsores duales** *tienen también la* **misma forma**.

Un problema interesante es determinar en qué medida la forma del atractor determina la de su repulsor dual.

Borsuk estudió problemas relacionados con la **categoría de Lusternik-Schnirelman** en el contexto de la teoría de la forma. Una de las definiciones más geométricas de categoría de Lusternik-Schnirelman (no son todas equivalentes) es un invariante de la forma del espacio. Utilizando este hecho podemos demostrar el siguiente resultado:

Teorema *Sea K un* **conjunto invariante aislado regular** *de un flujo*

$$\varphi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$$

en una variedad o, más generalmente, en un ANR localmente compacto, y sea $\{M_1, \ldots, M_k\}$ una descomposición de Morse de K. Entonces, la **variedad inestable** *$W^u(K)$ de K en M tiene* **tipo de homotopía compacto** *y su* **coeficiente de Lusternik-Schnirelmann** *satisface la desigualdad*

$$\eta(W^u(K)) \leq \eta(M_1) + ... + \eta(M_k).$$

De la proposición anterior se pueden, extraer varios corolarios, por ejemplo:

Corolario *Sea* $\{A, R\}$ *un* **par atractor-repulsor** *en* K*. Si* $\eta(W^u(K) \neq \eta(W^u(A) + \eta(W^u(B)$*, entonces* **existe una órbita conectando el atractor y el repulsor***.*

Corolario *Si* $\eta(W^u(K) \geq 3$ *y* $\{A, R\}$ *es un par atractor-repulsor en* K*, entonces al menos uno de los dos compactos* A, R *tiene* **tipo de homotopía no trivial***.*

Corolario *Si* K *es un conjunto invariante aislado de un flujo en el plano y* $\eta(W^u(K) = 1$*, entonces el flujo tiene* **un punto fijo** *en* K*.*

El siguiente resultado está dedicado a describir las propiedades topológicas de la **bifurcación de Poincaré-Andronov-Hopf**. Este fenómeno tiene lugar cuando en una familia uniparamétrica de flujos un atractor se transforma en repulsor para un cierto valor del parámetro y, como consecuencia, para valores cercanos del parámetro se crea toda una familia de nuevos atractores que evoluciona en entornos próximos al atractor original. En la situación más simple el atractor es un punto que pasa a ser repulsor y en sus proximidades se crean ciclos atractores. El fenómeno puede ser mucho más general y a continuación describimos una de las posibilidades que se pueden presentar.

Teorema *Sea* $\varphi_\lambda : W \times \mathbb{R} \longrightarrow W$ *una familia uniparamétrica de sistemas dinámicos diferenciables definidos una* n*-variedad orientable* W *(con* $\lambda \in I$*). Sea* S **una órbita periódica que es un atractor** *de* φ_0*. Si* S *es* **un repulsor** *de* φ_λ *para* $\lambda > 0$ *entonces para todo entorno compacto* V *de* S *contenido en la región de atracción de* S *para el flujo* φ_0*, existe un* λ_0 *tal que para todo* λ*, con* $0 < \lambda \leq \lambda_0$*,* **existe un atractor** K_λ *de* φ_λ **con la forma** *(y por tanto con la homología y cohomología de Čech)* **de** $\mathbf{T} = \mathbf{S^{n-2}} \times \mathbf{S^1}$*. Además los atractores* K_λ *están contenidos en* $V - S$ *y atraen todos los puntos de* $V - S$*.*

Las **ecuaciones de Morse de una descomposición de Morse** $\{M_1, \ldots, M_k\}$ de un conjunto invariante aislado K se obtienen a partir de una filtración $N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_n$ de espacios métricos compactos, donde (N_j, N_{j-1}) es un par-índice del conjunto de Morse M_j. Los grupos de cohomología de Čech $\check{H}^k(N_j, N_{j-1})$ son los llamados **índices cohomológicos del conjunto de Morse** M_j y $\check{H}^k(N_n, N_0)$ es el índice cohomológico de K. Si estos grupos de cohomología tienen rango finito y se anulan por encima de una determinada dimensión, la notación $p(t, h(K))$ se utiliza para denotar al polinomio $\sum \mathrm{rg}(\check{H}^k(N_n, N_0))t^k$, y análogamente para los restantes pares índice de los conjuntos de Morse M_j. Las ecuaciones de Morse son:

$$\sum_{i=1}^{n} p(t, h(M_i)) = p(t, h(K)) + (1+t)Q(t),$$

donde $Q(t)$ es cierto polinomio de coeficientes enteros no negativos. La notación $h(K)$, $h(M_i)$ hace referencia al índice homotópico de Conley. De hecho, el índice cohomológico está determinado por el índice homotópico. Las ecuaciones de Morse se obtienen de modo automático a partir de la filtración.

La determinación de la filtración es, en general un problema difícil, que suele ser el mayor obstáculo para el cálculo de las ecuaciones. Utilizando el llamado "índice shape", introducido por Robbin y Salamon, hemos podido simplificar considerablemente este problema.

Teorema *Sea K un* **conjunto invariante aislado** *de un flujo φ en un espacio métrico localmente compacto y sea $\{M_1, ..., M_n\}$ una* **descomposición de Morse** *de K con sucesión de atractores asociada $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n = K$. Consideremos la* **filtración de variedades inestables truncadas** *de estos atractores*

$$\partial W^* \subset W_1^* \cup \partial W^* \subset ... \subset W_n^* = W^*$$

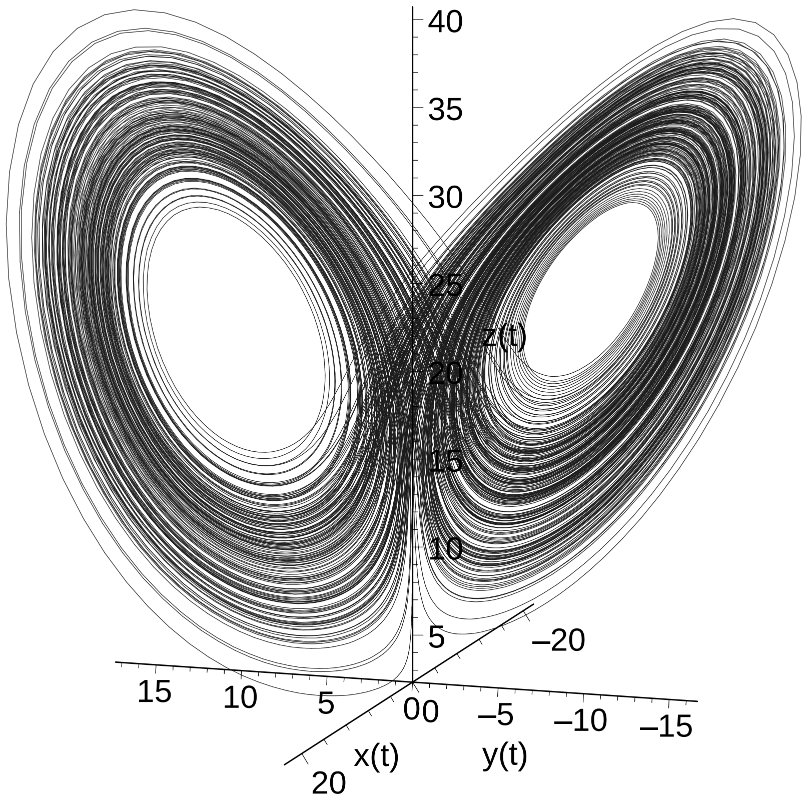
provistas de su topología intrínseca, y supongamos que los grupos de cohomología de Čech $\check{H}^q(W_j^* \cup \partial W^*, \partial W^*)$ y $\check{H}^q(W_j^* \cup \partial W^*, W_{j-1}^* \cup \partial W^*)$ son de rango finito. Entonces las **ecuaciones de Morse** *se pueden obtener a partir de esta filtración. La condición de finitud del rango se satisface automáticamente si φ es un flujo de clase C^1 en una variedad diferenciable o si φ es un flujo continuo en un ANR localmente compacto y K es un atractor global.*

Un ejemplo interesante al que aplicar este tipo de ideas es el **atractor de Lorenz**. Las ecuaciones de Lorenz

$$\begin{cases} dx/dt = \sigma(y - x) \\ dy/dt = rx - y - xz \\ dz/dt = xy - bz \end{cases}$$

proporcionan ejemplos interesante de descomposiciones de Morse para ciertos valores de los parámetros. Los valores más estudiados son $\sigma = 10$ y $b = 8/3$. Lorenz demostró que para todos los valores de de r existe un elipsoide en $\mathbb{R}^3$ en el que entran todas las órbitas. Esto implica que dentro de este elipsoide hay un atractor global, E_∞, en el que tiene lugar toda la dinámica relevante. Para el valor $r_H \approx 24.74$ tiene lugar una **bifurcación de Hopf** en la que dos puntos fijos atractivos pasan a ser repulsores. Esto significa que inmediatamente antes de la bifurcación tenemos una descomposición de Morse de E_∞ consistente en el atractor de Lorenz, L, los dos puntos críticos, $\{C_1\}$ y $\{C_2\}$, que son atractores, y dos ciclos γ_1 y γ_2 alrededor y muy cerca de ellos, que son repulsores.

El **atractor de Lorenz** para $r = 24.7$ (antes de la bifurcación):



Esta descomposición se altera fundamentalmente despues de la bifurcación, pues los ciclos acaban siendo absorbidos por los puntos críticos y a partir de ese momento los puntos críticos son repulsores en E_∞.

Si observamos lo que sucede antes de la bifurcación dentro del elipsoide al que tienden todas las trayectorias (situación descrita por Sparrow) podemos determinar la forma del atractor de Lorenz y su índice "shape", que resulta ser $Sh(S^1 \vee S^1 \vee \{*\}, *)$. Los ciclos γ_1 y γ_2 pueden ser agrupados y juntos forman el repulsor $\gamma_1 \cup \gamma_2$ de la descomposición de Morse. Si observamos la variedad inestable cerca de estos ciclos podemos calcular el índice "shape" del repulsor, que es $Sh(S^2 \vee S^2 \vee S^1 \vee S^1, *)$. El índice "shape" de los puntos críticos es trivial y el de E_∞, teniendo en cuenta que es un atractor global, también. Lo anterior nos permite obtener todos los elementos de las ecuaciones de Morse excepto el polinomio $Q(t)$, y este polinomio se podría entonces calcular a partir de las ecuaciones, aunque en este caso también se puede calcular por argumentos topológicos. En cualquier caso, las ecuaciones de Morse de la descomposición $M_1 = L$, $M_2 = \{C_1\} \cup \{C_2\}$, $M_3 = \gamma_1 \cup \gamma_2$ de E_∞ resultan ser

$$1 + 2t + 2 + 2t + 2t^2 = 1 + (1 + t)(2 + 2t).$$

Las ecuaciones son más simples despues de superar el valor crítico de la bifurcación (los ciclos repulsores han desaparecido).