

Invariantes globales de aplicaciones de superficies en el plano

Maria del Carmen Romero Fuster

Universitat de València

Trabajo en colaboración con

Derek Hacon (PUC-Rio, Brasil)

Catarina Mendes (UFV, Brasil)

Esquema

- Invariantes de Vassiliev.
- Invariantes topológicos globales: grafos con pesos.
- **PROBLEMA 1:** ¿Qué grafos provienen de aplicaciones estables?
- Técnica básica: Cirugías de aplicaciones y de grafos.
- **PROBLEMA 2:** ¿Qué grafos provienen de aplicaciones estables sin cúspides?
- Estudio de los contornos aparentes de las aplicaciones estables sin cúspides.

Aplicaciones estables

Decimos dos aplicaciones $f, g : M \rightarrow N$ son **\mathcal{A} -equivalentes** si existen difeomorfismos

$$l : M \rightarrow M \quad \text{y} \quad k : N \rightarrow N,$$

tales que

$$kf = gl.$$

Se dice que $f \in C^\infty(M, M)$ es **\mathcal{A} -estable** si existe algún entorno V_f de f en la topología C^∞ de Whitney, tal que $\forall g \in V_f$, g es \mathcal{A} -equivalente a f .

Denotamos por $\mathcal{E}(M, N)$ el subespacio de las aplicaciones \mathcal{A} -estables en $C^\infty(M, M)$.

Isotopías estables

Dos aplicaciones C^∞ , $f, g : M \rightarrow N$ son establemente isotópicas si existe una aplicación C^∞ (**isotopía estable**),

$$F : M \times I\!\!R \rightarrow N$$

tal que

- 1) $F_t : M \rightarrow N$ es \mathcal{A} -estable para todo $t \in I\!\!R$,
- 2) $F_0 = f$,
- 3) $F_1 = g$.

Equivalentemente: f y g son establemente isotópicas si están en la misma arcocomponente del subespacio $\mathcal{E}(M, N)$.

Invariantes de isotopía estable

Sea R un anillo unitario comutativo. Un **invariante de isotopía estable con valores en R** es una función

$$V : \mathcal{E}(M, N) \rightarrow R$$

tal que si f y g son establemente isotópicas, entonces

$$V(f) = V(g).$$

El conjunto de los invariantes de isotopía estable en $\mathcal{E}(M, N)$ con valores en el anillo R viene dado por el R -módulo

$$H^0(\mathcal{E}(M, N)), R)$$

Invariantes de Vassiliev

V. A. Vassiliev ha desarrollado una teoría general que conduce a la obtención de invariantes de isotopía en los espacios de aplicaciones estables: *Complements of discriminants of smooth maps: topology and applications*. AMS, Providence, 1992.

Las técnicas de Vassiliev se basan en el análisis de las estratificaciones del conjunto discriminante en cada caso,

$$\Delta = C^\infty(M, N) - \mathcal{E}(M, N).$$

En primer lugar se determina y se estudia la estructura de los estratos de codimensión uno y dos. En particular, las relaciones de incidencia entre los mismos.

Invariantes de Vassiliev de primer orden

Se co-orienta los estratos de codimensión 1 y se asigna índices de transición (elementos del anillo R).

Una familia de índices sobre el conjunto de los estratos de codimensión 1 del discriminante determina un **cociclo de Vassiliev de orden uno** si satisfacen la siguiente

Condición de compatibilidad:

Dado un camino cerrado alrededor de cualquier estrato S de codimensión 2, la suma de los índices correspondientes a las transiciones del camino por los diferentes estratos co-orientados de codimensión 1 que inciden en S es cero.

Valor de un invariante de primer orden sobre una aplicación dada

- 1.- Dada $f \in \mathcal{E}(M, N)$ se parte de una aplicación "distinguida", f_0 , sobre la arcocomponente de f en $C^\infty(M, N)$ y se le asocia un valor, por ej. $0 \in R$.
- 2.- Se toma un camino genérico γ (esto es, transversal a todos los estratos de Δ) que une f con f_0 .
- 3.- El valor del invariante sobre f viene dado por la suma de los índices correspondientes a las transiciones de γ a través de los estratos de codimensión uno en Δ , con signo positivo siempre que la orientación del camino coincide con la co-orientación del estrato y negativo en caso contrario.

La condición de compatibilidad garantiza que el resultado es independiente del camino genérico escogido.

Aplicaciones de la Teoría de Vassiliev

Aplicaciones estables de S^1 en \mathbb{R}^3 (nudos): V. Vassiliev, *Cohomology of knot spaces, Advances in Soviet Math.* 1 (1990) 23-69.

Aplicaciones estables de S^1 en \mathbb{R}^2 : V. I. Arnol'd, *Topological Invariants of Plane Curves and caustics. University lecture series, Vol. 5, AMS, Providence* 1994.

Aplicaciones estables de superficies en \mathbb{R}^3 : V. Goryunov, *Local invariants of mappings of surfaces into three-space, The Arnol'd-Gelfand mathematical seminars 223-255. Birkhauser, Boston* (1997).

Aplicaciones estables de superficies en \mathbb{R}^2 : F. Aicardi and T. Ohmoto , *First order local invariants of apparent contours. Topology* (2006).

Aplicaciones estables de 3-variedades en \mathbb{R}^3 : Estudio en proyecto (Raul Oset).

Aplicaciones estables de superficies en el plano

Teorema de Whitney \Rightarrow *Las singularidades estables de las aplicaciones de una superficie en el plano son los pliegues y las cuspides, con codimensiones respectivas uno y dos.*

Notación:

1) $\Sigma f =$ Conjunto singular de $f : M \rightarrow I\!\!R^2$

2) $f(\Sigma f) =$ Contorno aparente de f .

Conjunto singular y contorno aparente

Si f es una aplicación estable:

- a) *El conjunto singular, Σf , es una curva simple regular con (posiblemente) varias componentes conexas.*
- b) *El contorno aparente, $f(\Sigma f)$, es una curva plana con singularidades correspondientes a las cúspides de f , e intersecciones transversas.*

Si M es una superficie compacta y sin frontera, todas estas curvas son cerradas y tanto el número de cúspides como el de intersecciones (transversas) entre las curvas del contorno aparente es finito.

Invariantes de aplicaciones estables

Si $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ son \mathcal{A} -equivalentes:

- a) las curvas Σf y Σg son \mathcal{A} -equivalentes en M ,
- b) las curvas $f(\Sigma f)$ y $g(\Sigma g)$ son \mathcal{A} -equivalentes en \mathbb{R}^2 .

Si M es simplemente conexa: \mathcal{A} -invariantes \equiv invariantes de isotopía estable.

En general, si f y g son establemente isotópicas, entonces son \mathcal{A} -equivalentes.

Por lo tanto, los \mathcal{A} -invariantes son invariantes de isotopía estable.

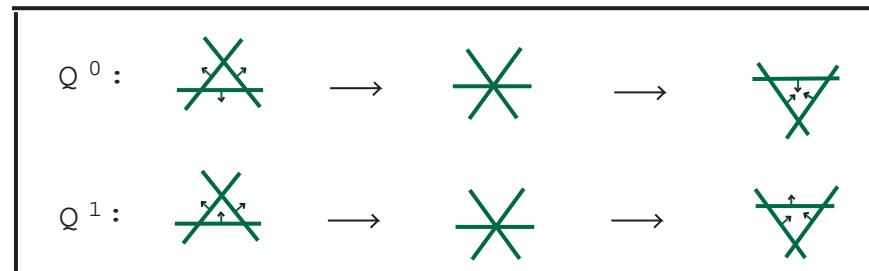
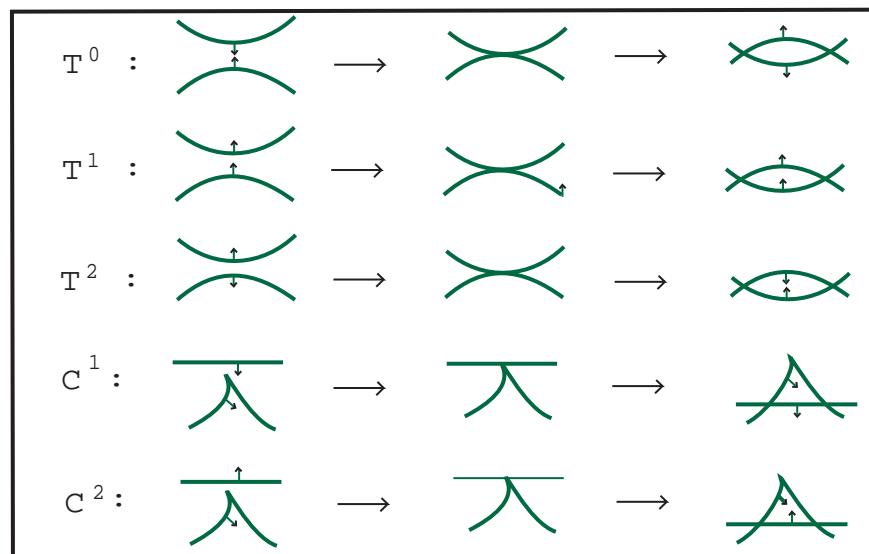
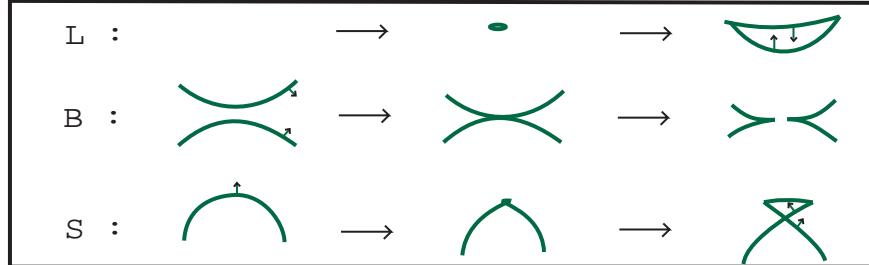
Invariantes de Aicardi-Ohmoto

F. Aicardi y T. Ohmoto han encontrado un conjunto completo de generadores para el anillo de los invariantes locales tipo Vassiliev de primer orden: I_C , I_D y I_F .

Estos generadores están definidos en términos de las transiciones de codimensión 1 en el conjunto de ramificación.

Las transiciones locales y multilocales de codimensión 1 para las aplicaciones estables de una superficie en el plano han sido descritas por E. Chíncaro (1978) y están ilustradas en la siguiente figura.

Transiciones de codimensión 1



Invariantes de Aicardi-Ohmoto

Utilizando estas transiciones Aicardi y Ohmoto prueban:

Teorema

El grupo abeliano consistente en todos los invariantes locales de orden uno de tipo Vassiliev para las aplicaciones estables en $C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$ está libremente generado (módulo funciones constantes) por los tres elementos siguientes:

$$\Delta I_D = 2(\Delta T^0 + \Delta T^1 + \Delta T^2) + 2(\Delta C^1 + \Delta C^2) + \Delta S,$$

$$\Delta I_C = 2(\Delta B + \Delta L + \Delta S),$$

$$\Delta I_F = 2(\Delta T^0 + \Delta T^2) + \Delta C^1 + \Delta C^2.$$

Observaciones

ΔI_D = variación en el número de puntos dobles del contorno aparente al recorrer un camino genérico desde la aplicación base a la aplicación considerada.

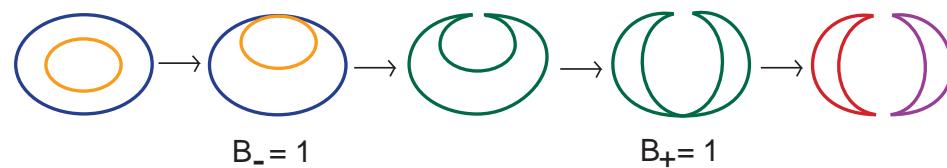
ΔI_C = variación en el número de cúspides en el contorno aparente al recorrer un camino genérico desde la aplicación base a la aplicación considerada.

Es evidente que los números I_D e I_C son invariantes de \mathcal{A} -equivalencia para las aplicaciones estables de $C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$.

El invariantes I_μ

Un **invariante global**, independiente de los generadores de Ohmoto, es el número total de arcocomponentes del conjunto singular: I_μ .

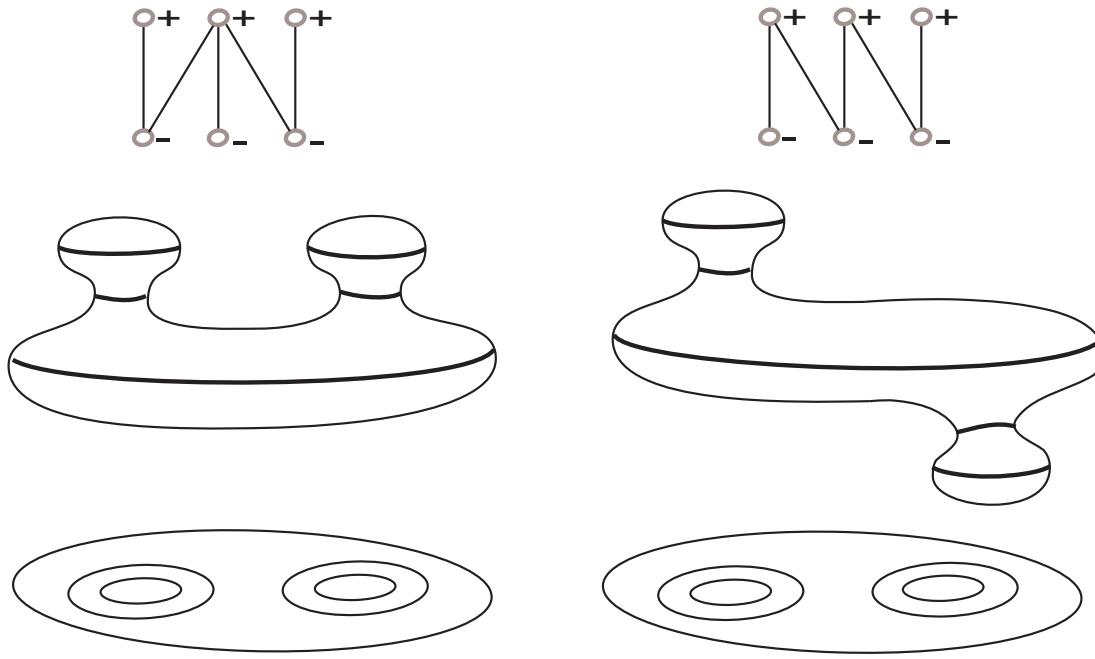
Observemos que la transición B altera I_C e I_μ a la vez. Denotamos por B_+ (B^-) la B -transición que conduce al nacimiento de un par de cúspides que aumenta (disminuye) el número de arcocomponentes de Σf .



Se verifica : $\Delta I_\mu = \Delta B_+ - \Delta B_- + \Delta L$.

Contornos aparentes

Observamos que los invariantes de Ohmoto-Aicardi nos proporcionan informaciones sobre el contorno aparente, pero no son suficientes, tal como podemos ver en el siguiente ejemplo.



Grafo de una aplicación estable

El tipo topológico del complemento de Σf en M es un invariante de isotopía.

Podemos codificar la información que nos proporciona dicho invariante en un grafo con pesos.

Si M es cerrada, el conjunto singular Σf determina una colección finita de curvas cerradas en M .

Su complemento es una unión disjunta de superficies abiertas. La frontera de cada una de estas regiones está formada por una subcolección de Σf .

Grafo dual de una colección de curvas

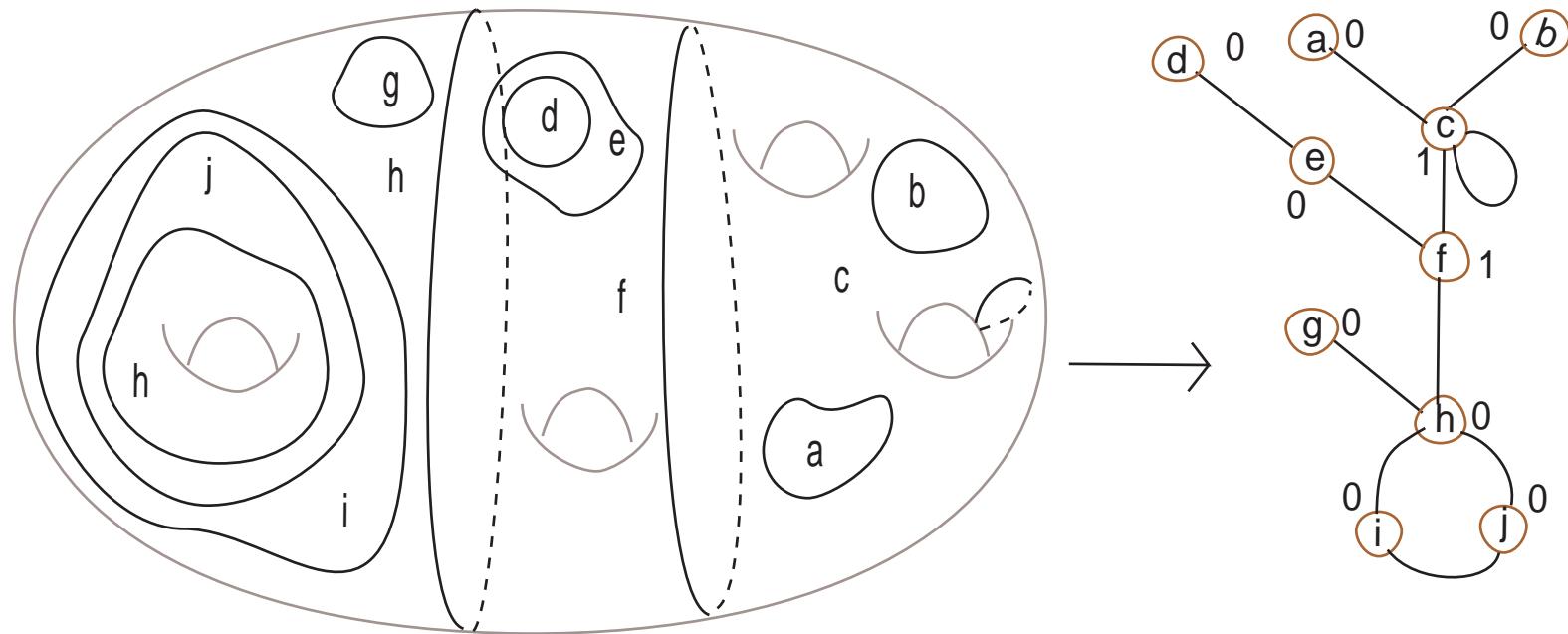
Sea \mathcal{C} una colección finita de curvas cerradas en una superficie M . Asociamos un grafo a \mathcal{C} de la siguiente forma:

Cada arcocomponente de $M - \mathcal{C}$ determina un vértice y cada curva de \mathcal{C} una arista.

Un vértice v y una arista a son incidentes si y solo si la curva representada por a está en la frontera de la región representada por v .

A cada vértice v se le asigna como peso (entero) el género $g(v)$ de la región de $M - \mathcal{C}$ representada por v .

Ejemplo de grafo dual



Realización de grafos I

Teorema *Todo grafo con pesos es isomorfo al grafo asociado a alguna colección finita \mathcal{C} de curvas cerradas en alguna superficie M . El par (M, \mathcal{C}) es único salvo \mathcal{A} -equivalencia. El género de la superficie M viene dado por*

$$g(M) = \beta_1(\mathcal{G}(M, \mathcal{C})) + \sum g(v),$$

entrando en esta suma los pesos de todos los vértices de $\mathcal{G}(M, \mathcal{C})$.

Corolario *Dado un par (M, \mathcal{C}) , se tiene que M es una esfera si y solo si el grafo $\mathcal{G}(M, \mathcal{C})$ es un árbol con peso nulo en cada uno de sus vértices.*

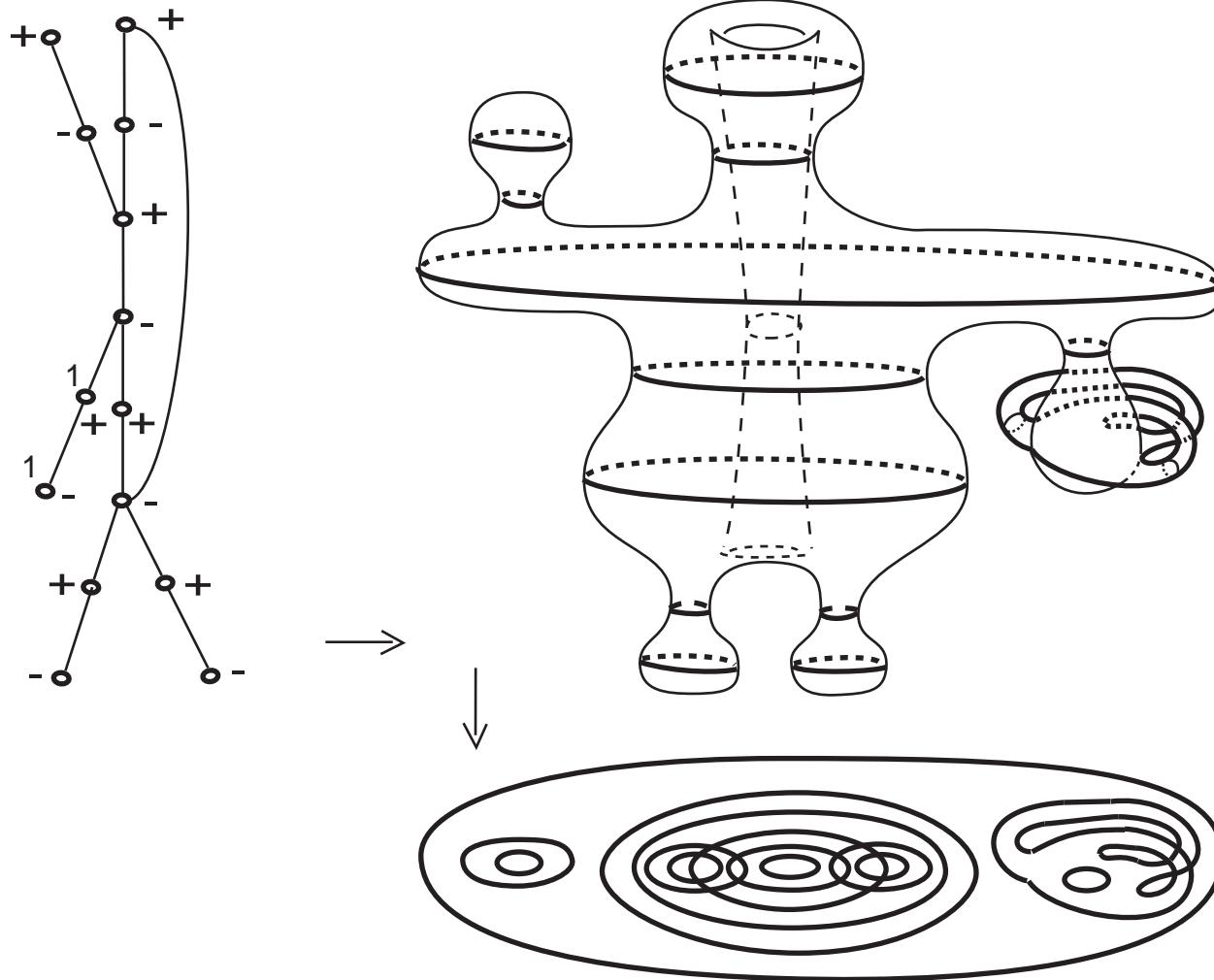
Grafo de una aplicación estable

Dada una aplicación estable $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$, el grafo $\mathcal{G}(f)$ es el **grafo dual** de Σf en M .

Los grafos de aplicaciones estables son \mathcal{A} -invariantes.

El invariante I_μ sobre una aplicación f coincide con el número de aristas del grafo asociado a f .

Ejemplo de grafo de una aplicación estable

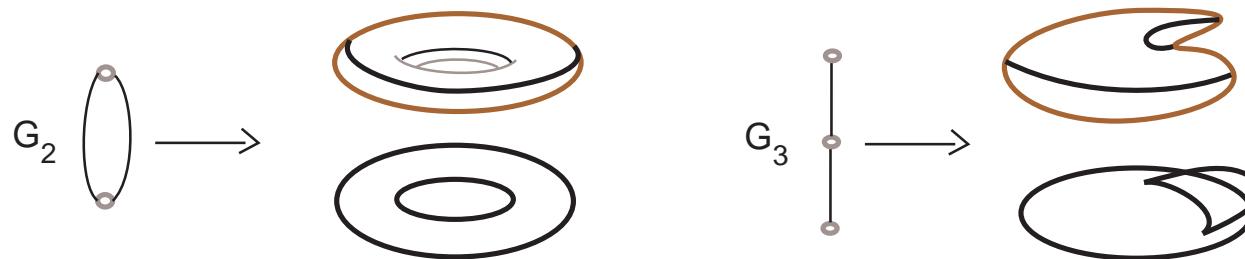


Preguntas básicas

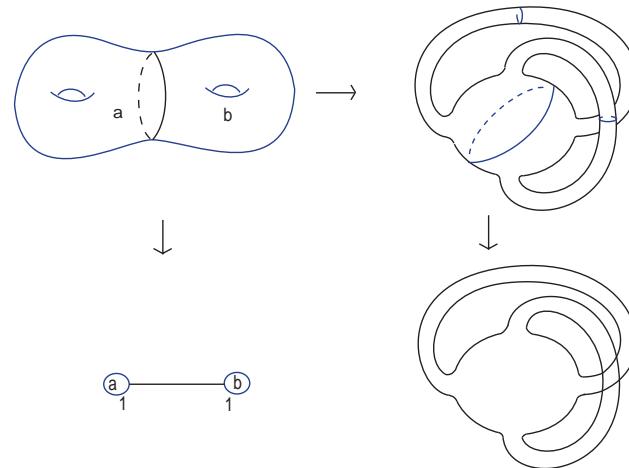
- 1) *¿Qué grafos pueden ser obtenidos a partir de aplicaciones estables de superficies compactas en el plano?*
- 2) *Dado un grafo realizable ¿Cuales son las diferentes \mathcal{A} -clases de aplicaciones estables que lo comparten?*
- 3) *¿Cuales son todos los grafos que pueden corresponder a un mismo contorno aparente?*
- 4) *¿Qué grafos provienen de aplicaciones estables sin cúspides?*
- 5) *Hasta qué punto el par (grafo, contorno aparente) caracteriza la \mathcal{A} -clase de una aplicación estable?*

Ejemplos de grafos realizables

1) Aplicaciones estables del toro y la esfera en el plano con grafos de pesos nulos:

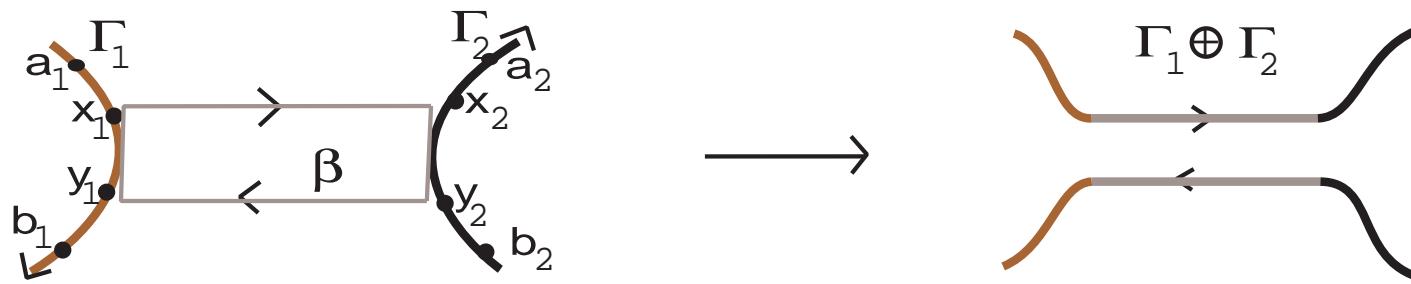


2) Aplicación estable del bitoro en el plano con grafo de pesos no nulos:



Suma de curvas planas

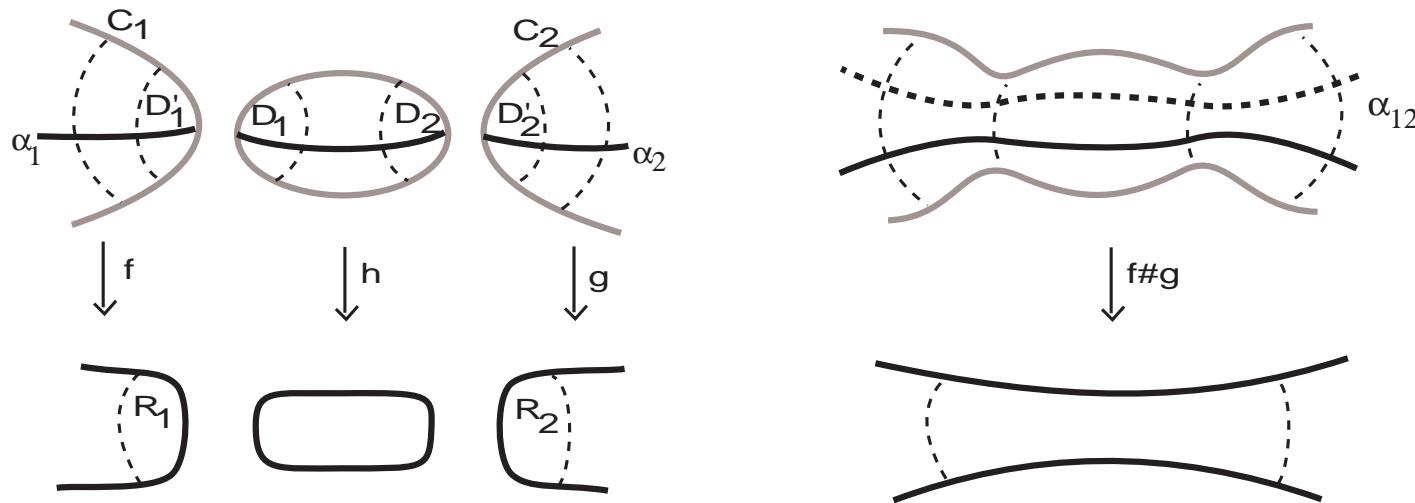
Se introduce el concepto de **puente** entre dos arcos de curvas planas Γ_1 y Γ_2 y **curva suma** $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$, tal como se ilustra en la siguiente figura:



Puente entre dos arcos de curva

Suma horizontal de aplicaciones de superficies en el plano

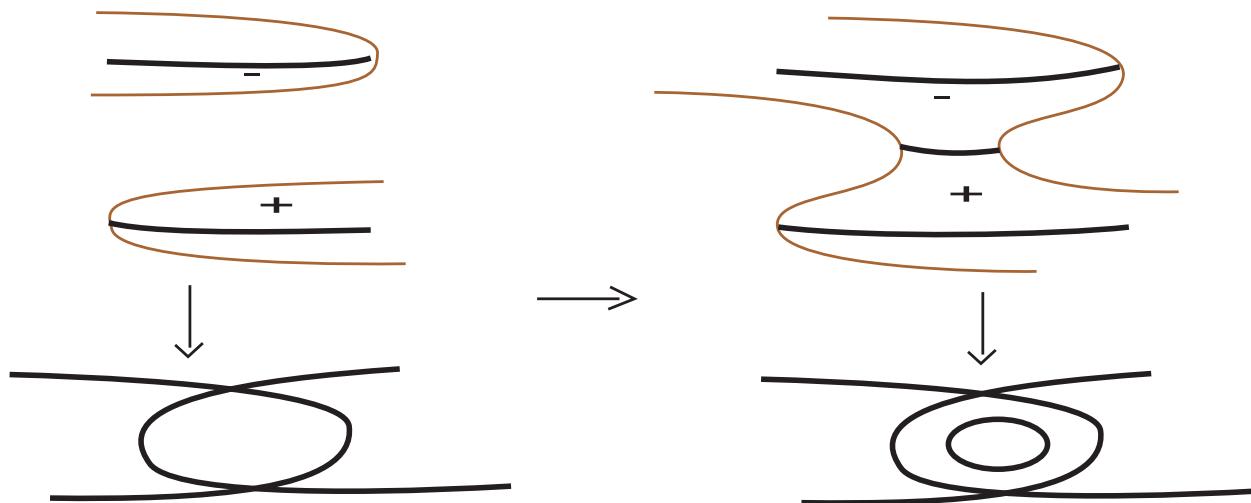
“Levantando” un puente, adecuadamente colocado, entre las conjuntos de ramificación de dos aplicaciones podemos sumarlas siguiendo el esquema indicado abajo:



Suma de aplicaciones

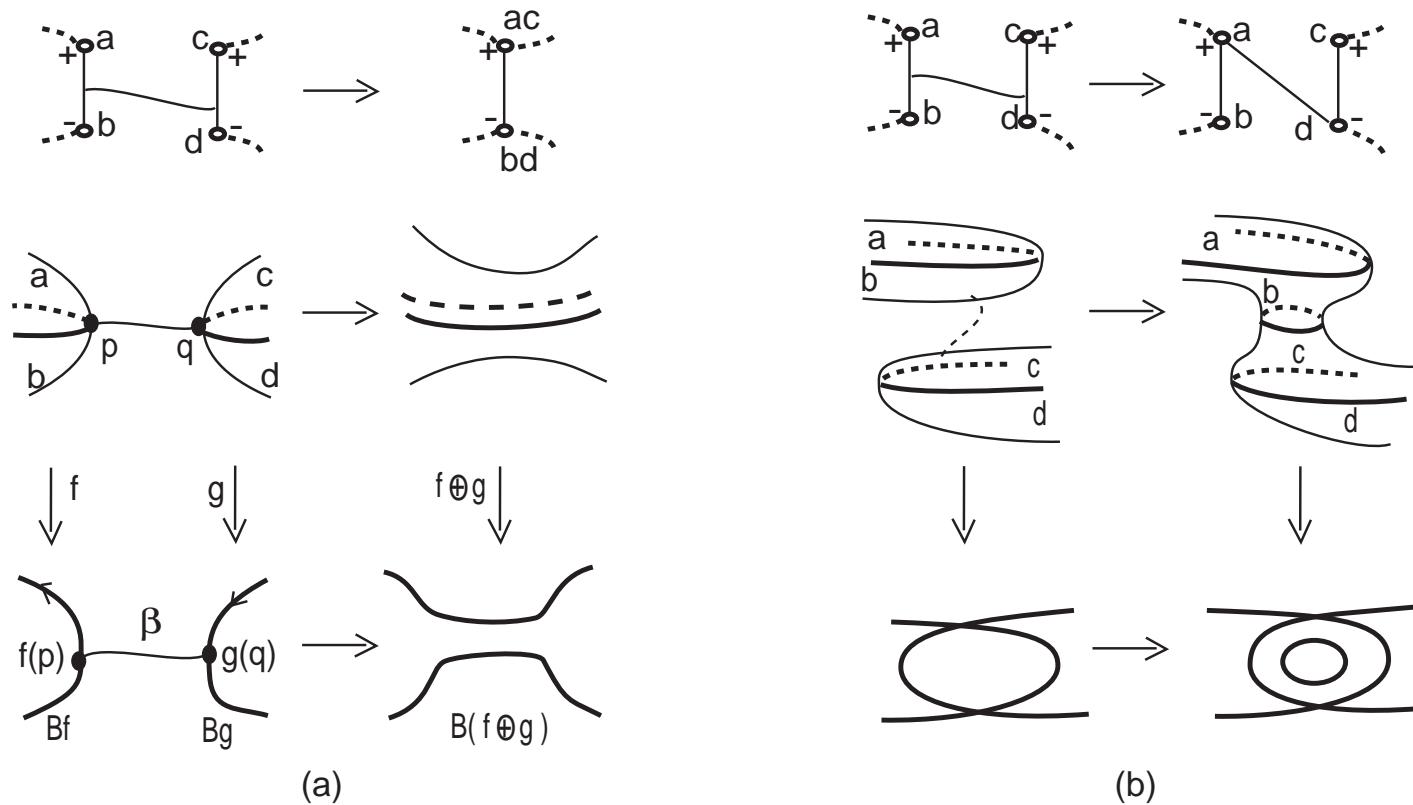
Suma vertical de aplicaciones de superficies en el plano

Otra posible suma se obtiene a base de identificar dos discos cuyas imágenes sobre el plano coincidan, tal como se muestra en la figura:



Sumas y grafos

Aquí vemos como las cirugías anteriores afectan a los grafos.



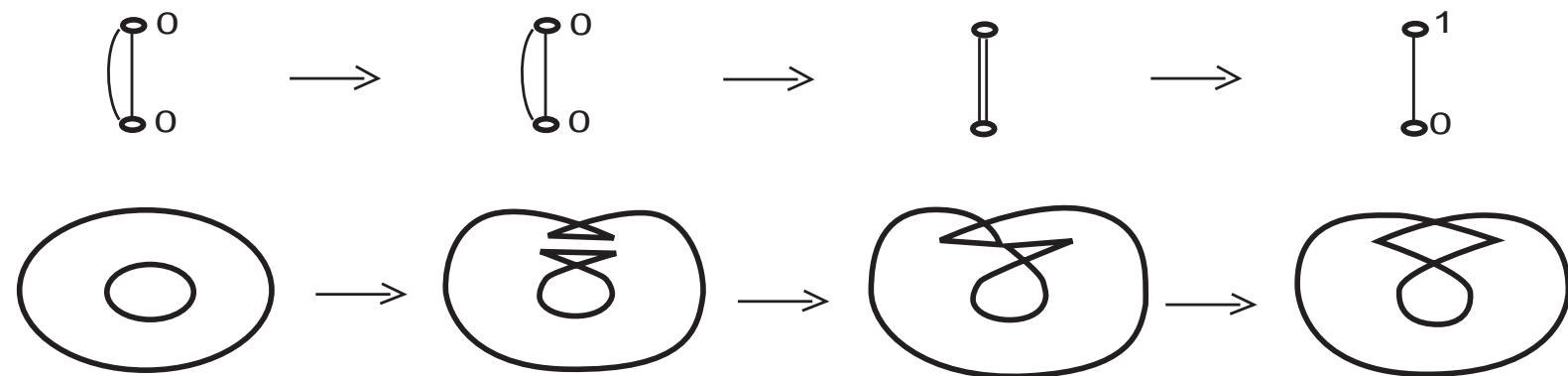
Cirugías: (a) horizontal, (b) vertical

Aplicación estable con dos cúspides del toro en el plano

Consideramos una proyección estándar del toro e el plano.

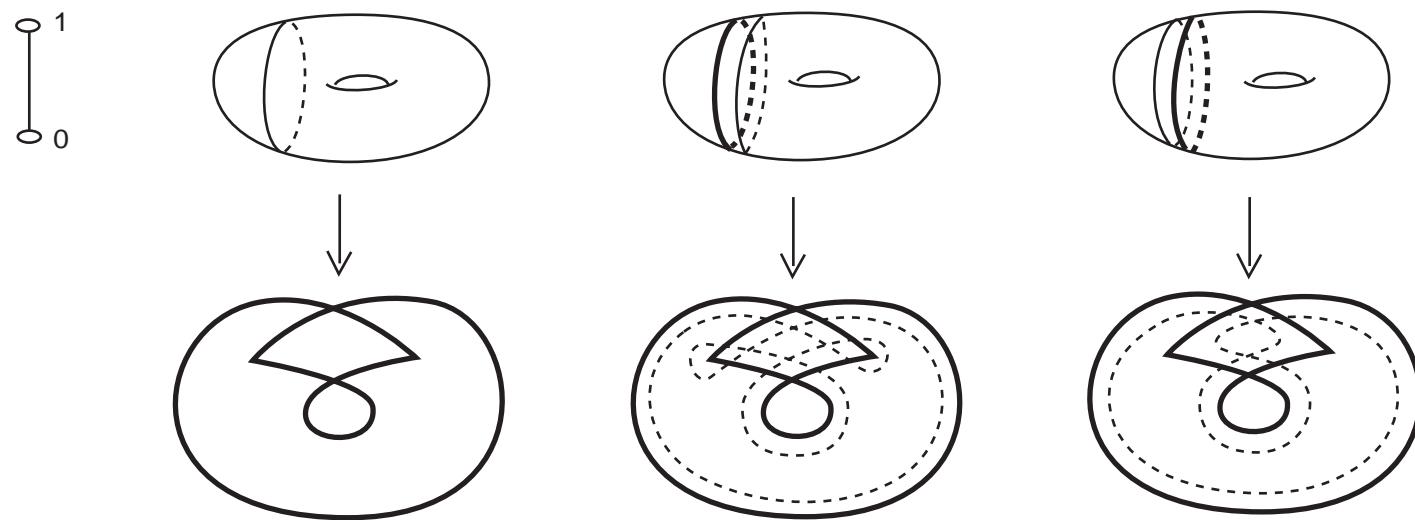
Introducimos dos "colas de golondrina" en las dos curvas singulares (por medio de transiciones de tipo S).

Seguidamente se cancelan dos de las cúspides por medio de dos transiciones de tipo L .



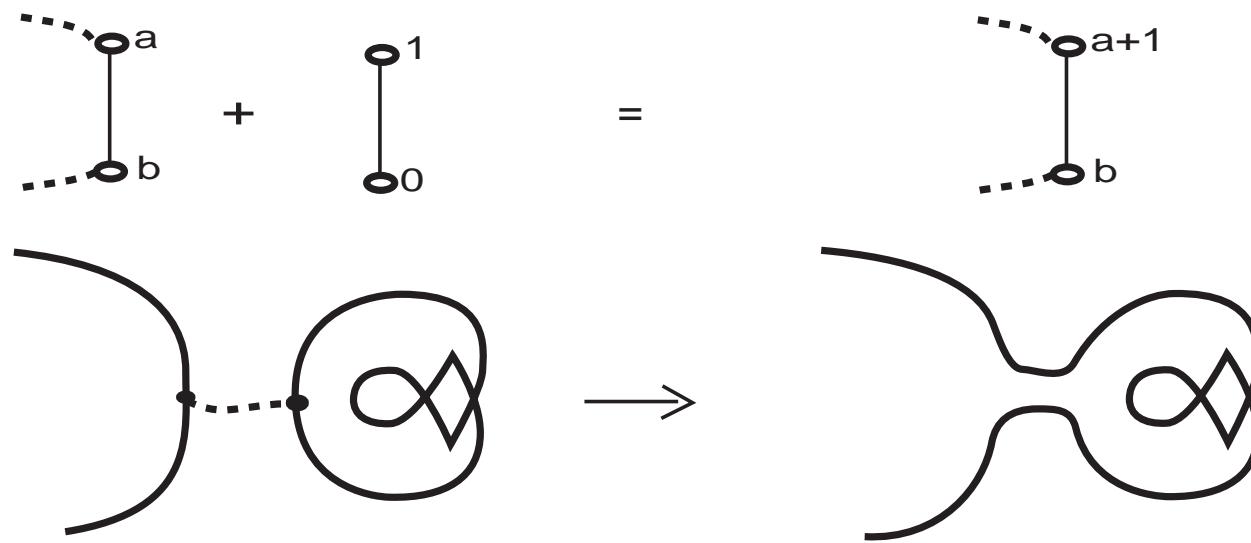
Aplicación estable con dos cúspides

Esta cirugía da lugar a una curva singular homotópicamente trivial, que separa un disco de una región de género 1 tal como se ilustra en la siguiente figura.



Cirugía con dos cúspides

La suma horizontal de la aplicación estable con dos cúspides del toro en el plano con cualquier otra aplicación aumenta el género de una de las regiones inmersas, introduciendo además dos cúspides en esta última.



Las sucesivas sumas horizontales de la aplicación del toro con dos cúspides con otra aplicación estable f permite obtener una nueva aplicación estable con el mismo grafo que f , pero con pesos arbitrarios en los vértices.

Realización de grafos tipo árbol

Teorema 1: *Un grafo \mathcal{G} es el grafo de alguna aplicación estable de la 2-esfera en el plano si y solo si \mathcal{G} es un árbol con pesos nulos en todos sus vértices.*

*Un grafo es **bipartito** si todos sus vértices pueden ser etiquetados con \pm de manera que los dos vértices de cada arista tengan signos opuestos.*

Todo árbol es bipartito.

Realización de grafos

Teorema de Realización de grafos

a) Cualquier grafo finito (con pesos arbitrarios en sus vértices) es grafo de alguna aplicación estable de alguna superficie cerrada M en el plano si y solo si es bipartito y

$$\chi(M) = 2\chi(\mathcal{G}).$$

b) Un grafo \mathcal{G} es el grafo de alguna aplicación estable de alguna superficie cerrada orientable M en el plano si y solo si es bipartito.

La demostración se realiza por inducción, partiendo de un árbol maximal incluido en el grafo e introduciendo algunas de las cirugías anteriores.

Submersiones con pliegues

Una clase importante de aplicaciones estables de superficies en el plano está constituida por aquellas que no tienen cúspides, conocidas como submersiones con pliegues.

Los contornos aparentes de las aplicaciones estables sin cúspides son curvas planas regulares cerradas.

Estas curvas pueden ser vistas como imágenes de la frontera de superficies inmersas en el plano.

Contornos aparentes de submersiones con pliegues

Proposición: Si Γ es el contorno aparente de una aplicación estable sin cúspides, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$, entonces

$$\chi(M) = 2i_W(\Gamma),$$

siendo $i_W(\Gamma)$ el índice de Whitney de la curva Γ .

Corolario 1: Una colección de curvas orientadas cerradas cuyo índice de Whitney es mayor que 1 no puede ser conjunto de ramificación de ninguna aplicación estable.

Corolario 3: El número de puntos dobles del conjunto de ramificación de cualquier aplicación estable sin cúspides cuyo grafo tiene peso nulo es par.

Grafos equilibrados

Dado un grafo bipartito \mathcal{G} , denotemos:

- V_+ y V_- = números de vértices con etiquetas positivas y negativas respectivamente,
- g_+ y g_- = sumas de los pesos de los vértices con etiquetas positivas y negativas respectivamente.

Decimos que el grafo \mathcal{G} es **equilibrado** si se verifica:

$$V_+ - V_- = g_+ - g_-.$$

En el caso de grafos con pesos nulos, la condición de equilibrio pasa a ser:

$$V^+ = V^-.$$

Árboles equilibrados

Lema: *Un árbol con pesos es equilibrado si y solo si es posible asignar índices enteros a sus aristas, de manera que la suma de los índices de todas las aristas incidentes a cada uno de los vértices sea igual a $2 - 2p(v)$, siendo $p(v)$ el peso de dicho vértice.*

Si exigimos que todos estos índices sean pares, entonces se tiene que esta asignación es única.

g-compatibilidad y aplicaciones estables sin cúspides

*Diremos que una familia de enteros $\{x, y, z, \dots\}$ es ***g*-compatible** si verifica:*

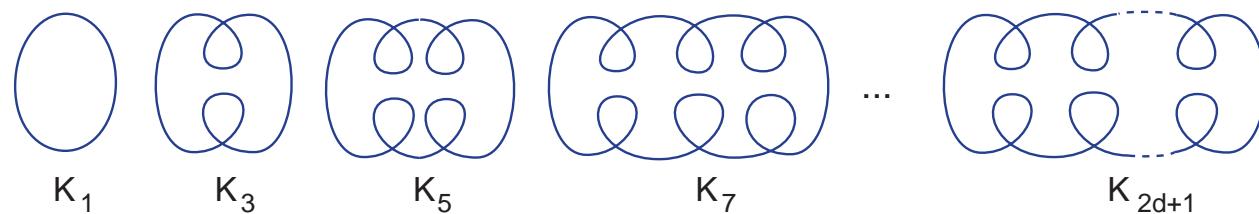
$$(1 + x) + (1 + y) + (1 + z) + \dots = 2 - 2g.$$

Proposición: *Las curvas del conjunto de ramificación de una aplicación estable sin cúspides cuyo grafo es un árbol tienen números de rotación impares que satisfacen las condiciones de compatibilidad en todos los vértices del grafo.*

Familias compatibles de enteros impares

Lema fundamental:

Dada una familia g -compatible de r enteros impares, $\{w_i\}_{i=1}^r$, existe una inmersión de una superficie compacta de género g cuya frontera tiene r arcocomponentes, de manera que los números de rotación de las imágenes de las r curvas de la frontera son los $\{w_i\}_{i=1}^r$ y las curvas correspondientes se encuentran en las siguientes familias de "curvas básicas".



Realización de grafos equilibrados

Teorema A: *Cualquier árbol (con pesos) equilibrado es el grafo de alguna aplicación estable sin cúspides de alguna superficie M en el plano.*

Teorema B: *Todo grafo que posee algún árbol maximal equilibrado puede ser el grafo de alguna submersión con pliegues de una superficie (no necesariamente orientable) en el plano.*

Teorema C: *Un grafo bipartito \mathcal{G} puede ser el grafo de alguna submersión con pliegues de una superficie orientable en el plano si y solo si \mathcal{G} es equilibrado.*

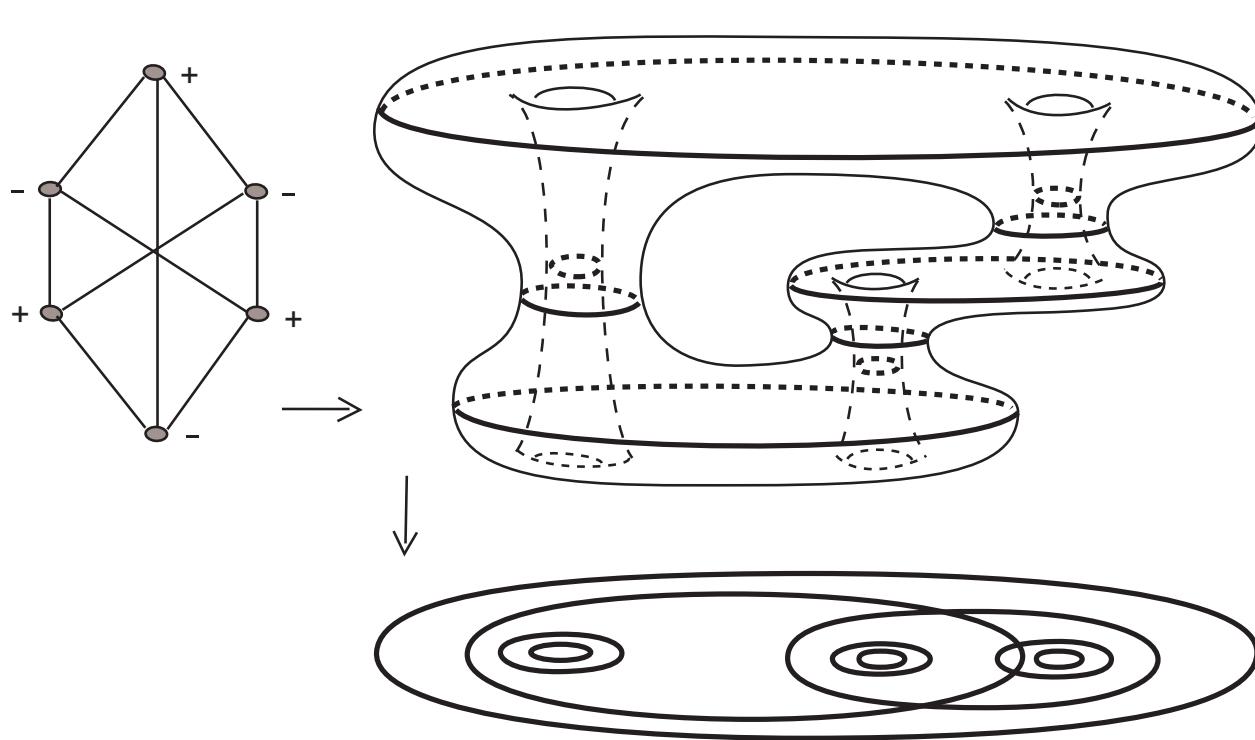
Grafos de submersiones con pliegues

Todos los posibles grafos de peso nulo para las aplicaciones estables con $I_\nu \leq 5$ y $I_C = 0$ de la esfera, el toro y el bitoro son los siguientes:

$e = 1$ $v = 2$ $g = 0$	$e = 3$ $v = 4$ $g = 0$	$e = 5$ $v = 5$ $g = 0$	$e = 5$ $v = 5$ $g = 0$	$e = 5$ $v = 5$ $g = 0$	$e = 2$ $v = 2$ $g = 1$	$e = 4$ $v = 4$ $g = 1$	$e = 4$ $v = 4$ $g = 1$	$e = 5$ $v = 2$ $g = 4$
$e = 3$ $v = 2$ $g = 2$	$e = 5$ $v = 4$ $g = 2$	$e = 4$ $v = 2$ $g = 4$	$e = 5$ $v = 2$ $g = 4$	$e = 5$ $v = 2$ $g = 4$	$e = 5$ $v = 2$ $g = 4$			

Aplicaciones estables planares

Se dice que una aplicación estable es **planar** si todas las regiones que se encuentran en el complemento de su conjunto singular son planas. En otras palabras, todos los vértices de su grafo tienen peso nulo.

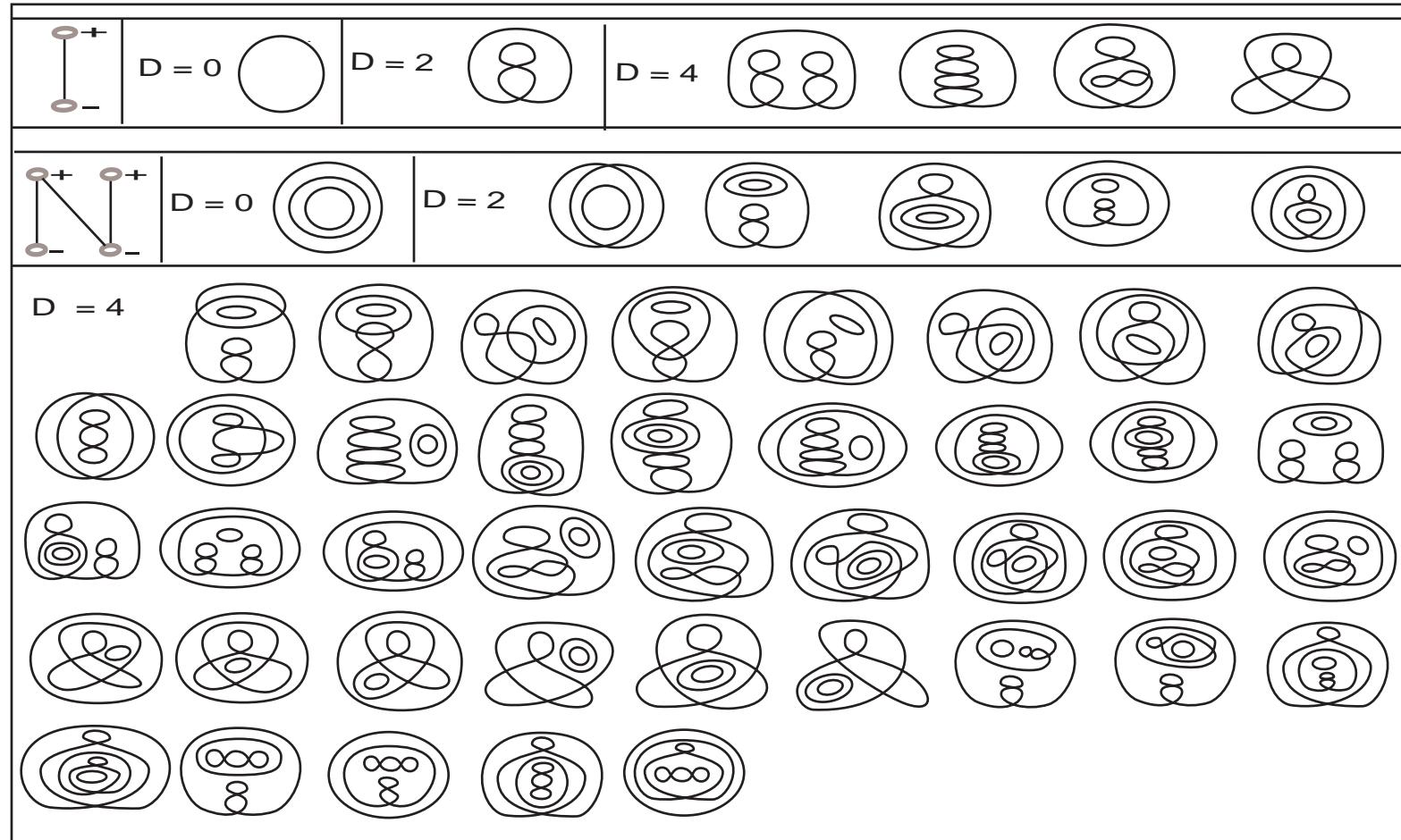


Contornos aparentes de submersiones planares con pliegues

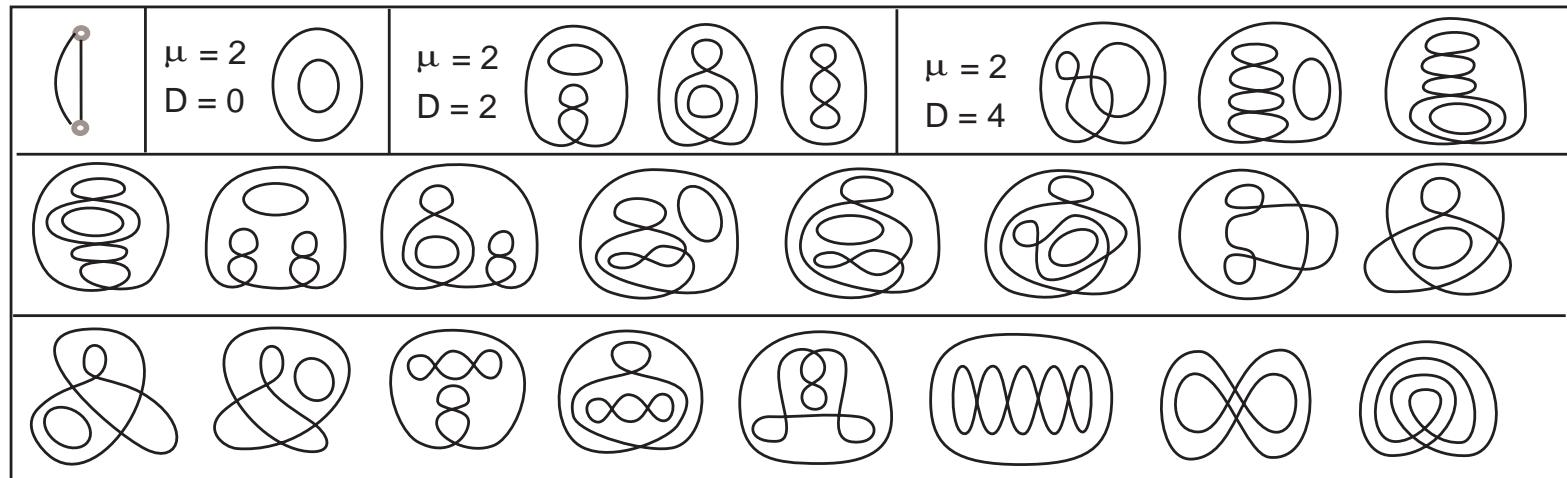
Teorema

Las siguientes tablas contienen todas las posibles clases de isotopía de los contornos aparentes de aplicaciones estables planares con $I_\nu \leq 2$, $I_C = 0$ y $I_D \leq 4$ de la esfera y el toro en el plano.

Esfera

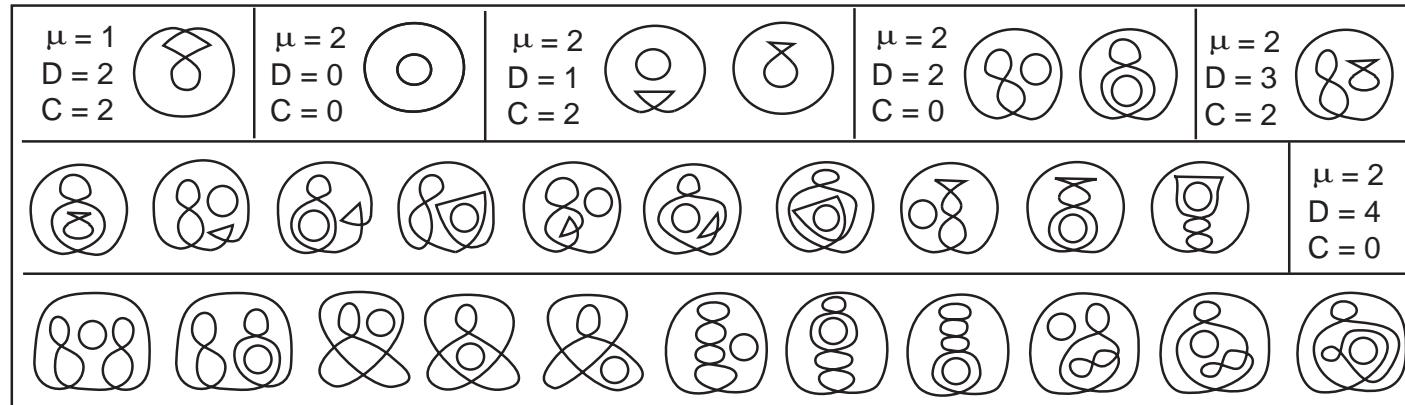
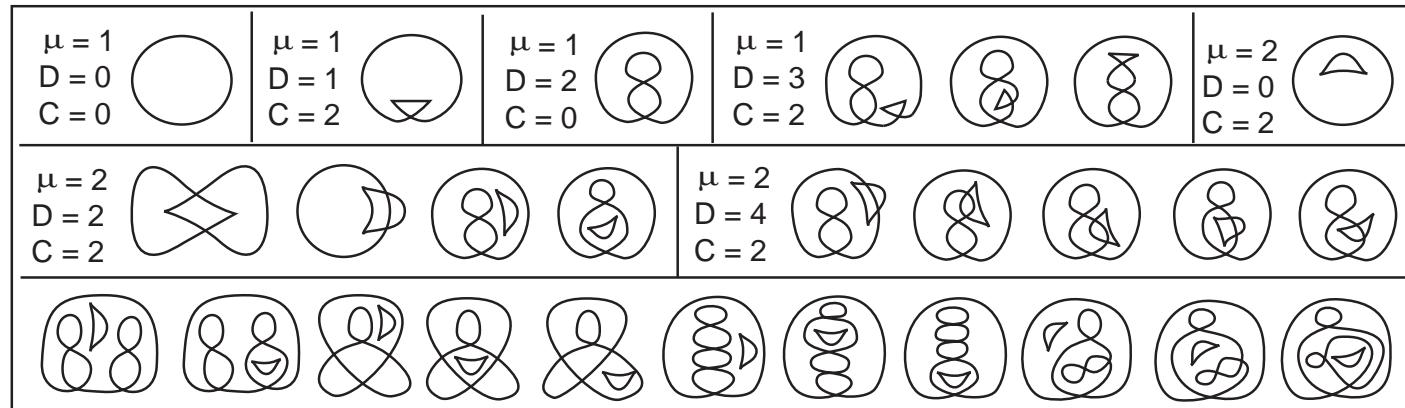


Toro



Contornos aparentes con cúspides

Todas las clases de isotopía de los posibles contornos aparentes para aplicaciones estables planares de la esfera y el toro con $I_\mu \leq 2$, $I_C \leq 2$ y $I_D \leq 4$ están representadas en las siguientes tablas.



Ejemplo de Milnor

