

# Una versión de tipo Whitehead-Ganea para la noción de categoría L.S. propia

J.M. García Calcines<sup>1</sup>   P.R. García Díaz<sup>1</sup>   A. Murillo Mas<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Matemática Fundamental  
Universidad de La Laguna

<sup>2</sup>Departamento de Álgebra, Geometría y Topología  
Universidad de Málaga

3-4 de noviembre de 2006 /XIII Encuentro de Topología. Castro Urdiales.

# Esquema de la charla

- 1 **Introducción. La categoría L.S. clásica y propia.**
  - La categoría L.S. clásica
  - La categoría L.S. propia
- 2 **Los espacios exteriores.**
  - Definición y propiedades
  - Estructura de modelos de tipo Strom para  $\mathbf{E}$ .
  - Pushouts y pullbacks homotópicos exteriores.
- 3 **La categoría L.S. exterior.**
  - La definición axiomática y descenso al caso propio.
  - La definición por recubrimientos
- 4 **Un ejemplo de aplicación: Caracterización de co-H-espacios propios.**

# La categoría L.S. clásica.

## Definition

La categoría de Lusternik-Schnirelmann  $cat(X)$  de un espacio  $X$  es el menor entero  $n$  (o infinito) para el cual existe un recubrimiento formado por  $n$  abiertos contráctiles en  $X$

# La categoría L.S. clásica.

## Definition

La categoría de Lusternik-Schnirelmann  $cat(X)$  de un espacio  $X$  es el menor entero  $n$  (o infinito) para el cual existe un recubrimiento formado por  $n$  abiertos contráctiles en  $X$

- L. Lusternik and L.Schnirelmann, *Méthodes Topologiques dans les Problemes Variationnels*, Hermann, Paris, 1934

# La categoría L.S. clásica.

## Definition

La categoría de Lusternik-Schnirelmann  $cat(X)$  de un espacio  $X$  es el menor entero  $n$  (o infinito) para el cual existe un recubrimiento formado por  $n$  abiertos contráctiles en  $X$

- L. Lusternik and L.Schnirelmann, *Méthodes Topologiques dans les Problemes Variationnels*, Hermann, Paris, 1934
- R.H. Fox, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, Ann. of Math. **42** (1941), 333-370.

# La categoría L.S. clásica.

## Definition

La categoría de Lusternik-Schnirelmann  $cat(X)$  de un espacio  $X$  es el menor entero  $n$  (o infinito) para el cual existe un recubrimiento formado por  $n$  abiertos contráctiles en  $X$

- L. Lusternik and L.Schnirelmann, *Méthodes Topologiques dans les Problemes Variationnels*, Hermann, Paris, 1934
- R.H. Fox, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, Ann. of Math. **42** (1941), 333-370.

Existe una versión punteada,  $cat^*(X)$ , en la cual los abiertos deben contener al punto base y tanto las aplicaciones como las homotopías son punteadas. Además, para condiciones no muy restrictivas coincide con la libre:

# La categoría L.S. clásica.

## Definition

La categoría de Lusternik-Schnirelmann  $cat(X)$  de un espacio  $X$  es el menor entero  $n$  (o infinito) para el cual existe un recubrimiento formado por  $n$  abiertos contráctiles en  $X$

- L. Lusternik and L.Schnirelmann, *Méthodes Topologiques dans les Problemes Variationnels*, Hermann, Paris, 1934
- R.H. Fox, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, Ann. of Math. **42** (1941), 333-370.

Existe una versión punteada,  $cat^*(X)$ , en la cual los abiertos deben contener al punto base y tanto las aplicaciones como las homotopías son punteadas. Además, para condiciones no muy restrictivas coincide con la libre:

## Lema

Sea  $X$  un espacio normal, conexo por caminos y con punto base no degenerado. Entonces  $cat(X) = cat^*(X)$

# Definiciones alternativas: Whitehead y Ganea



# Definiciones alternativas: Whitehead y Ganea

## Definición (Fat wedge)

El  $n$ -ésimo fat wedge de  $X$  es el subespacio

$$T^n(X) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : x_i = *, \text{ para algún } i \in \{1, \dots, n\}\} \subset X^n$$

## Definiciones alternativas: Whitehead y Ganea

### Definición (Fat wedge)

El  $n$ -ésimo fat wedge de  $X$  es el subespacio

$$T^n(X) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : x_i = *, \text{ para algún } i \in \{1, \dots, n\}\} \subset X^n$$

### Definición (Fibración de Ganea)

Se define la  $n$ -ésima fibración de Ganea de  $X$ ,  $p_n : G_n X \twoheadrightarrow X$ , inductivamente como sigue:

# Definiciones alternativas: Whitehead y Ganea

## Definición (Fat wedge)

El  $n$ -ésimo fat wedge de  $X$  es el subespacio

$$T^n(X) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : x_i = *, \text{ para algún } i \in \{1, \dots, n\}\} \subset X^n$$

## Definición (Fibración de Ganea)

Se define la  $n$ -ésima fibración de Ganea de  $X$ ,  $p_n : G_n X \twoheadrightarrow X$ , inductivamente como sigue:  $G_1 X = PX$  es el espacio de caminos y  $p_1 = p : PX \twoheadrightarrow X$  es la fibración de caminos.

# Definiciones alternativas: Whitehead y Ganea

## Definición (Fat wedge)

El  $n$ -ésimo fat wedge de  $X$  es el subespacio

$$T^n(X) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : x_i = *, \text{ para algún } i \in \{1, \dots, n\}\} \subset X^n$$

## Definición (Fibración de Ganea)

Se define la  $n$ -ésima fibración de Ganea de  $X$ ,  $p_n : G_n X \twoheadrightarrow X$ , inductivamente como sigue:  $G_1 X = PX$  es el espacio de caminos y  $p_1 = p : PX \twoheadrightarrow X$  es la fibración de caminos. Supongamos construida  $p_{n-1} : G_{n-1} X \twoheadrightarrow X$ ; entonces:

$$\begin{array}{c} G_{n-1} X \\ \downarrow p_{n-1} \\ X \end{array}$$

# Definiciones alternativas: Whitehead y Ganea

## Definición (Fat wedge)

El  $n$ -ésimo fat wedge de  $X$  es el subespacio

$$T^n(X) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : x_i = *, \text{ para algún } i \in \{1, \dots, n\}\} \subset X^n$$

## Definición (Fibración de Ganea)

Se define la  $n$ -ésima fibración de Ganea de  $X$ ,  $p_n : G_n X \twoheadrightarrow X$ , inductivamente como sigue:  $G_1 X = PX$  es el espacio de caminos y  $p_1 = p : PX \twoheadrightarrow X$  es la fibración de caminos. Supongamos construida  $p_{n-1} : G_{n-1} X \twoheadrightarrow X$ ; entonces:

$$\begin{array}{c} F_{n-1} X \\ \downarrow \\ G_{n-1} X \\ \downarrow p_{n-1} \\ X \end{array}$$

# Definiciones alternativas: Whitehead y Ganea

## Definición (Fat wedge)

El  $n$ -ésimo fat wedge de  $X$  es el subespacio

$$T^n(X) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : x_i = *, \text{ para algún } i \in \{1, \dots, n\}\} \subset X^n$$

## Definición (Fibración de Ganea)

Se define la  $n$ -ésima fibración de Ganea de  $X$ ,  $p_n : G_n X \rightarrow X$ , inductivamente como sigue:  $G_1 X = PX$  es el espacio de caminos y  $p_1 = p : PX \rightarrow X$  es la fibración de caminos. Supongamos construida  $p_{n-1} : G_{n-1} X \rightarrow X$ ; entonces:

$$\begin{array}{ccc}
 F_{n-1} X & & \\
 \downarrow & & \\
 G_{n-1} X & \longrightarrow & G_n X \\
 \downarrow p_{n-1} & & \\
 X & & 
 \end{array}$$

# Definiciones alternativas: Whitehead y Ganea

## Definición (Fat wedge)

El  $n$ -ésimo fat wedge de  $X$  es el subespacio

$$T^n(X) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : x_i = *, \text{ para algún } i \in \{1, \dots, n\}\} \subset X^n$$

## Definición (Fibración de Ganea)

Se define la  $n$ -ésima fibración de Ganea de  $X$ ,  $p_n : G_n X \rightarrow X$ , inductivamente como sigue:  $G_1 X = PX$  es el espacio de caminos y  $p_1 = p : PX \rightarrow X$  es la fibración de caminos. Supongamos construida  $p_{n-1} : G_{n-1} X \rightarrow X$ ; entonces:

$$\begin{array}{ccc}
 & F_{n-1} X & \\
 & \downarrow & \\
 & G_{n-1} X & \longrightarrow G_n X \\
 & \downarrow p_{n-1} & \nearrow p_n \\
 & X &
 \end{array}$$

## Teorema (Caracterizaciones de Whitehead y de Ganea)

*Sea  $X$  un espacio normal, conexo por caminos y con punto base no degenerado. Son equivalentes*



## Teorema (Caracterizaciones de Whitehead y de Ganea)

*Sea  $X$  un espacio normal, conexo por caminos y con punto base no degenerado. Son equivalentes*

- $cat(X) \leq n$

## Teorema (Caracterizaciones de Whitehead y de Ganea)

Sea  $X$  un espacio normal, conexo por caminos y con punto base no degenerado. Son equivalentes

- $\text{cat}(X) \leq n$
- La aplicación diagonal factoriza, salvo homotopía, a través del  $n$ -ésimo fat wedge:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\quad} & T^n X \\
 & \searrow \Delta_n & \downarrow j_n \\
 & & X^n
 \end{array}$$

## Teorema (Caracterizaciones de Whitehead y de Ganea)

Sea  $X$  un espacio normal, conexo por caminos y con punto base no degenerado. Son equivalentes

- $\text{cat}(X) \leq n$
- La aplicación diagonal factoriza, salvo homotopía, a través del  $n$ -ésimo fat wedge:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\quad} & T^n X \\
 & \searrow \Delta_n & \downarrow j_n \\
 & & X^n
 \end{array}$$

- La  $n$ -ésima fibración de Ganea  $p_n : G_n X \rightarrow X$  admite una sección (homotópica)

# La categoría L.S. propia.

Invariantes por homotopía propia de tipo Lusternik-Schnirelmann han sido introducidos con éxito por R.Ayala, E. Domínguez, A. Márquez y A. Quintero:

# La categoría L.S. propia.

Invariantes por homotopía propia de tipo Lusternik-Schnirelmann han sido introducidos con éxito por R. Ayala, E. Domínguez, A. Márquez y A. Quintero:

- R. Ayala, E. Domínguez, A. Márquez and A. Quintero.  
Lusternik-Schnirelmann invariants in proper homotopy theory. *Pacific J. Math.* 153 (1992) 201-215.

# La categoría L.S. propia.

Invariantes por homotopía propia de tipo Lusternik-Schnirelmann han sido introducidos con éxito por R. Ayala, E. Domínguez, A. Márquez y A. Quintero:

- R. Ayala, E. Domínguez, A. Márquez and A. Quintero. Lusternik-Schnirelmann invariants in proper homotopy theory. *Pacific J. Math.* 153 (1992) 201-215.

Posteriormente estudiados con mayor profundidad en:

- R. Ayala and A. Quintero. On the Ganea strong category in proper homotopy. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 41 (1998) 247-263.

# La categoría L.S. propia.

Invariantes por homotopía propia de tipo Lusternik-Schnirelmann han sido introducidos con éxito por R. Ayala, E. Domínguez, A. Márquez y A. Quintero:

- R. Ayala, E. Domínguez, A. Márquez and A. Quintero. Lusternik-Schnirelmann invariants in proper homotopy theory. *Pacific J. Math.* 153 (1992) 201-215.

Posteriormente estudiados con mayor profundidad en:

- R. Ayala and A. Quintero. On the Ganea strong category in proper homotopy. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 41 (1998) 247-263.
- M. Cárdenas, F.F. Lasheras and A. Quintero. Minimal covers of open manifolds with half-spaces and the proper L-S category of product spaces. *Bull. Belgian Math. Soc.* 9 (2002) 419-431.

# La categoría L.S. propia.

Invariantes por homotopía propia de tipo Lusternik-Schnirelmann han sido introducidos con éxito por R. Ayala, E. Domínguez, A. Márquez y A. Quintero:

- R. Ayala, E. Domínguez, A. Márquez and A. Quintero. Lusternik-Schnirelmann invariants in proper homotopy theory. *Pacific J. Math.* 153 (1992) 201-215.

Posteriormente estudiados con mayor profundidad en:

- R. Ayala and A. Quintero. On the Ganea strong category in proper homotopy. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 41 (1998) 247-263.
- M. Cárdenas, F.F. Lasheras and A. Quintero. Minimal covers of open manifolds with half-spaces and the proper L-S category of product spaces. *Bull. Belgian Math. Soc.* 9 (2002) 419-431.
- M. Cárdenas, F.F. Lasheras, F. Muro and A. Quintero. Proper L-S category, fundamental pro-groups and 2-dimensional proper co-H-spaces. *Topology Appl.*, **153** (2005) 580-604



## La categoría L.S. propia.

Invariantes por homotopía propia de tipo Lusternik-Schnirelmann han sido introducidos con éxito por R. Ayala, E. Domínguez, A. Márquez y A. Quintero:

- R. Ayala, E. Domínguez, A. Márquez and A. Quintero.  
Lusternik-Schnirelmann invariants in proper homotopy theory. *Pacific J. Math.* 153 (1992) 201-215.

Posteriormente estudiados con mayor profundidad en:

- R. Ayala and A. Quintero. On the Ganea strong category in proper homotopy. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 41 (1998) 247-263.
- M. Cárdenas, F.F. Lasheras and A. Quintero. Minimal covers of open manifolds with half-spaces and the proper L-S category of product spaces. *Bull. Belgian Math. Soc.* 9 (2002) 419-431.
- M. Cárdenas, F.F. Lasheras, F. Muro and A. Quintero. Proper L-S category, fundamental pro-groups and 2-dimensional proper co-H-spaces. *Topology Appl.*, **153** (2005) 580-604
- M. Cárdenas, F. Muro and A. Quintero. The proper L-S category of Whitehead manifolds. *Topology Appl.*, **153** (2005) 557-579

# La definición de categoría L.S. propia.

# La definición de categoría L.S. propia.

- $f : X \rightarrow Y$  es *propia* si es continua y  $f^{-1}(K)$  es compacto (y cerrado) para todo  $K \subset Y$  compacto-cerrado. La categoría de espacios y aplicaciones propias se denotará por **P**.

# La definición de categoría L.S. propia.

- $f : X \rightarrow Y$  es *propia* si es continua y  $f^{-1}(K)$  es compacto (y cerrado) para todo  $K \subset Y$  compacto-cerrado. La categoría de espacios y aplicaciones propias se denotará por  $\mathbf{P}$ .
- Un *final de Freudenthal* es un elemento en  $\mathcal{F}(X) = \lim \pi_0(X - K)$

# La definición de categoría L.S. propia.

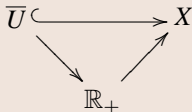
- $f : X \rightarrow Y$  es *propia* si es continua y  $f^{-1}(K)$  es compacto (y cerrado) para todo  $K \subset Y$  compacto-cerrado. La categoría de espacios y aplicaciones propias se denotará por  $\mathbf{P}$ .
- Un *final de Freudenthal* es un elemento en  $\mathcal{F}(X) = \lim \pi_0(X - K)$
- Una aplicación propia  $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  se denomina *rayo (base)* en  $X$ . Todo espacio  $X$  en  $\mathbf{P}_\infty \subset \mathbf{P}$  (no compactos,  $T_2$ , localmente compactos y  $\sigma$ -compactos) admite una aplicación propia  $r : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

# La definición de categoría L.S. propia.

- $f : X \rightarrow Y$  es *propia* si es continua y  $f^{-1}(K)$  es compacto (y cerrado) para todo  $K \subset Y$  compacto-cerrado. La categoría de espacios y aplicaciones propias se denotará por  $\mathbf{P}$ .
- Un *final de Freudenthal* es un elemento en  $\mathcal{F}(X) = \lim \pi_0(X - K)$
- Una aplicación propia  $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  se denomina *rayo (base)* en  $X$ . Todo espacio  $X$  en  $\mathbf{P}_\infty \subset \mathbf{P}$  (no compactos,  $T_2$ , localmente compactos y  $\sigma$ -compactos) admite una aplicación propia  $r : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

## Definición (Ayala-Domínguez-Márquez-Quintero)

Dado  $X$  un espacio en  $\mathbf{P}_\infty$ , un abierto  $U$  se dice que es  $p$ -categórico si su clausura es propiamente deformable:



Entonces  $p\text{-cat}(X)$  es el menor entero  $n$  (o infinito) para el cual existe un recubrimiento por  $n$  abiertos  $p$ -categóricos.

Existe una versión basada, que es más práctica: Dado un final fuerte  $[\alpha] \in [\mathbb{R}_+, X]_p$  la  $\alpha$ -categoría L.S. propia,  $p\text{-cat}_{[\alpha]}(X)$ , en la que en los diagramas de deformación

$$\begin{array}{ccc} \overline{U} & \xrightarrow{\quad} & X \\ & \searrow & \nearrow \alpha \\ & \mathbb{R}_+ & \end{array}$$

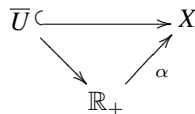
Existe una versión basada, que es más práctica: Dado un final fuerte  $[\alpha] \in [\mathbb{R}_+, X]_p$  la  $\alpha$ -categoría L.S. propia,  $p\text{-cat}_{[\alpha]}(X)$ , en la que en los diagramas de deformación

$$\begin{array}{ccc} \overline{U} & \xrightarrow{\quad} & X \\ & \searrow & \nearrow \alpha \\ & \mathbb{R}_+ & \end{array}$$

Si  $X$  es un ANR localmente conexo por caminos en  $\mathbf{P}_\infty$  y con un solo final entonces



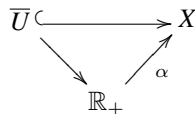
Existe una versión basada, que es más práctica: Dado un final fuerte  $[\alpha] \in [\mathbb{R}_+, X]_p$  la  $\alpha$ -categoría L.S. propia,  $p\text{-cat}_{[\alpha]}(X)$ , en la que en los diagramas de deformación



Si  $X$  es un ANR localmente conexo por caminos en  $\mathbf{P}_\infty$  y con un solo final entonces

- $p\text{-cat}(X) \leq p\text{-cat}_{[\alpha]}(X) \leq p\text{-cat}(X) + 1$

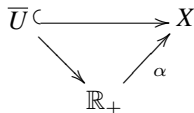
Existe una versión basada, que es más práctica: Dado un final fuerte  $[\alpha] \in [\mathbb{R}_+, X]_p$  la  $\alpha$ -categoría L.S. propia,  $p\text{-cat}_{[\alpha]}(X)$ , en la que en los diagramas de deformación



Si  $X$  es un ANR localmente conexo por caminos en  $\mathbf{P}_\infty$  y con un solo final entonces

- $p\text{-cat}(X) \leq p\text{-cat}_{[\alpha]}(X) \leq p\text{-cat}(X) + 1$
- Existe un final fuerte  $[\alpha_0]$  tal que  $p\text{-cat}(X) = p\text{-cat}_{[\alpha_0]}(X)$ .

Existe una versión basada, que es más práctica: Dado un final fuerte  $[\alpha] \in [\mathbb{R}_+, X]_p$  la  $\alpha$ -categoría L.S. propia,  $p\text{-cat}_{[\alpha]}(X)$ , en la que en los diagramas de deformación



Si  $X$  es un ANR localmente conexo por caminos en  $\mathbf{P}_\infty$  y con un solo final entonces

- $p\text{-cat}(X) \leq p\text{-cat}_{[\alpha]}(X) \leq p\text{-cat}(X) + 1$
- Existe un final fuerte  $[\alpha_0]$  tal que  $p\text{-cat}(X) = p\text{-cat}_{[\alpha_0]}(X)$ .

### Teorema

*Sea  $X$  un ANR localmente conexo por caminos en  $\mathbf{P}_\infty$ , con un solo final y propiamente bien basado por  $\alpha$ . Entonces  $p\text{-cat}_{[\alpha]}(X) = p\text{-cat}_{[\alpha]}^*(X)$ .*

Es importante hacer notar el gran contraste entre la categoría L.S. clásica y su análoga propia. Por ejemplo:



Es importante hacer notar el gran contraste entre la categoría L.S. clásica y su análoga propia. Por ejemplo:

- Si  $n \neq 3$ ,  $\mathbb{R}^n$  es la única  $n$ -variedad abierta con categoría L.S. propia 2

Es importante hacer notar el gran contraste entre la categoría L.S. clásica y su análoga propia. Por ejemplo:

- Si  $n \neq 3$ ,  $\mathbb{R}^n$  es la única  $n$ -variedad abierta con categoría L.S. propia 2
- La categoría L.S. propia de una amplia clase de 3-variedades de Whitehead (eventualmente, final-irreducibles,  $\mathbb{R}^2$ -irreducibles) es 4.

Es importante hacer notar el gran contraste entre la categoría L.S. clásica y su análoga propia. Por ejemplo:

- Si  $n \neq 3$ ,  $\mathbb{R}^n$  es la única  $n$ -variedad abierta con categoría L.S. propia 2
- La categoría L.S. propia de una amplia clase de 3-variedades de Whitehead (eventualmente, final-irreducibles,  $\mathbb{R}^2$ -irreducibles) es 4.
- También hay cierta analogía como la caracterización de los co-H-espacios propias por aquellos espacios con categoría L.S. propia menor o igual a 2

Es importante hacer notar el gran contraste entre la categoría L.S. clásica y su análoga propia. Por ejemplo:

- Si  $n \neq 3$ ,  $\mathbb{R}^n$  es la única  $n$ -variedad abierta con categoría L.S. propia 2
- La categoría L.S. propia de una amplia clase de 3-variedades de Whitehead (eventualmente, final-irreducibles,  $\mathbb{R}^2$ -irreducibles) es 4.
- También hay cierta analogía como la caracterización de los co-H-espacios propias por aquellos espacios con categoría L.S. propia menor o igual a 2

Por otro lado, existe a nuestro entender un hecho importante que podría impedir el desarrollo de la categoría L.S. propia:



Es importante hacer notar el gran contraste entre la categoría L.S. clásica y su análoga propia. Por ejemplo:

- Si  $n \neq 3$ ,  $\mathbb{R}^n$  es la única  $n$ -variedad abierta con categoría L.S. propia 2
- La categoría L.S. propia de una amplia clase de 3-variedades de Whitehead (eventualmente, final-irreducibles,  $\mathbb{R}^2$ -irreducibles) es 4.
- También hay cierta analogía como la caracterización de los co-H-espacios propias por aquellos espacios con categoría L.S. propia menor o igual a 2

Por otro lado, existe a nuestro entender un hecho importante que podría impedir el desarrollo de la categoría L.S. propia:

**¡NO EXISTEN CARACTERIZACIONES DE TIPO WHITEHEAD O DE GANEA!**

# Los espacios exteriores. Propiedades.

## Definición (Pinillos-Calcines-Paricio, 1998)

Un *espacio exterior*  $(X, \varepsilon \subset \tau)$  consiste en un espacio topológico  $(X, \tau)$  junto con una familia no vacía de abiertos  $\varepsilon$  (que llamaremos *externología*) que verifica

# Los espacios exteriores. Propiedades.

## Definición (Pinillos-Calines-Paricio, 1998)

Un *espacio exterior*  $(X, \varepsilon \subset \tau)$  consiste en un espacio topológico  $(X, \tau)$  junto con una familia no vacía de abiertos  $\varepsilon$  (que llamaremos *externología*) que verifica

- Si  $E, E' \in \varepsilon$  entonces  $E \cap E' \in \varepsilon$

# Los espacios exteriores. Propiedades.

## Definición (Pinillos-Calcines-Paricio, 1998)

Un *espacio exterior*  $(X, \varepsilon \subset \tau)$  consiste en un espacio topológico  $(X, \tau)$  junto con una familia no vacía de abiertos  $\varepsilon$  (que llamaremos *externología*) que verifica

- Si  $E, E' \in \varepsilon$  entonces  $E \cap E' \in \varepsilon$
- Si  $E \in \varepsilon$ ,  $U \in \tau$  y  $E \subset U$  entonces  $U \in \varepsilon$ .

# Los espacios exteriores. Propiedades.

## Definición (Pinillos-Calcines-Paricio, 1998)

Un *espacio exterior*  $(X, \varepsilon \subset \tau)$  consiste en un espacio topológico  $(X, \tau)$  junto con una familia no vacía de abiertos  $\varepsilon$  (que llamaremos *externología*) que verifica

- Si  $E, E' \in \varepsilon$  entonces  $E \cap E' \in \varepsilon$
- Si  $E \in \varepsilon$ ,  $U \in \tau$  y  $E \subset U$  entonces  $U \in \varepsilon$ .

Una aplicación continua  $f : (X, \varepsilon \subset \tau) \rightarrow (X', \varepsilon' \subset \tau')$  se dice que es *exterior* si  $f^{-1}(E) \in \varepsilon$  para todo  $E \in \varepsilon'$ .

# Los espacios exteriores. Propiedades.

## Definición (Pinillos-Calcines-Paricio, 1998)

Un *espacio exterior*  $(X, \varepsilon \subset \tau)$  consiste en un espacio topológico  $(X, \tau)$  junto con una familia no vacía de abiertos  $\varepsilon$  (que llamaremos *externología*) que verifica

- Si  $E, E' \in \varepsilon$  entonces  $E \cap E' \in \varepsilon$
- Si  $E \in \varepsilon$ ,  $U \in \tau$  y  $E \subset U$  entonces  $U \in \varepsilon$ .

Una aplicación continua  $f : (X, \varepsilon \subset \tau) \rightarrow (X', \varepsilon' \subset \tau')$  se dice que es *exterior* si  $f^{-1}(E) \in \varepsilon$  para todo  $E \in \varepsilon'$ .

Se denota a la categoría de los espacios exteriores por **E**.

# Los espacios exteriores. Propiedades.

## Definición (Pinillos-Calcines-Paricio, 1998)

Un *espacio exterior*  $(X, \varepsilon \subset \tau)$  consiste en un espacio topológico  $(X, \tau)$  junto con una familia no vacía de abiertos  $\varepsilon$  (que llamaremos *externología*) que verifica

- Si  $E, E' \in \varepsilon$  entonces  $E \cap E' \in \varepsilon$
- Si  $E \in \varepsilon$ ,  $U \in \tau$  y  $E \subset U$  entonces  $U \in \varepsilon$ .

Una aplicación continua  $f : (X, \varepsilon \subset \tau) \rightarrow (X', \varepsilon' \subset \tau')$  se dice que es *exterior* si  $f^{-1}(E) \in \varepsilon$  para todo  $E \in \varepsilon'$ .

Se denota a la categoría de los espacios exteriores por **E**.

- Si  $X$  es un espacio topológico se puede considerar la *externología cocompacta*  $\varepsilon_{cc} = \{X - K : K \text{ es compacto y cerrado}\}$ . El espacio exterior correspondiente se denotará por  $X_{cc}$ . Esta construcción da lugar a un embebimiento pleno

$$(-)_{cc} : \mathbf{P} \hookrightarrow \mathbf{E}$$

# Los espacios exteriores. Propiedades.

### Definición (Pinillos-Calcines-Paricio, 1998)

Un *espacio exterior*  $(X, \varepsilon \subset \tau)$  consiste en un espacio topológico  $(X, \tau)$  junto con una familia no vacía de abiertos  $\varepsilon$  (que llamaremos *externología*) que verifica

- Si  $E, E' \in \varepsilon$  entonces  $E \cap E' \in \varepsilon$
- Si  $E \in \varepsilon, U \in \tau$  y  $E \subset U$  entonces  $U \in \varepsilon$ .

Una aplicación continua  $f : (X, \varepsilon \subset \tau) \rightarrow (X', \varepsilon' \subset \tau')$  se dice que es *exterior* si  $f^{-1}(E) \in \varepsilon$  para todo  $E \in \varepsilon'$ .

Se denota a la categoría de los espacios exteriores por  $\mathbf{E}$ .

- Si  $X$  es un espacio topológico se puede considerar la *externología cocompacta*  $\varepsilon_{cc} = \{X - K : K \text{ es compacto y cerrado}\}$ . El espacio exterior correspondiente se denotará por  $X_{cc}$ . Esta construcción da lugar a un embebimiento pleno

$$(-)_{cc} : \mathbf{P} \hookrightarrow \mathbf{E}$$

- **E es una categoría completa y cocompleta.**



# Funtores cilindro y cocilindro exteriores

Sea  $X$  un espacio exterior arbitrario. Definimos su *cilindro* y su *cocilindro* como sigue:

# Funtores cilindro y cocilindro exteriores

Sea  $X$  un espacio exterior arbitrario. Definimos su *cilindro* y su *cocilindro* como sigue:

- Cilindro de  $X$  :

# Funtores cilindro y cocilindro exteriores

Sea  $X$  un espacio exterior arbitrario. Definimos su *cilindro* y su *cocilindro* como sigue:

- Cilindro de  $X$  :  $X \bar{\times} I$

# Funtores cilindro y cocilindro exteriores

Sea  $X$  un espacio exterior arbitrario. Definimos su *cilindro* y su *cocilindro* como sigue:

- Cilindro de  $X$  :  $X \bar{\times} I$

Con espacio subyacente el producto  $X \times I$  y externología formada por aquellos abiertos del producto que contienen a subconjuntos de la forma  $G \times I$ , con  $G$  abierto exterior en  $X$ .

# Funtores cilindro y cocilindro exteriores

Sea  $X$  un espacio exterior arbitrario. Definimos su *cilindro* y su *cocilindro* como sigue:

- Cilindro de  $X$  :  $X \bar{\times} I$

Con espacio subyacente el producto  $X \times I$  y externología formada por aquellos abiertos del producto que contienen a subconjuntos de la forma  $G \times I$ , con  $G$  abierto exterior en  $X$ . (Se puede restringir al caso propio).

# Funtores cilindro y cocilindro exteriores

Sea  $X$  un espacio exterior arbitrario. Definimos su *cilindro* y su *cocilindro* como sigue:

- Cilindro de  $X$  :  $X \bar{\times} I$

Con espacio subyacente el producto  $X \times I$  y externología formada por aquellos abiertos del producto que contienen a subconjuntos de la forma  $G \times I$ , con  $G$  abierto exterior en  $X$ . (Se puede restringir al caso propio).

Functor cilindro  $(-) \bar{\times} I : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ .

# Funtores cilindro y cocilindro exteriores

Sea  $X$  un espacio exterior arbitrario. Definimos su *cilindro* y su *cocilindro* como sigue:

- Cilindro de  $X$  :  $X \bar{\times} I$

Con espacio subyacente el producto  $X \times I$  y externología formada por aquellos abiertos del producto que contienen a subconjuntos de la forma  $G \times I$ , con  $G$  abierto exterior en  $X$ . (Se puede restringir al caso propio).

Funtor cilindro  $(-) \bar{\times} I : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ .

- Cocilindro de  $X$  :

# Funtores cilindro y cocilindro exteriores

Sea  $X$  un espacio exterior arbitrario. Definimos su *cilindro* y su *cocilindro* como sigue:

- Cilindro de  $X$  :  $X \bar{\times} I$

Con espacio subyacente el producto  $X \times I$  y externología formada por aquellos abiertos del producto que contienen a subconjuntos de la forma  $G \times I$ , con  $G$  abierto exterior en  $X$ . (Se puede restringir al caso propio).

Functor cilindro  $(-) \bar{\times} I : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ .

- Cocilindro de  $X$  :  $X^I$



# Funtores cilindro y cocilindro exteriores

Sea  $X$  un espacio exterior arbitrario. Definimos su *cilindro* y su *cocilindro* como sigue:

- Cilindro de  $X$  :  $X \bar{\times} I$

Con espacio subyacente el producto  $X \times I$  y externología formada por aquellos abiertos del producto que contienen a subconjuntos de la forma  $G \times I$ , con  $G$  abierto exterior en  $X$ . (Se puede restringir al caso propio).

Funtor cilindro  $(-)\bar{\times} I : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ .

- Cocilindro de  $X$ :  $X^I$

Con espacio subyacente el espacio usual de funciones (topología compacto-abierto) y externología formada por aquellos abiertos que contienen a subconjuntos de la forma  $(I, G) = \{\alpha \in X^I : \alpha(I) \subset G\}$ , siendo  $G$  abierto exterior en  $X$ .

# Funtores cilindro y cocilindro exteriores

Sea  $X$  un espacio exterior arbitrario. Definimos su *cilindro* y su *cocilindro* como sigue:

- Cilindro de  $X$  :  $X \bar{\times} I$

Con espacio subyacente el producto  $X \times I$  y externología formada por aquellos abiertos del producto que contienen a subconjuntos de la forma  $G \times I$ , con  $G$  abierto exterior en  $X$ . (Se puede restringir al caso propio).

Funtor cilindro  $(-)\bar{\times} I : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ .

- Cocilindro de  $X$ :  $X^I$

Con espacio subyacente el espacio usual de funciones (topología compacto-abierto) y externología formada por aquellos abiertos que contienen a subconjuntos de la forma  $(I, G) = \{\alpha \in X^I : \alpha(I) \subset G\}$ , siendo  $G$  abierto exterior en  $X$ . (No se puede restringir al caso propio).

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ | ≡ ≡ ↺ 🔍 ↻

# Estructura de modelos para $\mathbf{E}$ .

## Definición (Cofibración exterior)

Una aplicación exterior  $j : A \rightarrow X$  es una *cofibración exterior* si satisface la propiedad de extensión de homotopía en  $\mathbf{E}$  :

# Estructura de modelos para $\mathbf{E}$ .

## Definición (Cofibración exterior)

Una aplicación exterior  $j : A \rightarrow X$  es una *cofibración exterior* si satisface la propiedad de extensión de homotopía en  $\mathbf{E}$  :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{z_0} & A \bar{\times} I \\
 \downarrow j & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{\quad} & Y
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & & \downarrow j \bar{\times} id \\
 & & X \bar{\times} I \\
 & \nearrow z_0 & \\
 & & Y
 \end{array}$$

The diagram illustrates the homotopy extension property for an exterior cofibration. It shows a commutative square with a diagonal arrow and a homotopy arrow. The top row is  $A \xrightarrow{z_0} A \bar{\times} I$ . The left vertical arrow is  $j : A \rightarrow X$ . The bottom horizontal arrow is  $X \rightarrow Y$ . The right vertical arrow is  $j \bar{\times} id : A \bar{\times} I \rightarrow X \bar{\times} I$ . A diagonal arrow goes from  $X$  to  $X \bar{\times} I$  labeled  $z_0$ . A dotted arrow goes from  $Y$  to  $X \bar{\times} I$ .

# Estructura de modelos para $\mathbf{E}$ .

## Definición (Cofibración exterior)

Una aplicación exterior  $j : A \rightarrow X$  es una *cofibración exterior* si satisface la propiedad de extensión de homotopía en  $\mathbf{E}$  :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{z_0} & A \bar{\times} I \\
 \downarrow j & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{\quad} & Y \\
 & \searrow z_0 & \swarrow j \bar{\times} id \\
 & & X \bar{\times} I
 \end{array}$$

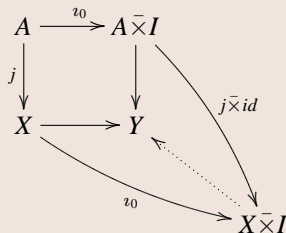
The diagram illustrates the homotopy extension property for an exterior cofibration. It shows a commutative square with an additional homotopy arrow. The top row is  $A \xrightarrow{z_0} A \bar{\times} I$ . The left vertical arrow is  $j : A \rightarrow X$ . The bottom-left vertex is  $X$ , and the bottom-right vertex is  $Y$ . The bottom horizontal arrow is an unlabeled arrow from  $X$  to  $Y$ . The right vertical arrow is  $j \bar{\times} id : A \bar{\times} I \rightarrow X \bar{\times} I$ . The bottom-right vertex is  $X \bar{\times} I$ . A curved arrow labeled  $z_0$  goes from  $X$  to  $X \bar{\times} I$ . A dotted arrow goes from  $Y$  to  $X \bar{\times} I$ .

- Si  $j : A \rightarrow X$  es una cofibración exterior cerrada topológicamente entonces también lo es exteriormente. En este caso es un isomorfismo exterior sobre su imagen.

# Estructura de modelos para $\mathbf{E}$ .

## Definición (Cofibración exterior)

Una aplicación exterior  $j : A \rightarrow X$  es una *cofibración exterior* si satisface la propiedad de extensión de homotopía en  $\mathbf{E}$  :



- Si  $j : A \rightarrow X$  es una cofibración exterior cerrada topológicamente entonces también lo es exteriormente. En este caso es un isomorfismo exterior sobre su imagen.
- Si  $j : A \rightarrow X$  es una aplicación propia, con  $A, X$  espacios Hausdorff y localmente compactos entonces  $j$  es cofibración propia si y sólo si  $j_{cc} : A_{cc} \rightarrow X_{cc}$  es cofibración exterior.

# Estructura de modelos para $\mathbf{E}$ .

## Definición (Fibración exterior)

Una aplicación exterior  $p : E \rightarrow B$  se dice que es *fibración exterior* si satisface la propiedad de elevación de homotopía en  $\mathbf{E}$  :



# Estructura de modelos para $\mathbf{E}$ .

## Definición (Fibración exterior)

Una aplicación exterior  $p : E \rightarrow B$  se dice que es *fibración exterior* si satisface la propiedad de elevación de homotopía en  $\mathbf{E}$  :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \longrightarrow & E \\
 \downarrow \iota_0 & \nearrow & \downarrow p \\
 X \times I & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ | ≡ ↺ 🔍 ↻

## Estructura de modelos para E.

### Definición (Fibración exterior)

Una aplicación exterior  $p : E \rightarrow B$  se dice que es *fibración exterior* si satisface la propiedad de elevación de homotopía en  $\mathbf{E}$  :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E \\ \downarrow \iota_0 & \nearrow & \downarrow P \\ X \bar{\times} I & \longrightarrow & B \end{array}$$

### Definición (Equivalencia débil exterior)

Una *equivalencia débil exterior* es una equivalencia de homotopía exterior.

- Dada  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación propia entonces  $f$  es equivalencia de homotopía propia si y sólo si  $f_{cc} : X_{cc} \rightarrow Y_{cc}$  es equivalencia de homotopía exterior.

## Teorema

*La categoría de los espacios exteriores  $\mathbf{E}$  junto con las clases  $\overline{\text{cof}}$ ,  $\text{fib}$  y  $\text{we}$  tiene estructura de categoría de modelos propia y cerrada.*

## Teorema

*La categoría de los espacios exteriores  $\mathbf{E}$  junto con las clases  $\overline{\text{cof}}$ ,  $\text{fib}$  y  $\text{we}$  tiene estructura de categoría de modelos propia y cerrada.*

Veamos el caso basado: Consideramos la subcategoría plena  $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+} \subset \mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}$  de espacios exteriores bien basados, esto es,  $(X, \alpha)$  con  $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  cofibración exterior (cerrada).

## Teorema

*La categoría de los espacios exteriores  $\mathbf{E}$  junto con las clases  $\overline{\text{cof}}$ ,  $\text{fib}$  y  $\text{we}$  tiene estructura de categoría de modelos propia y cerrada.*

Veamos el caso basado: Consideramos la subcategoría plena  $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+} \subset \mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}$  de espacios exteriores bien basados, esto es,  $(X, \alpha)$  con  $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  cofibración exterior (cerrada). Considerando el cilindro y cocilindro basado en la categoría  $\mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}$  se definen de forma análoga cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles.

## Teorema

*La categoría de los espacios exteriores  $\mathbf{E}$  junto con las clases  $\overline{\text{cof}}$ ,  $\text{fib}$  y  $\text{we}$  tiene estructura de categoría de modelos propia y cerrada.*

Veamos el caso basado: Consideramos la subcategoría plena  $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}+} \subset \mathbf{E}^{\mathbb{R}+}$  de espacios exteriores bien basados, esto es,  $(X, \alpha)$  con  $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  cofibración exterior (cerrada). Considerando el cilindro y cocilindro basado en la categoría  $\mathbf{E}^{\mathbb{R}+}$  se definen de forma análoga cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles.

Entonces  $f$  es cofibración (resp. fibración, equivalencia débil) en  $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}+}$  si y sólo si  $f$  es cofibración (resp. fibración, equivalencia débil) en  $\mathbf{E}$ . Además:

## Teorema

*La categoría de los espacios exteriores  $\mathbf{E}$  junto con las clases  $\overline{\text{cof}}$ ,  $\text{fib}$  y  $\text{we}$  tiene estructura de categoría de modelos propia y cerrada.*

Veamos el caso basado: Consideramos la subcategoría plena  $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}+} \subset \mathbf{E}^{\mathbb{R}+}$  de espacios exteriores bien basados, esto es,  $(X, \alpha)$  con  $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  cofibración exterior (cerrada). Considerando el cilindro y cocilindro basado en la categoría  $\mathbf{E}^{\mathbb{R}+}$  se definen de forma análoga cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles.

Entonces  $f$  es cofibración (resp. fibración, equivalencia débil) en  $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}+}$  si y sólo si  $f$  es cofibración (resp. fibración, equivalencia débil) en  $\mathbf{E}$ . Además:

## Teorema

*La categoría de los espacios exteriores bien basados  $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}+}$  junto con las clases de cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles anteriormente definidos satisface todos los axiomas de categoría de modelos propia y cerrada, excepto la de ser cerrada por límites y colímites finitos.*





# Pushouts y pullbacks homotópicos

La categoría subyacente será  $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}+}$  aunque todo lo que sigue también se puede aplicar para  $\mathbf{E}$ .

# Pushouts y pullbacks homotópicos

La categoría subyacente será  $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}+}$  aunque todo lo que sigue también se puede aplicar para  $\mathbf{E}$ .

## Definición (Pullback homotópico exterior)

Sea un diagrama de aplicaciones exteriores de la forma  $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ . El *pullback homotópico* de este diagrama es el espacio exterior que resulta de

# Pushouts y pullbacks homotópicos

La categoría subyacente será  $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}+}$  aunque todo lo que sigue también se puede aplicar para  $\mathbf{E}$ .

## Definición (Pullback homotópico exterior)

Sea un diagrama de aplicaciones exteriores de la forma  $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ . El *pullback homotópico* de este diagrama es el espacio exterior que resulta de

- Factorizar  $g$  (o bien  $f$ ) mediante una equivalencia débil seguida de una fibración exterior

# Pushouts y pullbacks homotópicos

La categoría subyacente será  $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}+}$  aunque todo lo que sigue también se puede aplicar para  $\mathbf{E}$ .

## Definición (Pullback homotópico exterior)

Sea un diagrama de aplicaciones exteriores de la forma  $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ . El *pullback homotópico* de este diagrama es el espacio exterior que resulta de

- Factorizar  $g$  (o bien  $f$ ) mediante una equivalencia débil seguida de una fibración exterior
- Formar el pullback con esta fibración

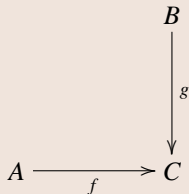
# Pushouts y pullbacks homotópicos

La categoría subyacente será  $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$  aunque todo lo que sigue también se puede aplicar para  $\mathbf{E}$ .

### Definición (Pullback homotópico exterior)

Sea un diagrama de aplicaciones exteriores de la forma  $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ . El *pullback homotópico* de este diagrama es el espacio exterior que resulta de

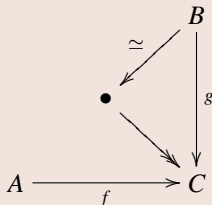
- Factorizar  $g$  (o bien  $f$ ) mediante una equivalencia débil seguida de una fibration exterior
- Formar el pullback con esta fibration



---

---

- Factorizar  $g$  (o bien  $f$ ) mediante una equivalencia débil seguida de una fibración exterior



---

---

*f* = 0.05, *df* = 1, *p* = 0.0001,  $\eta^2_p = 0.10$ ,  $\eta^2_{\text{total}} = 0.11$ ,  $\eta^2_{\text{error}} = 0.89$ ,  $\eta^2_{\text{total}} = 0.11$ ,  $\eta^2_{\text{error}} = 0.89$ .

- Factorizar  $g$  (o bien  $f$ ) mediante una equivalencia débil seguida de una fibración exterior
- Formar el pullback con esta fibración





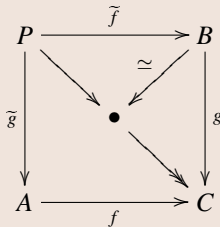
# Pushouts y pullbacks homotópicos

La categoría subyacente será  $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}+}$  aunque todo lo que sigue también se puede aplicar para  $\mathbf{E}$ .

## Definición (Pullback homotópico exterior)

Sea un diagrama de aplicaciones exteriores de la forma  $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ . El *pullback homotópico* de este diagrama es el espacio exterior que resulta de

- Factorizar  $g$  (o bien  $f$ ) mediante una equivalencia débil seguida de una fibración exterior
- Formar el pullback con esta fibración



# Pushouts y pullbacks homotópicos

- Decimos que el cuadrado resultante, o cualquiera homotópicamente equivalente a él es un cuadrado pullback homotópico

# Pushouts y pullbacks homotópicos

- Decimos que el cuadrado resultante, o cualquiera homotópicamente equivalente a él es un cuadrado pullback homotópico
- La noción dual de Eckmann-Hilton corresponde con el de pushout homotópico

# Pushouts y pullbacks homotópicos

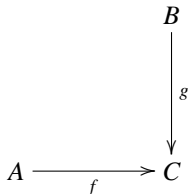
- Decimos que el cuadrado resultante, o cualquiera homotópicamente equivalente a él es un cuadrado pullback homotópico
- La noción dual de Eckmann-Hilton corresponde con el de pushout homotópico
- Como en el caso clásico, los pullbacks y pushouts homotópicos pueden definirse por la propiedad universal débil de límites o colímites homotópicos o bien mediante pullbacks o pushouts homotópicos estándar.

# Pushouts y pullbacks homotópicos

- Decimos que el cuadrado resultante, o cualquiera homotópicamente equivalente a él es un cuadrado pullback homotópico
- La noción dual de Eckmann-Hilton corresponde con el de pushout homotópico
- Como en el caso clásico, los pullbacks y pushouts homotópicos pueden definirse por la propiedad universal débil de límites o colímites homotópicos o bien mediante pullbacks o pushouts homotópicos estándar.
- El *join* del diagrama  $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$  es el pushout homotópico del pullback homotópico de dicho diagrama:

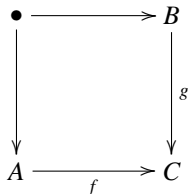
# Pushouts y pullbacks homotópicos

- Decimos que el cuadrado resultante, o cualquiera homotópicamente equivalente a él es un cuadrado pullback homotópico
- La noción dual de Eckmann-Hilton corresponde con el de pushout homotópico
- Como en el caso clásico, los pullbacks y pushouts homotópicos pueden definirse por la propiedad universal débil de límites o colímites homotópicos o bien mediante pullbacks o pushouts homotópicos estándar.
- El *join* del diagrama  $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$  es el pushout homotópico del pullback homotópico de dicho diagrama:



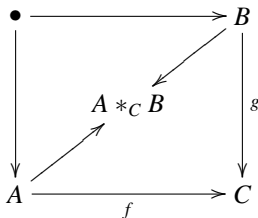
# Pushouts y pullbacks homotópicos

- Decimos que el cuadrado resultante, o cualquiera homotópicamente equivalente a él es un cuadrado pullback homotópico
- La noción dual de Eckmann-Hilton corresponde con el de pushout homotópico
- Como en el caso clásico, los pullbacks y pushouts homotópicos pueden definirse por la propiedad universal débil de límites o colímites homotópicos o bien mediante pullbacks o pushouts homotópicos estándar.
- El *join* del diagrama  $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$  es el pushout homotópico del pullback homotópico de dicho diagrama:



# Pushouts y pullbacks homotópicos

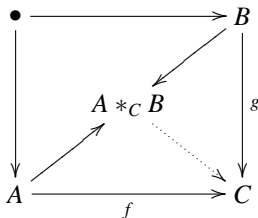
- Decimos que el cuadrado resultante, o cualquiera homotópicamente equivalente a él es un cuadrado pullback homotópico
- La noción dual de Eckmann-Hilton corresponde con el de pushout homotópico
- Como en el caso clásico, los pullbacks y pushouts homotópicos pueden definirse por la propiedad universal débil de límites o colímites homotópicos o bien mediante pullbacks o pushouts homotópicos estándar.
- El *join* del diagrama  $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$  es el pushout homotópico del pullback homotópico de dicho diagrama:





# Pushouts y pullbacks homotópicos

- Decimos que el cuadrado resultante, o cualquiera homotópicamente equivalente a él es un cuadrado pullback homotópico
- La noción dual de Eckmann-Hilton corresponde con el de pushout homotópico
- Como en el caso clásico, los pullbacks y pushouts homotópicos pueden definirse por la propiedad universal débil de límites o colímites homotópicos o bien mediante pullbacks o pushouts homotópicos estándar.
- El *join* del diagrama  $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$  es el pushout homotópico del pullback homotópico de dicho diagrama:



# Pushouts y pullbacks homotópicos

- Consideramos la subcategoría plena  $\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}_+} \subset \mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$  formada por aquellos espacios exteriores bien basados  $(X, \alpha)$  tales que existe una aplicación exterior  $r : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  (necesariamente es única salvo homotopía exterior)

# Pushouts y pullbacks homotópicos

- Consideramos la subcategoría plena  $\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}+} \subset \mathbf{E}_w^{\mathbb{R}+}$  formada por aquellos espacios exteriores bien basados  $(X, \alpha)$  tales que existe una aplicación exterior  $r : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  (necesariamente es única salvo homotopía exterior)
- Esta restricción no es muy fuerte: si  $\mathbf{P}_0^{\mathbb{R}+}$  es la subcategoría plena de  $\mathbf{P}_\infty^{\mathbb{R}+}$  de espacios propiamente bien basados entonces  $\mathbf{P}_0^{\mathbb{R}+} \subset \mathbf{E}_0^{\mathbb{R}+}$  mediante el embebimiento pleno cocompacto.

# Pushouts y pullbacks homotópicos

- Consideramos la subcategoría plena  $\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}_+} \subset \mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$  formada por aquellos espacios exteriores bien basados  $(X, \alpha)$  tales que existe una aplicación exterior  $r : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  (necesariamente es única salvo homotopía exterior)
- Esta restricción no es muy fuerte: si  $\mathbf{P}_0^{\mathbb{R}_+}$  es la subcategoría plena de  $\mathbf{P}_\infty^{\mathbb{R}_+}$  de espacios propiamente bien basados entonces  $\mathbf{P}_0^{\mathbb{R}_+} \subset \mathbf{E}_0^{\mathbb{R}_+}$  mediante el embebimiento pleno cocompacto.
- $\mathbb{R}_+$  (con la identidad) es objeto inicial y es objeto final salvo homotopía exterior.

# Pushouts y pullbacks homotópicos

- Consideramos la subcategoría plena  $\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}_+} \subset \mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$  formada por aquellos espacios exteriores bien basados  $(X, \alpha)$  tales que existe una aplicación exterior  $r : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  (necesariamente es única salvo homotopía exterior)
- Esta restricción no es muy fuerte: si  $\mathbf{P}_0^{\mathbb{R}_+}$  es la subcategoría plena de  $\mathbf{P}_\infty^{\mathbb{R}_+}$  de espacios propiamente bien basados entonces  $\mathbf{P}_0^{\mathbb{R}_+} \subset \mathbf{E}_0^{\mathbb{R}_+}$  mediante el embebimiento pleno cocompacto.
- $\mathbb{R}_+$  (con la identidad) es objeto inicial y es objeto final salvo homotopía exterior.

## Teorema

$\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}_+}$  con la estructura inducida por  $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$  es una  $J$ -categoría (Doeraene)

# Versiones axiomáticas exteriores.

## Definición (Fat wedge exterior)

Sea  $(X, \alpha)$  un espacio exterior basado.

# Versiones axiomáticas exteriores.

## Definición (Fat wedge exterior)

Sea  $(X, \alpha)$  un espacio exterior basado. Se define el  $n$ -ésimo fat wedge exterior de  $(X, \alpha)$ ,  $T^n(X, \alpha) \xrightarrow{j_n} X^n$ , inductivamente como sigue:

# Versiones axiomáticas exteriores.

## Definición (Fat wedge exterior)

Sea  $(X, \alpha)$  un espacio exterior basado. Se define el  $n$ -ésimo fat wedge exterior de  $(X, \alpha)$ ,  $T^n(X, \alpha) \xrightarrow{j_n} X^n$ , inductivamente como sigue:

$T^1(X, \alpha) = \mathbb{R}_+$ ,  $j_1 = \alpha$ , y se define  $j_n : T^n(X, \alpha) \rightarrow X^n$  como en join en **E** :



# Versiones axiomáticas exteriores.

## Definición (Fat wedge exterior)

Sea  $(X, \alpha)$  un espacio exterior basado. Se define el  $n$ -ésimo fat wedge exterior de  $(X, \alpha)$ ,  $T^n(X, \alpha) \xrightarrow{j_n} X^n$ , inductivamente como sigue:

$T^1(X, \alpha) = \mathbb{R}_+, j_1 = \alpha$ , y se define  $j_n : T^n(X, \alpha) \rightarrow X^n$  como en join en **E** :

$$\begin{array}{ccccc}
 \bullet & \xrightarrow{\quad} & X \times T^{n-1}(X, \alpha) & & \\
 \downarrow & & \swarrow & \searrow & \downarrow \\
 & & T^n(X, \alpha) & & id_X \times j_{n-1} \\
 & \nearrow & \searrow & \nearrow & \\
 \mathbb{R}_+ \times X^{n-1} & \xrightarrow{\quad} & X^n & & \\
 & \searrow \alpha \times id_{X^{n-1}} & \nearrow j_n & & 
 \end{array}$$

# Versiones axiomáticas exteriores

## Definición (Fibración de Ganea)

La  $n$ -ésima fibración de Ganea exterior de  $(X, \alpha)$ ,  $G_n(X, \alpha) \xrightarrow{p_n} X$ , se define inductivamente como:

# Versiones axiomáticas exteriores

## Definición (Fibración de Ganea)

La  $n$ -ésima fibración de Ganea exterior de  $(X, \alpha)$ ,  $G_n(X, \alpha) \xrightarrow{p_n} X$ , se define inductivamente como:  $G_1(X, \alpha) = P^{\mathbb{R}+}(X, \alpha)$  es el espacio exterior de caminos de  $\alpha$ , construido como el pullback (homotópico) exterior de  $\mathbb{R}_+ \xrightarrow{\alpha} X \xleftarrow{d_0} X^I$ .

# Versiones axiomáticas exteriores

## Definición (Fibración de Ganea)

La  $n$ -ésima fibración de Ganea exterior de  $(X, \alpha)$ ,  $G_n(X, \alpha) \xrightarrow{p_n} X$ , se define inductivamente como:  $G_1(X, \alpha) = P^{\mathbb{R}^+}(X, \alpha)$  es el espacio exterior de caminos de  $\alpha$ , construido como el pullback (homotópico) exterior de  $\mathbb{R}_+ \xrightarrow{\alpha} X \xleftarrow{d_0} X^I$ . La composición  $p_1: P^{\mathbb{R}^+}(X, \alpha) \longrightarrow X^I \xrightarrow{d_1} X$ , es la correspondiente fibración de caminos.

# Versiones axiomáticas exteriores

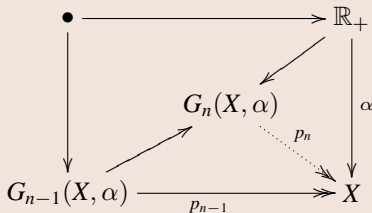
## Definición (Fibración de Ganea)

La  $n$ -ésima fibración de Ganea exterior de  $(X, \alpha)$ ,  $G_n(X, \alpha) \xrightarrow{p_n} X$ , se define inductivamente como:  $G_1(X, \alpha) = P^{\mathbb{R}^+}(X, \alpha)$  es el espacio exterior de caminos de  $\alpha$ , construido como el pullback (homotópico) exterior de  $\mathbb{R}_+ \xrightarrow{\alpha} X \xleftarrow{d_0} X^I$ . La composición  $p_1: P^{\mathbb{R}^+}(X, \alpha) \longrightarrow X^I \xrightarrow{d_1} X$ , es la correspondiente fibración de caminos. Entonces,  $G_n(X, \alpha)$  es el join:

## Versiones axiomáticas exteriores

## Definición (Fibración de Ganea)

La  $n$ -ésima fibración de Ganea exterior de  $(X, \alpha)$ ,  $G_n(X, \alpha) \xrightarrow{p_n} X$ , se define inductivamente como:  $G_1(X, \alpha) = P^{\mathbb{R}^+}(X, \alpha)$  es el espacio exterior de caminos de  $\alpha$ , construido como el pullback (homotópico) exterior de  $\mathbb{R}_+ \xrightarrow{\alpha} X \xleftarrow{d_0} X^I$ . La composición  $p_1: P^{\mathbb{R}^+}(X, \alpha) \longrightarrow X^I \xrightarrow{d_1} X$ , es la correspondiente fibración de caminos. Entonces,  $G_n(X, \alpha)$  es el join:



# La definición por recubrimientos

## Definición

Dado  $X$  un espacio exterior, se dice que un abierto  $U \subset X$  es  $e$ -categórico si existe un diagrama en  $\mathbf{E}$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\quad} & X \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathbb{R}_+ & \end{array}$$

conmutativo salvo homotopía exterior. Así, la *categoría L.S. exterior* de  $X$ ,  $e\text{-cat}(X)$ , es el menor  $n$  (o infinito) tal que  $X$  se puede recubrir por  $n$  abiertos  $e$ -categóricos.

# La definición por recubrimientos

## Definición

Dado  $X$  un espacio exterior, se dice que un abierto  $U \subset X$  es  $e$ -categórico si existe un diagrama en  $\mathbf{E}$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\quad} & X \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathbb{R}_+ & \end{array}$$

conmutativo salvo homotopía exterior. Así, la *categoría L.S. exterior* de  $X$ ,  $e\text{-cat}(X)$ , es el menor  $n$  (o infinito) tal que  $X$  se puede recubrir por  $n$  abiertos  $e$ -categóricos.

De forma análoga se define

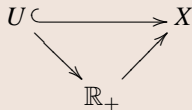
- *abierto  $\alpha$ - $e$ -categórico* (originando  $e\text{-cat}_{[\alpha]}(X)$ )



## La definición por recubrimientos

## Definición

Dado  $X$  un espacio exterior, se dice que un abierto  $U \subset X$  es  $e$ -categórico si existe un diagrama en  $\mathbf{E}$



conmutativo salvo homotopía exterior. Así, la categoría  $L.S. \text{ exterior}$  de  $X$ ,  $e\text{-cat}(X)$ , es el menor  $n$  (o infinito) tal que  $X$  se puede recubrir por  $n$  abiertos e-categóricos.

De forma análoga se define

- *abierto  $\alpha$ -e-categorico* (originando  $e\text{-cat}_{[\alpha]}(X)$ )
- *abierto basadamente categorico* (originando  $e\text{-cat}_{[\alpha]}^*(X)$ )

# Caracterizaciones axiomáticas en el caso exterior

## Teorema (Caracterización axiomática exterior)

*Sea  $(X, \alpha)$  un espacio exterior normal en  $\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}+}$ . Entonces son equivalentes:*

# Caracterizaciones axiomáticas en el caso exterior

## Teorema (Caracterización axiomática exterior)

Sea  $(X, \alpha)$  un espacio exterior normal en  $\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}+}$ . Entonces son equivalentes:

- $e\text{-cat}_{[\alpha]}(X) \leq n$  (respec.  $e\text{-cat}_{[\alpha]}^*(X) \leq n$ )

## Caracterizaciones axiomáticas en el caso exterior

## Teorema (Caracterización axiomática exterior)

Sea  $(X, \alpha)$  un espacio exterior normal en  $\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}+}$ . Entonces son equivalentes:

- $e\text{-cat}_{[\alpha]}(X) \leq n$  (respec.  $e\text{-cat}_{[\alpha]}^*(X) \leq n$ )
- La aplicación diagonal  $\Delta_n : X \rightarrow X^n$  se factoriza, salvo homotopía exterior (respec. homotopía exterior basada), a través del  $n$ -ésimo fat wedge exterior:

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & T^n(X, \alpha) \\ & \searrow \Delta_n & \downarrow j_n \\ & & X^n \end{array}$$



# El descenso al caso propio.

## Teorema

*Sea  $X$  un espacio en  $\mathbf{P}_\infty$ .*

# El descenso al caso propio.

## Teorema

*Sea  $X$  un espacio en  $\mathbf{P}_\infty$ . Entonces*

$$p\text{-cat}(X) = e\text{-cat}(X_{cc})$$

# El descenso al caso propio.

## Teorema

Sea  $X$  un espacio en  $\mathbf{P}_\infty$ . Entonces

$$p\text{-cat}(X) = e\text{-cat}(X_{cc})$$

Además, para todo espacio propiamente bien basado  $(X, \alpha)$  en  $\mathbf{P}_\infty$ ,

$$p\text{-cat}_{[\alpha]}(X) = e\text{-cat}_{[\alpha_{cc}]}(X_{cc}), \quad p\text{-cat}_{[\alpha]}^*(X) = e\text{-cat}_{[\alpha_{cc}]}^*(X_{cc}).$$



# El descenso al caso propio.

## Teorema (Caracterización axiomática propia)

*Sea  $(X, \alpha)$  en  $\mathbf{P}_\infty$ , un espacio propiamente bien basado. Son equivalentes:*

# El descenso al caso propio.

## Teorema (Caracterización axiomática propia)

Sea  $(X, \alpha)$  en  $\mathbf{P}_\infty$ , un espacio propiamente bien basado. Son equivalentes:

- $p\text{-cat}_{[\alpha]}(X) \leq n$  (respec.  $p\text{-cat}_{[\alpha]}^*(X) \leq n$ )

# El descenso al caso propio.

## Teorema (Caracterización axiomática propia)

Sea  $(X, \alpha)$  en  $\mathbf{P}_\infty$ , un espacio propiamente bien basado. Son equivalentes:

- $p\text{-cat}_{[\alpha]}(X) \leq n$  (respec.  $p\text{-cat}_{[\alpha]}^*(X) \leq n$ )
- La aplicación diagonal  $\Delta_n : X_{cc} \rightarrow X_{cc}^n$  factoriza a través de  $n$ -ésimo fat wedge salvo homotopía exterior (respec. homotopía exterior basada)

$$\begin{array}{ccc}
 X_{cc} & \longrightarrow & T^n(X_{cc}, \alpha_{cc}) \\
 & \searrow \Delta_n & \downarrow j_n \\
 & & X_{cc}^n
 \end{array}$$

# El descenso al caso propio.

## Teorema (Caracterización axiomática propia)

Sea  $(X, \alpha)$  en  $\mathbf{P}_\infty$ , un espacio propiamente bien basado. Son equivalentes:

- $p\text{-cat}_{[\alpha]}(X) \leq n$  (respec.  $p\text{-cat}_{[\alpha]}^*(X) \leq n$ )
- La aplicación diagonal  $\Delta_n : X_{cc} \rightarrow X_{cc}^n$  factoriza a través de  $n$ -ésimo fat wedge salvo homotopía exterior (respec. homotopía exterior basada)

$$\begin{array}{ccc}
 X_{cc} & \longrightarrow & T^n(X_{cc}, \alpha_{cc}) \\
 & \searrow \Delta_n & \downarrow j_n \\
 & & X_{cc}^n
 \end{array}$$

- La  $n$ -ésima fibración de Ganea exterior  $p_n : G_n(X_{cc}, \alpha_{cc}) \rightarrow X_{cc}$  admite una sección homotópica exterior (respec. sección homotópica basada).

# Caracterización de co-H-espacios propios

# Caracterización de co-H-espacios propios

Todos los espacios, aplicaciones y homotopías son basados.

# Caracterización de co-H-espacios propios

Todos los espacios, aplicaciones y homotopías son basados.

## Definición

Un *co-H-espacio propio* es un espacio propiamente bien basado  $(X, \alpha)$  tal que existe una aplicación propia  $\mu : X \rightarrow X \vee_{\alpha} X$  de forma que el diagrama

# Caracterización de co-H-espacios propios

Todos los espacios, aplicaciones y homotopías son basados.

## Definición

Un *co-H-espacio propio* es un espacio propiamente bien basado  $(X, \alpha)$  tal que existe una aplicación propia  $\mu : X \rightarrow X \vee_{\alpha} X$  de forma que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xleftarrow{\{\alpha r, id\}} & X \vee_{\alpha} X & \xrightarrow{\{id, \alpha r\}} & X \\
 & \searrow id_X & \uparrow \mu & \nearrow id_X & \\
 & & X & & 
 \end{array}$$

es conmutativo salvo homotopía propia. Aquí  $r : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  es una retracción de  $\alpha$ ,  $X \vee_{\alpha} X$  es el pushout de  $X \xleftarrow{\alpha} \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\alpha} X$  y  $\{f, g\}$  denota el morfismo pushout inducido por  $f$  y  $g$ .



# Caracterización de co-H-espacios propios

## Teorema (Caracterización de co-H-espacio propio)

*Sea  $(X, \alpha)$  espacio propiamente bien basado en  $\mathbf{P}_\infty$ . Entonces son equivalentes:*

# Caracterización de co-H-espacios propios

## Teorema (Caracterización de co-H-espacio propio)

*Sea  $(X, \alpha)$  espacio propiamente bien basado en  $\mathbf{P}_\infty$ . Entonces son equivalentes:*

- *$(X, \alpha)$  es co-H-espacio propio*

# Caracterización de co-H-espacios propios

## Teorema (Caracterización de co-H-espacio propio)

*Sea  $(X, \alpha)$  espacio propiamente bien basado en  $\mathbf{P}_\infty$ . Entonces son equivalentes:*

- *$(X, \alpha)$  es co-H-espacio propio*
- *$p\text{-cat}_{[\alpha]}^*(X) \leq 2$*

# Caracterización de co-H-espacios propios

## Teorema (Caracterización de co-H-espacio propio)

Sea  $(X, \alpha)$  espacio propiamente bien basado en  $\mathbf{P}_\infty$ . Entonces son equivalentes:

- $(X, \alpha)$  es co-H-espacio propio
- $p\text{-cat}_{[\alpha]}^*(X) \leq 2$

## Demostración.

# Caracterización de co-H-espacios propios

## Teorema (Caracterización de co-H-espacio propio)

Sea  $(X, \alpha)$  espacio propiamente bien basado en  $\mathbf{P}_\infty$ . Entonces son equivalentes:

- $(X, \alpha)$  es co- $H$ -espacio propio
- $p\text{-cat}_{[\alpha]}^*(X) \leq 2$

## Demostración.

- Si  $(X, \alpha)$  es espacio exterior en  $\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}+}$  entonces existe una equivalencia de homotopía exterior  $X \vee_\alpha X \simeq T^2(X, \alpha)$  (sólo se requieren herramientas axiomáticas)

# Caracterización de co-H-espacios propios

## Teorema (Caracterización de co-H-espacio propio)

Sea  $(X, \alpha)$  espacio propiamente bien basado en  $\mathbf{P}_\infty$ . Entonces son equivalentes:

- $(X, \alpha)$  es co-H-espacio propio
- $p\text{-cat}_{[\alpha]}^*(X) \leq 2$

## Demostración.

- Si  $(X, \alpha)$  es espacio exterior en  $\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}+}$  entonces existe una equivalencia de homotopía exterior  $X \vee_\alpha X \simeq T^2(X, \alpha)$  (sólo se requieren herramientas axiomáticas)
- Si  $(X, \alpha)$  es un espacio propiamente bien basado en  $\mathbf{P}_\infty$  entonces  $(X \vee_\alpha X)_{cc} \simeq X_{cc} \vee_{\alpha_{cc}} X_{cc} \quad (\simeq T^2(X_{cc}, \alpha_{cc}))$

# Caracterización de co-H-espacios propios

## Teorema (Caracterización de co-H-espacio propio)

Sea  $(X, \alpha)$  espacio propiamente bien basado en  $\mathbf{P}_\infty$ . Entonces son equivalentes:






- $(X, \alpha)$  es co-H-espacio propio
- $p\text{-cat}_{[\alpha]}^*(X) \leq 2$

## Demostración.

- Si  $(X, \alpha)$  es espacio exterior en  $\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}+}$  entonces existe una equivalencia de homotopía exterior  $X \vee_\alpha X \simeq T^2(X, \alpha)$  (sólo se requieren herramientas axiomáticas)
- Si  $(X, \alpha)$  es un espacio propiamente bien basado en  $\mathbf{P}_\infty$  entonces  $(X \vee_\alpha X)_{cc} \simeq X_{cc} \vee_{\alpha_{cc}} X_{cc} \quad (\simeq T^2(X_{cc}, \alpha_{cc}))$
- Utilización de la caracterización de Whitehead (por fat-wedge)



# Algunas referencias adicionales

-  J.P. Doeraene. Homotopy pullbacks, homotopy pushouts and joins. *Bull. Belg. Math. Soc.* 5(1) (1998), 15-37.
-  J.P. Doeraene. L.S.-category in a model category. *Journal of Pure and Appl. Algebra* 84 (1993), 215-261.
-  J.M. García-Calciñes, M. García-Pinillos and L.J. Hernández-Paricio. A closed model category for proper homotopy and shape theories. *Bull. Austral. Math. Soc.* 57(2) (1998) 221-242.
-  J.M. García-Calciñes, M. García-Pinillos and L.J. Hernández-Paricio. Closed simplicial model structures for exterior and proper homotopy theory. *Appl. Categ. Structures* 12(3) (2004), 225-243.
-  M. Mather. Pull-backs in Homotopy Theory. *Can. J. Math.* 28(2) (1976), 225-263.



¡GRACIAS!