Una versión de tipo Whitehead-Ganea para la noción de categoría L.S. propia

J.M. García Calcines[1] P.R. García Díaz[1] A. Murillo Mas[2]

[1]Departamento de Matemática Fundamental
Universidad de La Laguna

[2]Departamento de Álgebra, Geometría y Topología
Universidad de Málaga

3-4 de noviembre de 2006 /XIII Encuentro de Topología. Castro Urdiales.

Esquema de la charla

La categoría L.S. clásica.

Definition

La categoría de Lusternik-Schnirelmann $cat(X)$ de un espacio X es el menor entero n (o infinito) para el cual existe un recubrimiento formado por n abiertos contráctiles en X

La categoría L.S. clásica.

Definition

La categoría de Lusternik-Schnirelmann $cat(X)$ de un espacio X es el menor entero n (o infinito) para el cual existe un recubrimiento formado por n abiertos contráctiles en X

- L. Lusternik and L.Schnirelmann, *Méthodes Topologiques dans les Problemes Variationnels*, Hermann, Paris, 1934

La categoría L.S. clásica.

Definition

La categoría de Lusternik-Schnirelmann $cat(X)$ de un espacio X es el menor entero n (o infinito) para el cual existe un recubrimiento formado por n abiertos contráctiles en X

- L. Lusternik and L.Schnirelmann, *Méthodes Topologiques dans les Problemes Variationnels*, Hermann, Paris, 1934
- R.H. Fox, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, Ann. of Math. **42** (1941), 333-370.

La categoría L.S. clásica.

Definition

La categoría de Lusternik-Schnirelmann $cat(X)$ de un espacio X es el menor entero n (o infinito) para el cual existe un recubrimiento formado por n abiertos contráctiles en X

- L. Lusternik and L.Schnirelmann, *Méthodes Topologiques dans les Problemes Variationnels*, Hermann, Paris, 1934
- R.H. Fox, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, Ann. of Math. **42** (1941), 333-370.

Existe una versión punteada, $\mathrm{cat}^*(X)$, en la cual los abiertos deben contener al punto base y tanto las aplicaciones como las homotopías son punteadas. Además, para condiciones no muy restrictivas coincide con la libre:

La categoría L.S. clásica.

Definition

La categoría de Lusternik-Schnirelmann $cat(X)$ de un espacio X es el menor entero n (o infinito) para el cual existe un recubrimiento formado por n abiertos contráctiles en X

- L. Lusternik and L.Schnirelmann, *Méthodes Topologiques dans les Problemes Variationnels*, Hermann, Paris, 1934
- R.H. Fox, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, Ann. of Math. **42** (1941), 333-370.

Existe una versión punteada, $\mathrm{cat}^*(X)$, en la cual los abiertos deben contener al punto base y tanto las aplicaciones como las homotopías son punteadas. Además, para condiciones no muy restrictivas coincide con la libre:

Lema

Sea X un espacio normal, conexo por caminos y con punto base no degenerado. Entonces $cat(X) = cat^*(X)$

Definiciones alternativas: Whitehead y Ganea

Definiciones alternativas: Whitehead y Ganea

Definición (Fat wedge)

El n-ésimo fat wedge de X es el subespacio

$$T^n(X) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n : x_i = *, \;\; \text{para algún} \;\; i \in \{1, \ldots, n\}\} \subset X^n$$

Definiciones alternativas: Whitehead y Ganea

Definición (Fat wedge)

El n-ésimo fat wedge de X es el subespacio

$$T^n(X) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n : x_i = *, \ \text{para algún } \ i \in \{1, \ldots, n\}\} \subset X^n$$

Definición (Fibración de Ganea)

Se define la n-ésima fibración de Ganea de X, $p_n : G_nX \twoheadrightarrow X$, inductivamente como sigue:

Definiciones alternativas: Whitehead y Ganea

Definición (Fat wedge)

El n-ésimo fat wedge de X es el subespacio

$$T^n(X) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n : x_i = *, \ \text{ para algún } \ i \in \{1, \ldots, n\}\} \subset X^n$$

Definición (Fibración de Ganea)

Se define la n-ésima fibración de Ganea de X, $p_n : G_n X \twoheadrightarrow X$, inductivamente como sigue: $G_1 X = PX$ es el espacio de caminos y $p_1 = p : PX \twoheadrightarrow X$ es la fibración de caminos.

Definiciones alternativas: Whitehead y Ganea

Definición (Fat wedge)

El n-ésimo fat wedge de X es el subespacio

$$T^n(X) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n : x_i = *, \ \text{ para algún } \ i \in \{1, \ldots, n\}\} \subset X^n$$

Definición (Fibración de Ganea)

Se define la n-ésima fibración de Ganea de X, $p_n : G_nX \twoheadrightarrow X$, inductivamente como sigue: $G_1X = PX$ es el espacio de caminos y $p_1 = p : PX \twoheadrightarrow X$ es la fibración de caminos. Supongamos construida $p_{n-1} : G_{n-1}X \twoheadrightarrow X$; entonces:

$$\begin{tikzcd} G_{n-1}X \arrow[d, two heads, "p_{n-1}"'] \\ X \end{tikzcd}$$

Definiciones alternativas: Whitehead y Ganea

Definición (Fat wedge)

El n-ésimo fat wedge de X es el subespacio

$$T^n(X) = \{(x_1, ..., x_n) \in X^n : x_i = *, \ \text{para algún} \ i \in \{1, ..., n\}\} \subset X^n$$

Definición (Fibración de Ganea)

Se define la n-ésima fibración de Ganea de X, $p_n : G_nX \twoheadrightarrow X$, inductivamente como sigue: $G_1X = PX$ es el espacio de caminos y $p_1 = p : PX \twoheadrightarrow X$ es la fibración de caminos. Supongamos construida $p_{n-1} : G_{n-1}X \twoheadrightarrow X$; entonces:

$$\begin{tikzcd} F_{n-1}X \arrow[d] \\ G_{n-1}X \arrow[d, two heads, "p_{n-1}"'] \\ X \end{tikzcd}$$

Definiciones alternativas: Whitehead y Ganea

Definición (Fat wedge)

El n-ésimo fat wedge de X es el subespacio

$$T^n(X) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n : x_i = *, \ \text{ para algún } \ i \in \{1, \ldots, n\}\} \subset X^n$$

Definición (Fibración de Ganea)

Se define la n-ésima fibración de Ganea de X, $p_n : G_nX \twoheadrightarrow X$, inductivamente como sigue: $G_1X = PX$ es el espacio de caminos y $p_1 = p : PX \twoheadrightarrow X$ es la fibración de caminos. Supongamos construida $p_{n-1} : G_{n-1}X \twoheadrightarrow X$; entonces:

$$\begin{tikzcd}
F_{n-1}X \arrow[d] & \\
G_{n-1}X \arrow[r] \arrow[d, two heads, "p_{n-1}"'] & G_nX \\
X &
\end{tikzcd}$$

Definiciones alternativas: Whitehead y Ganea

Definición (Fat wedge)

El n-ésimo fat wedge de X es el subespacio

$$T^n(X) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n : x_i = *, \ \text{ para algún } \ i \in \{1, \ldots, n\}\} \subset X^n$$

Definición (Fibración de Ganea)

Se define la n-ésima fibración de Ganea de X, $p_n : G_nX \twoheadrightarrow X$, inductivamente como sigue: $G_1X = PX$ es el espacio de caminos y $p_1 = p : PX \twoheadrightarrow X$ es la fibración de caminos. Supongamos construida $p_{n-1} : G_{n-1}X \twoheadrightarrow X$; entonces:

$$\begin{tikzcd}
F_{n-1}X \arrow[d] & \\
G_{n-1}X \arrow[r] \arrow[d, two heads, "p_{n-1}"'] & G_nX \arrow[dl, dotted, two heads, "p_n"] \\
X &
\end{tikzcd}$$

Teorema (Caracterizaciones de Whitehead y de Ganea)

Sea X un espacio normal, conexo por caminos y con punto base no degenerado. Son equivalentes

Teorema (Caracterizaciones de Whitehead y de Ganea)

Sea X un espacio normal, conexo por caminos y con punto base no degenerado. Son equivalentes

- $cat(X) \leq n$

Teorema (Caracterizaciones de Whitehead y de Ganea)

Sea X un espacio normal, conexo por caminos y con punto base no degenerado. Son equivalentes

- $cat(X) \leq n$
- *La aplicación diagonal factoriza, salvo homotopía, a través del n-ésimo fat wedge:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "\Delta_n"'] & T^n X \arrow[d, hook, "j_n"] \\ & X^n \end{tikzcd}$$

Teorema (Caracterizaciones de Whitehead y de Ganea)

Sea X un espacio normal, conexo por caminos y con punto base no degenerado. Son equivalentes

- $cat(X) \leq n$
- *La aplicación diagonal factoriza, salvo homotopía, a través del n-ésimo fat wedge:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "\Delta_n"'] & T^n X \arrow[d, hook, "j_n"] \\ & X^n \end{tikzcd}$$

- *La n-ésima fibración de Ganea $p_n : G_n X \twoheadrightarrow X$ admite una sección (homotópica)*

La categoría L.S. propia.

Invariantes por homotopía propia de tipo Lusternik-Schnirelmann han sido introducidos con éxito por R.Ayala, E. Domínguez, A. Márquez y A. Quintero:

La categoría L.S. propia.

Invariantes por homotopía propia de tipo Lusternik-Schnirelmann han sido introducidos con éxito por R.Ayala, E. Domínguez, A. Márquez y A. Quintero:

- R. Ayala, E. Domínguez, A. Márquez and A. Quintero. Lusternik-Schnirelmann invariants in proper homotopy theory. *Pacific J. Math.* 153 (1992) 201-215.

La categoría L.S. propia.

Invariantes por homotopía propia de tipo Lusternik-Schnirelmann han sido introducidos con éxito por R.Ayala, E. Domínguez, A. Márquez y A. Quintero:

- R. Ayala, E. Domínguez, A. Márquez and A. Quintero. Lusternik-Schnirelmann invariants in proper homotopy theory. *Pacific J. Math.* 153 (1992) 201-215.

  Posteriormente estudiados con mayor profundidad en:

- R. Ayala and A. Quintero. On the Ganea strong category in proper homotopy. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 41 (1998) 247-263.

La categoría L.S. propia.

Invariantes por homotopía propia de tipo Lusternik-Schnirelmann han sido introducidos con éxito por R.Ayala, E. Domínguez, A. Márquez y A. Quintero:

- R. Ayala, E. Domínguez, A. Márquez and A. Quintero. Lusternik-Schnirelmann invariants in proper homotopy theory. *Pacific J. Math.* 153 (1992) 201-215.

Posteriormente estudiados con mayor profundidad en:

- R. Ayala and A. Quintero. On the Ganea strong category in proper homotopy. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 41 (1998) 247-263.
- M. Cárdenas, F.F. Lasheras and A. Quintero. Minimal covers of open manifolds with half-spaces and the proper L-S category of product spaces. *Bull. Belgian Math. Soc.* 9 (2002) 419-431.

La categoría L.S. propia.

Invariantes por homotopía propia de tipo Lusternik-Schnirelmann han sido introducidos con éxito por R.Ayala, E. Domínguez, A. Márquez y A. Quintero:

- R. Ayala, E. Domínguez, A. Márquez and A. Quintero. Lusternik-Schnirelmann invariants in proper homotopy theory. *Pacific J. Math.* 153 (1992) 201-215.

Posteriormente estudiados con mayor profundidad en:

- R. Ayala and A. Quintero. On the Ganea strong category in proper homotopy. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 41 (1998) 247-263.
- M. Cárdenas, F.F. Lasheras and A. Quintero. Minimal covers of open manifolds with half-spaces and the proper L-S category of product spaces. *Bull. Belgian Math. Soc.* 9 (2002) 419-431.
- M. Cárdenas, F.F. Lasheras, F. Muro and A. Quintero. Proper L-S category, fundamental pro-groups and 2-dimensional proper co-H-spaces. *Topology Appl.*, **153** (2005) 580-604

La categoría L.S. propia.

Invariantes por homotopía propia de tipo Lusternik-Schnirelmann han sido introducidos con éxito por R.Ayala, E. Domínguez, A. Márquez y A. Quintero:

- R. Ayala, E. Domínguez, A. Márquez and A. Quintero. Lusternik-Schnirelmann invariants in proper homotopy theory. *Pacific J. Math.* 153 (1992) 201-215.

  Posteriormente estudiados con mayor profundidad en:
- R. Ayala and A. Quintero. On the Ganea strong category in proper homotopy. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 41 (1998) 247-263.
- M. Cárdenas, F.F. Lasheras and A. Quintero. Minimal covers of open manifolds with half-spaces and the proper L-S category of product spaces. *Bull. Belgian Math. Soc.* 9 (2002) 419-431.
- M. Cárdenas, F.F. Lasheras, F. Muro and A. Quintero. Proper L-S category, fundamental pro-groups and 2-dimensional proper co-H-spaces. *Topology Appl.*, **153** (2005) 580-604
- M. Cárdenas, F. Muro and A. Quintero. The proper L-S category of Whitehead manifolds. *Topology Appl.*, **153** (2005) 557-579

La definición de categoría L.S. propia.

La definición de categoría L.S. propia.

- $f : X \longrightarrow Y$ es *propia* si es continua y $f^{-1}(K)$ es compacto (y cerrado) para todo $K \subset Y$ compacto-cerrado. La categoría de espacios y aplicaciones propias se denotará por $\mathbf{P}$.

La definición de categoría L.S. propia.

- $f : X \longrightarrow Y$ es *propia* si es continua y $f^{-1}(K)$ es compacto (y cerrado) para todo $K \subset Y$ compacto-cerrado. La categoría de espacios y aplicaciones propias se denotará por **P**.
- Un *final de Freudenthal* es un elemento en $\mathcal{F}(X) = \lim \pi_0(X - K)$

La definición de categoría L.S. propia.

- $f : X \to Y$ es *propia* si es continua y $f^{-1}(K)$ es compacto (y cerrado) para todo $K \subset Y$ compacto-cerrado. La categoría de espacios y aplicaciones propias se denotará por **P**.
- Un *final de Freudenthal* es un elemento en $\mathcal{F}(X) = \lim \pi_0(X - K)$
- Una aplicación propia $\alpha : \mathbb{R}_+ \to X$ se denomina *rayo (base)* en X. Todo espacio X en $\mathbf{P}_\infty \subset \mathbf{P}$ (no compactos, T_2, localmente compactos y σ-compactos) admite una aplicación propia $r : X \to \mathbb{R}_+$.

La definición de categoría L.S. propia.

- $f : X \longrightarrow Y$ es *propia* si es continua y $f^{-1}(K)$ es compacto (y cerrado) para todo $K \subset Y$ compacto-cerrado. La categoría de espacios y aplicaciones propias se denotará por **P**.
- Un *final de Freudenthal* es un elemento en $\mathcal{F}(X) = \lim \pi_0(X - K)$
- Una aplicación propia $\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ se denomina *rayo (base)* en X. Todo espacio X en $\mathbf{P}_\infty \subset \mathbf{P}$ (no compactos, T_2, localmente compactos y σ-compactos) admite una aplicación propia $r : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

Definición (Ayala-Domínguez-Márquez-Quintero)

Dado X un espacio en $\mathbf{P}_\infty$, un abierto U se dice que es p-categórico si su clausura es propiamente deformable:

$$\begin{tikzcd} \overline{U} \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & X \\ & \mathbb{R}_+ \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Entonces *p-cat*(X) es el menor entero n (o infinito) para el cual existe un recubrimiento por n abiertos p-categóricos.

Existe una versión basada, que es más práctica: Dado un final fuerte $[\alpha] \in [\mathbb{R}_+, X]_p$ la α-categoría L.S. propia, *p-cat*$_{[\alpha]}(X)$, en la que en los diagramas de deformación

$$\begin{tikzcd} \overline{U} \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & X \\ & \mathbb{R}_+ \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Existe una versión basada, que es más práctica: Dado un final fuerte $[\alpha] \in [\mathbb{R}_+, X]_p$ la α-categoría L.S. propia, $p\text{-}cat_{[\alpha]}(X)$, en la que en los diagramas de deformación

$$\begin{tikzcd} \overline{U} \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & X \\ & \mathbb{R}_+ \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Si X es un ANR localmente conexo por caminos en $\mathbf{P}_\infty$ y con un solo final entonces

Existe una versión basada, que es más práctica: Dado un final fuerte $[\alpha] \in [\mathbb{R}_+, X]_p$ la α-categoría L.S. propia, *p-cat*$_{[\alpha]}(X)$, en la que en los diagramas de deformación

$$\begin{tikzcd} \overline{U} \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & X \\ & \mathbb{R}_+ \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Si X es un ANR localmente conexo por caminos en $\mathbf{P}_\infty$ y con un solo final entonces

- *p-cat*$(X) \leq$ *p-cat*$_{[\alpha]}(X) \leq$ *p-cat*$(X) + 1$

Existe una versión basada, que es más práctica: Dado un final fuerte $[\alpha] \in [\mathbb{R}_+, X]_p$ la α-categoría L.S. propia, $p\text{-}cat_{[\alpha]}(X)$, en la que en los diagramas de deformación

$$\begin{tikzcd} \overline{U} \arrow[rr, hookrightarrow] \arrow[dr] & & X \\ & \mathbb{R}_+ \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Si X es un ANR localmente conexo por caminos en $\mathbf{P}_\infty$ y con un solo final entonces

- $p\text{-}cat(X) \leq p\text{-}cat_{[\alpha]}(X) \leq p\text{-}cat(X) + 1$
- Existe un final fuerte $[\alpha_0]$ tal que $p\text{-}cat(X) = p\text{-}cat_{[\alpha_0]}(X)$.

Existe una versión basada, que es más práctica: Dado un final fuerte $[\alpha] \in [\mathbb{R}_+, X]_p$ la α-categoría L.S. propia, $p\text{-}cat_{[\alpha]}(X)$, en la que en los diagramas de deformación

$$\begin{tikzcd} \overline{U} \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & X \\ & \mathbb{R}_+ \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Si X es un ANR localmente conexo por caminos en $\mathbf{P}_\infty$ y con un solo final entonces

- $p\text{-}cat(X) \leq p\text{-}cat_{[\alpha]}(X) \leq p\text{-}cat(X) + 1$
- Existe un final fuerte $[\alpha_0]$ tal que $p\text{-}cat(X) = p\text{-}cat_{[\alpha_0]}(X)$.

Teorema

Sea X un ANR localmente conexo por caminos en $\mathbf{P}_\infty$, con un solo final y propiamente bien basado por α. Entonces $p\text{-}cat_{[\alpha]}(X) = p\text{-}cat^*_{[\alpha]}(X)$.

Es importante hacer notar el gran contraste entre la categoría L.S. clásica y su análoga propia. Por ejemplo:

Es importante hacer notar el gran contraste entre la categoría L.S. clásica y su análoga propia. Por ejemplo:

- Si $n \neq 3$, $\mathbb{R}^n$ es la única n-variedad abierta con categoría L.S. propia 2

Es importante hacer notar el gran contraste entre la categoría L.S. clásica y su análoga propia. Por ejemplo:

- Si $n \neq 3$, $\mathbb{R}^n$ es la única n-variedad abierta con categoría L.S. propia 2
- La categoría L.S. propia de una amplia clase de 3-variedades de Whitehead (eventualmente, final-irreducibles, $\mathbb{R}^2$-irreducibles) es 4.

Es importante hacer notar el gran contraste entre la categoría L.S. clásica y su análoga propia. Por ejemplo:

- Si $n \neq 3$, $\mathbb{R}^n$ es la única n-variedad abierta con categoría L.S. propia 2
- La categoría L.S. propia de una amplia clase de 3-variedades de Whitehead (eventualmente, final-irreducibles, $\mathbb{R}^2$-irreducibles) es 4.

- También hay cierta analogía como la caracterización de los co-H-espacios propias por aquellos espacios con categoría L.S. propia menor o igual a 2

Es importante hacer notar el gran contraste entre la categoría L.S. clásica y su análoga propia. Por ejemplo:

- Si $n \neq 3$, $\mathbb{R}^n$ es la única n-variedad abierta con categoría L.S. propia 2
- La categoría L.S. propia de una amplia clase de 3-variedades de Whitehead (eventualmente, final-irreducibles, $\mathbb{R}^2$-irreducibles) es 4.
- También hay cierta analogía como la caracterización de los co-H-espacios propias por aquellos espacios con categoría L.S. propia menor o igual a 2

Por otro lado, existe a nuestro entender un hecho importante que podría impedir el desarrollo de la categoría L.S. propia:

Es importante hacer notar el gran contraste entre la categoría L.S. clásica y su análoga propia. Por ejemplo:

- Si $n \neq 3$, $\mathbb{R}^n$ es la única n-variedad abierta con categoría L.S. propia 2
- La categoría L.S. propia de una amplia clase de 3-variedades de Whitehead (eventualmente, final-irreducibles, $\mathbb{R}^2$-irreducibles) es 4.
- También hay cierta analogía como la caracterización de los co-H-espacios propias por aquellos espacios con categoría L.S. propia menor o igual a 2

Por otro lado, existe a nuestro entender un hecho importante que podría impedir el desarrollo de la categoría L.S. propia:

¡NO EXISTEN CARACTERIZACIONES DE TIPO WHITEHEAD O DE GANEA!

Los espacios exteriores. Propiedades.

Definición (Pinillos-Calcines-Paricio, 1998)

Un *espacio exterior* $(X, \varepsilon \subset \tau)$ consiste en un espacio topológico (X, τ) junto con una familia no vacía de abiertos ε (que llamaremos *externología*) que verifica

Los espacios exteriores. Propiedades.

Definición (Pinillos-Calcines-Paricio, 1998)

Un *espacio exterior* $(X, \varepsilon \subset \tau)$ consiste en un espacio topológico (X, τ) junto con una familia no vacía de abiertos ε (que llamaremos *externología*) que verifica

- Si $E, E' \in \varepsilon$ entonces $E \cap E' \in \varepsilon$

Los espacios exteriores. Propiedades.

Definición (Pinillos-Calcines-Paricio, 1998)

Un *espacio exterior* $(X, \varepsilon \subset \tau)$ consiste en un espacio topológico (X, τ) junto con una familia no vacía de abiertos ε (que llamaremos *externología*) que verifica

- Si $E, E' \in \varepsilon$ entonces $E \cap E' \in \varepsilon$
- Si $E \in \varepsilon$, $U \in \tau$ y $E \subset U$ entonces $U \in \varepsilon$.

Los espacios exteriores. Propiedades.

Definición (Pinillos-Calcines-Paricio, 1998)

Un *espacio exterior* $(X, \varepsilon \subset \tau)$ consiste en un espacio topológico (X, τ) junto con una familia no vacía de abiertos ε (que llamaremos *externología*) que verifica

- Si $E, E' \in \varepsilon$ entonces $E \cap E' \in \varepsilon$
- Si $E \in \varepsilon$, $U \in \tau$ y $E \subset U$ entonces $U \in \varepsilon$.

Una aplicación continua $f : (X, \varepsilon \subset \tau) \longrightarrow (X', \varepsilon' \subset \tau')$ se dice que es *exterior* si $f^{-1}(E) \in \varepsilon$ para todo $E \in \varepsilon'$.

Los espacios exteriores. Propiedades.

Definición (Pinillos-Calcines-Paricio, 1998)

Un *espacio exterior* $(X, \varepsilon \subset \tau)$ consiste en un espacio topológico (X, τ) junto con una familia no vacía de abiertos ε (que llamaremos *externología*) que verifica

- Si $E, E' \in \varepsilon$ entonces $E \cap E' \in \varepsilon$
- Si $E \in \varepsilon$, $U \in \tau$ y $E \subset U$ entonces $U \in \varepsilon$.

Una aplicación continua $f : (X, \varepsilon \subset \tau) \longrightarrow (X', \varepsilon' \subset \tau')$ se dice que es *exterior* si $f^{-1}(E) \in \varepsilon$ para todo $E \in \varepsilon'$.

Se denota a la categoría de los espacios exteriores por **E**.

Los espacios exteriores. Propiedades.

Definición (Pinillos-Calcines-Paricio, 1998)

Un *espacio exterior* $(X, \varepsilon \subset \tau)$ consiste en un espacio topológico (X, τ) junto con una familia no vacía de abiertos ε (que llamaremos *externología*) que verifica

- Si $E, E' \in \varepsilon$ entonces $E \cap E' \in \varepsilon$
- Si $E \in \varepsilon$, $U \in \tau$ y $E \subset U$ entonces $U \in \varepsilon$.

Una aplicación continua $f : (X, \varepsilon \subset \tau) \to (X', \varepsilon' \subset \tau')$ se dice que es *exterior* si $f^{-1}(E) \in \varepsilon$ para todo $E \in \varepsilon'$.

Se denota a la categoría de los espacios exteriores por $\mathbf{E}$.

- Si X es un espacio topológico se puede considerar la *externología cocompacta* $\varepsilon_{cc} = \{X - K : K$ es compacto y cerrado$\}$. El espacio exterior correspondiente se denotará por X_{cc}. Esta construcción da lugar a un embebimiento pleno

$$(-)_{cc} : \mathbf{P} \hookrightarrow \mathbf{E}$$

Los espacios exteriores. Propiedades.

Definición (Pinillos-Calcines-Paricio, 1998)

Un *espacio exterior* $(X, \varepsilon \subset \tau)$ consiste en un espacio topológico (X, τ) junto con una familia no vacía de abiertos ε (que llamaremos *externología*) que verifica

- Si $E, E' \in \varepsilon$ entonces $E \cap E' \in \varepsilon$
- Si $E \in \varepsilon$, $U \in \tau$ y $E \subset U$ entonces $U \in \varepsilon$.

Una aplicación continua $f : (X, \varepsilon \subset \tau) \longrightarrow (X', \varepsilon' \subset \tau')$ se dice que es *exterior* si $f^{-1}(E) \in \varepsilon$ para todo $E \in \varepsilon'$.

Se denota a la categoría de los espacios exteriores por $\mathbf{E}$.

- Si X es un espacio topológico se puede considerar la *externología cocompacta* $\varepsilon_{cc} = \{X - K : K \text{ es compacto y cerrado}\}$. El espacio exterior correspondiente se denotará por X_{cc}. Esta construcción da lugar a un embebimiento pleno

$$(-)_{cc} : \mathbf{P} \hookrightarrow \mathbf{E}$$

- $\mathbf{E}$ es una categoría completa y cocompleta.

Funtores cilindro y cocilindro exteriores

Sea X un espacio exterior arbitrario. Definimos su *cilindro* y su *cocilindro* como sigue:

Funtores cilindro y cocilindro exteriores

Sea X un espacio exterior arbitrario. Definimos su *cilindro* y su *cocilindro* como sigue:

- Cilindro de X :

Funtores cilindro y cocilindro exteriores

Sea X un espacio exterior arbitrario. Definimos su *cilindro* y su *cocilindro* como sigue:

- Cilindro de X : $X \bar{\times} I$

Funtores cilindro y cocilindro exteriores

Sea X un espacio exterior arbitrario. Definimos su *cilindro* y su *cocilindro* como sigue:

- Cilindro de X : $X\bar{\times}I$
  Con espacio subyacente el producto $X \times I$ y externología formada por aquellos abiertos del producto que contienen a subconjuntos de la forma $G \times I$, con G abierto exterior en X.

Funtores cilindro y cocilindro exteriores

Sea X un espacio exterior arbitrario. Definimos su *cilindro* y su *cocilindro* como sigue:

- Cilindro de X : $\quad X\bar{\times}I$
  Con espacio subyacente el producto $X \times I$ y externología formada por aquellos abiertos del producto que contienen a subconjuntos de la forma $G \times I$, con G abierto exterior en X. (Se puede restringir al caso propio).

Funtores cilindro y cocilindro exteriores

Sea X un espacio exterior arbitrario. Definimos su *cilindro* y su *cocilindro* como sigue:

- Cilindro de X : $\quad X\bar{\times}I$
  Con espacio subyacente el producto $X \times I$ y externología formada por aquellos abiertos del producto que contienen a subconjuntos de la forma $G \times I$, con G abierto exterior en X. (Se puede restringir al caso propio).

$$\text{Funtor cilindro } (-)\bar{\times}I : \mathbf{E} \to \mathbf{E}.$$

Funtores cilindro y cocilindro exteriores

Sea X un espacio exterior arbitrario. Definimos su *cilindro* y su *cocilindro* como sigue:

- Cilindro de X : $\quad X\bar{\times}I$
  Con espacio subyacente el producto $X \times I$ y externología formada por aquellos abiertos del producto que contienen a subconjuntos de la forma $G \times I$, con G abierto exterior en X. (Se puede restringir al caso propio).
  $$\text{Funtor cilindro } (-)\bar{\times}I : \mathbf{E} \to \mathbf{E}.$$
- Cocilindro de X :

Funtores cilindro y cocilindro exteriores

Sea X un espacio exterior arbitrario. Definimos su *cilindro* y su *cocilindro* como sigue:

- Cilindro de X : $X\bar{\times}I$
  Con espacio subyacente el producto $X \times I$ y externología formada por aquellos abiertos del producto que contienen a subconjuntos de la forma $G \times I$, con G abierto exterior en X. (Se puede restringir al caso propio).

  $$\text{Funtor cilindro } (-)\bar{\times}I : \mathbf{E} \to \mathbf{E}.$$

- Cocilindro de X : X^I

Funtores cilindro y cocilindro exteriores

Sea X un espacio exterior arbitrario. Definimos su *cilindro* y su *cocilindro* como sigue:

- Cilindro de X : $\quad X \bar{\times} I$
  Con espacio subyacente el producto $X \times I$ y externología formada por aquellos abiertos del producto que contienen a subconjuntos de la forma $G \times I$, con G abierto exterior en X. (Se puede restringir al caso propio).

$$\text{Funtor cilindro } (-)\bar{\times} I : \mathbf{E} \to \mathbf{E}.$$

- Cocilindro de X : $\quad X^I$
  Con espacio subyacente el espacio usual de funciones (topología compacto-abierta) y externología formada por aquellos abiertos que contienen a subconjuntos de la forma $(I, G) = \{\alpha \in X^I : \alpha(I) \subset G\}$, siendo G abierto exterior en X.

Funtores cilindro y cocilindro exteriores

Sea X un espacio exterior arbitrario. Definimos su *cilindro* y su *cocilindro* como sigue:

- Cilindro de X : $\quad X\bar{\times}I$
  Con espacio subyacente el producto $X \times I$ y externología formada por aquellos abiertos del producto que contienen a subconjuntos de la forma $G \times I$, con G abierto exterior en X. (Se puede restringir al caso propio).

$$\text{Funtor cilindro } (-)\bar{\times}I : \mathbf{E} \to \mathbf{E}.$$

- Cocilindro de X : $\quad X^I$
  Con espacio subyacente el espacio usual de funciones (topología compacto-abierta) y externología formada por aquellos abiertos que contienen a subconjuntos de la forma $(I, G) = \{\alpha \in X^I : \alpha(I) \subset G\}$, siendo G abierto exterior en X. (No se puede restringir al caso propio).

Funtores cilindro y cocilindro exteriores

Sea X un espacio exterior arbitrario. Definimos su *cilindro* y su *cocilindro* como sigue:

- Cilindro de X : $X\bar{\times}I$
  Con espacio subyacente el producto $X \times I$ y externología formada por aquellos abiertos del producto que contienen a subconjuntos de la forma $G \times I$, con G abierto exterior en X. (Se puede restringir al caso propio).

$$\text{Funtor cilindro } (-)\bar{\times}I : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}.$$

- Cocilindro de X : X^I
  Con espacio subyacente el espacio usual de funciones (topología compacto-abierta) y externología formada por aquellos abiertos que contienen a subconjuntos de la forma $(I, G) = \{\alpha \in X^I : \alpha(I) \subset G\}$, siendo G abierto exterior en X. (No se puede restringir al caso propio).

$$\text{Funtor cocilindro } (-)^I : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}.$$

Estructura de modelos para $\mathbf{E}$.

Definición (Cofibración exterior)

Una aplicación exterior $j : A \to X$ es una *cofibración exterior* si satisface la propiedad de extensión de homotopía en $\mathbf{E}$:

Estructura de modelos para **E**.

Definición (Cofibración exterior)

Una aplicación exterior $j : A \to X$ es una *cofibración exterior* si satisface la propiedad de extensión de homotopía en **E** :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\imath_0"] \arrow[d, "j"'] & A\bar{\times}I \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "j\bar{\times}id"] & \\
X \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\imath_0"'] & Y & \\
 & & X\bar{\times}I \arrow[ul, dotted]
\end{tikzcd}$$

Estructura de modelos para **E**.

Definición (Cofibración exterior)

Una aplicación exterior $j : A \longrightarrow X$ es una *cofibración exterior* si satisface la propiedad de extensión de homotopía en **E** :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\imath_0"] \arrow[d, "j"'] & A\bar{\times}I \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "j\bar{\times}id"] & \\
X \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\imath_0"'] & Y & \\
 & & X\bar{\times}I \arrow[ul, dotted]
\end{tikzcd}$$

- Si $j : A \longrightarrow X$ es una cofibración exterior cerrada topológicamente entonces también lo es exteriormente. En este caso es un isomorfismo exterior sobre su imagen.

Estructura de modelos para **E**.

Definición (Cofibración exterior)

Una aplicación exterior $j : A \longrightarrow X$ es una *cofibración exterior* si satisface la propiedad de extensión de homotopía en $\mathbf{E}$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\imath_0"] \arrow[d, "j"'] & A\bar{\times}I \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "j\bar{\times}id"] & \\
X \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\imath_0"'] & Y & \\
& & X\bar{\times}I \arrow[ul, dotted]
\end{tikzcd}$$

- Si $j : A \longrightarrow X$ es una cofibración exterior cerrada topológicamente entonces también lo es exteriormente. En este caso es un isomorfismo exterior sobre su imagen.
- Si $j : A \longrightarrow X$ es una aplicación propia, con A, X espacios Hausdorff y localmente compactos entonces j es cofibración propia si y sólo si $j_{cc} : A_{cc} \longrightarrow X_{cc}$ es cofibración exterior.

Estructura de modelos para $\mathbf{E}$.

Definición (Fibración exterior)

Una aplicación exterior $p : E \longrightarrow B$ se dice que es *fibración exterior* si satisface la propiedad de elevación de homotopía en $\mathbf{E}$:

Estructura de modelos para $\mathbf{E}$.

Definición (Fibración exterior)

Una aplicación exterior $p : E \to B$ se dice que es *fibración exterior* si satisface la propiedad de elevación de homotopía en $\mathbf{E}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\iota_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \bar{\times} I \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & B \end{tikzcd}$$

Estructura de modelos para **E**.

Definición (Fibración exterior)

Una aplicación exterior $p : E \to B$ se dice que es *fibración exterior* si satisface la propiedad de elevación de homotopía en $\mathbf{E}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\iota_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X\bar{\times}I \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & B \end{tikzcd}$$

Definición (Equivalencia débil exterior)

Una *equivalencia débil exterior* es una equivalencia de homotopía exterior.

Estructura de modelos para **E**.

Definición (Fibración exterior)

Una aplicación exterior $p : E \longrightarrow B$ se dice que es *fibración exterior* si satisface la propiedad de elevación de homotopía en $\mathbf{E}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\iota_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X\bar{\times}I \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & B \end{tikzcd}$$

Definición (Equivalencia débil exterior)

Una *equivalencia débil exterior* es una equivalencia de homotopía exterior.

- Dada $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación propia entonces f es equivalencia de homotopía propia si y sólo si $f_{cc} : X_{cc} \longrightarrow Y_{cc}$ es equivalencia de homotopía exterior.

Teorema

La categoría de los espacios exteriores $\mathbf{E}$ *junto con las clases* $\overline{cof}$, *fib y we tiene estructura de categoría de modelos propia y cerrada.*

Teorema

La categoría de los espacios exteriores $\mathbf{E}$ *junto con las clases* $\overline{cof}$, *fib y we tiene estructura de categoría de modelos propia y cerrada.*

Veamos el caso basado: Consideramos la subcategoría plena $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+} \subset \mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}$ de espacios exteriores bien basados, esto es, (X, α) con $\alpha : \mathbb{R}_+ \to X$ cofibración exterior (cerrada).

Teorema

La categoría de los espacios exteriores $\mathbf{E}$ *junto con las clases* $\overline{cof}$, *fib y we tiene estructura de categoría de modelos propia y cerrada.*

Veamos el caso basado: Consideramos la subcategoría plena $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+} \subset \mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}$ de espacios exteriores bien basados, esto es, (X, α) con $\alpha : \mathbb{R}_+ \to X$ cofibración exterior (cerrada). Considerando el cilindro y cocilindro basado en la categoría $\mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}$ se definen de forma análoga cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles.

Teorema

La categoría de los espacios exteriores $\mathbf{E}$ *junto con las clases* $\overline{cof}$, *fib y we tiene estructura de categoría de modelos propia y cerrada.*

Veamos el caso basado: Consideramos la subcategoría plena $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+} \subset \mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}$ de espacios exteriores bien basados, esto es, (X, α) con $\alpha : \mathbb{R}_+ \to X$ cofibración exterior (cerrada). Considerando el cilindro y cocilindro basado en la categoría $\mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}$ se definen de forma análoga cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles.

Entonces f es cofibración (resp. fibración, equivalencia débil) en $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$ si y sólo si f es cofibración (resp. fibración, equivalencia débil) en $\mathbf{E}$. Además:

Teorema

La categoría de los espacios exteriores $\mathbf{E}$ *junto con las clases* $\overline{cof}$, *fib y we tiene estructura de categoría de modelos propia y cerrada.*

Veamos el caso basado: Consideramos la subcategoría plena $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+} \subset \mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}$ de espacios exteriores bien basados, esto es, (X, α) con $\alpha : \mathbb{R}_+ \to X$ cofibración exterior (cerrada). Considerando el cilindro y cocilindro basado en la categoría $\mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}$ se definen de forma análoga cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles.

Entonces f es cofibración (resp. fibración, equivalencia débil) en $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$ si y sólo si f es cofibración (resp. fibración, equivalencia débil) en $\mathbf{E}$. Además:

Teorema

La categoría de los espacios exteriores bien basados $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$ *junto con las clases de cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles anteriormente definidos satisface todos los axiomas de categoría de modelos propia y cerrada, excepto la de ser cerrada por límites y colímites finitos.*

Teorema

La categoría de los espacios exteriores $\mathbf{E}$ *junto con las clases* $\overline{cof}$, *fib y we tiene estructura de categoría de modelos propia y cerrada.*

Veamos el caso basado: Consideramos la subcategoría plena $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+} \subset \mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}$ de espacios exteriores bien basados, esto es, (X, α) con $\alpha : \mathbb{R}_+ \to X$ cofibración exterior (cerrada). Considerando el cilindro y cocilindro basado en la categoría $\mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}$ se definen de forma análoga cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles.
Entonces f es cofibración (resp. fibración, equivalencia débil) en $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$ si y sólo si f es cofibración (resp. fibración, equivalencia débil) en $\mathbf{E}$. Además:

Teorema

La categoría de los espacios exteriores bien basados $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$ *junto con las clases de cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles anteriormente definidos satisface todos los axiomas de categoría de modelos propia y cerrada, excepto la de ser cerrada por límites y colímites finitos.*

No obstante, se pueden construir suficientes límites y colímites: los pullbacks de fibraciones y los pushouts de cofibraciones.

Pushouts y pullbacks homotópicos

La categoría subyacente será $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$ aunque todo lo que sigue también se puede aplicar para $\mathbf{E}$.

Pushouts y pullbacks homotópicos

La categoría subyacente será $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$ aunque todo lo que sigue también se puede aplicar para $\mathbf{E}$.

Definición (Pullback homotópico exterior)

Sea un diagrama de aplicaciones exteriores de la forma $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$. El *pullback homotópico* de este diagrama es el espacio exterior que resulta de

Pushouts y pullbacks homotópicos

La categoría subyacente será $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$ aunque todo lo que sigue también se puede aplicar para $\mathbf{E}$.

Definición (Pullback homotópico exterior)

Sea un diagrama de aplicaciones exteriores de la forma $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$. El *pullback homotópico* de este diagrama es el espacio exterior que resulta de

- Factorizar g (o bien f) mediante una equivalencia débil seguida de una fibración exterior

Pushouts y pullbacks homotópicos

La categoría subyacente será $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$ aunque todo lo que sigue también se puede aplicar para $\mathbf{E}$.

Definición (Pullback homotópico exterior)

Sea un diagrama de aplicaciones exteriores de la forma $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$. El *pullback homotópico* de este diagrama es el espacio exterior que resulta de

- Factorizar g (o bien f) mediante una equivalencia débil seguida de una fibración exterior
- Formar el pullback con esta fibración

Pushouts y pullbacks homotópicos

La categoría subyacente será $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$ aunque todo lo que sigue también se puede aplicar para $\mathbf{E}$.

Definición (Pullback homotópico exterior)

Sea un diagrama de aplicaciones exteriores de la forma $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$. El *pullback homotópico* de este diagrama es el espacio exterior que resulta de

- Factorizar g (o bien f) mediante una equivalencia débil seguida de una fibración exterior
- Formar el pullback con esta fibración

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Pushouts y pullbacks homotópicos

La categoría subyacente será $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$ aunque todo lo que sigue también se puede aplicar para $\mathbf{E}$.

Definición (Pullback homotópico exterior)

Sea un diagrama de aplicaciones exteriores de la forma $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$. El *pullback homotópico* de este diagrama es el espacio exterior que resulta de

- Factorizar g (o bien f) mediante una equivalencia débil seguida de una fibración exterior
- Formar el pullback con esta fibración

$$\begin{tikzcd}
 & & B \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[dd, "g"] \\
 & \bullet \arrow[dr] & \\
A \arrow[rr, "f"'] & & C
\end{tikzcd}$$

Pushouts y pullbacks homotópicos

La categoría subyacente será $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$ aunque todo lo que sigue también se puede aplicar para $\mathbf{E}$.

Definición (Pullback homotópico exterior)

Sea un diagrama de aplicaciones exteriores de la forma $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$. El *pullback homotópico* de este diagrama es el espacio exterior que resulta de

- Factorizar g (o bien f) mediante una equivalencia débil seguida de una fibración exterior
- Formar el pullback con esta fibración

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[dd, "\tilde{g}"'] \arrow[dr] & & B \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[dd, "g"] \\
& \bullet \arrow[dr, two heads] & \\
A \arrow[rr, "f"'] & & C
\end{tikzcd}
$$

Pushouts y pullbacks homotópicos

La categoría subyacente será $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$ aunque todo lo que sigue también se puede aplicar para $\mathbf{E}$.

Definición (Pullback homotópico exterior)

Sea un diagrama de aplicaciones exteriores de la forma $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$. El *pullback homotópico* de este diagrama es el espacio exterior que resulta de

- Factorizar g (o bien f) mediante una equivalencia débil seguida de una fibración exterior
- Formar el pullback con esta fibración

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\tilde{g}"'] & & B \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[dd, "g"] \\
& \bullet \arrow[dr] & \\
A \arrow[rr, "f"'] & & C
\end{tikzcd}$$

Pushouts y pullbacks homotópicos

- Decimos que el cuadrado resultante, o cualquiera homotópicamente equivalente a él es un cuadrado pullback homotópico

Pushouts y pullbacks homotópicos

- Decimos que el cuadrado resultante, o cualquiera homotópicamente equivalente a él es un cuadrado pullback homotópico
- La noción dual de Eckmann-Hilton corresponde con el de pushout homotópico

Pushouts y pullbacks homotópicos

- Decimos que el cuadrado resultante, o cualquiera homotópicamente equivalente a él es un cuadrado pullback homotópico
- La noción dual de Eckmann-Hilton corresponde con el de pushout homotópico
- Como en el caso clásico, los pullbacks y pushouts homotópicos pueden definirse por la propiedad universal débil de límites o colímites homotópicos o bien mediante pullbacks o pushouts homotópicos estándar.

Pushouts y pullbacks homotópicos

- Decimos que el cuadrado resultante, o cualquiera homotópicamente equivalente a él es un cuadrado pullback homotópico
- La noción dual de Eckmann-Hilton corresponde con el de pushout homotópico
- Como en el caso clásico, los pullbacks y pushouts homotópicos pueden definirse por la propiedad universal débil de límites o colímites homotópicos o bien mediante pullbacks o pushouts homotópicos estándar.
- El *join* del diagrama $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ es el pushout homotópico del pullback homotópico de dicho diagrama:

Pushouts y pullbacks homotópicos

- Decimos que el cuadrado resultante, o cualquiera homotópicamente equivalente a él es un cuadrado pullback homotópico
- La noción dual de Eckmann-Hilton corresponde con el de pushout homotópico
- Como en el caso clásico, los pullbacks y pushouts homotópicos pueden definirse por la propiedad universal débil de límites o colímites homotópicos o bien mediante pullbacks o pushouts homotópicos estándar.
- El *join* del diagrama $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ es el pushout homotópico del pullback homotópico de dicho diagrama:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Pushouts y pullbacks homotópicos

- Decimos que el cuadrado resultante, o cualquiera homotópicamente equivalente a él es un cuadrado pullback homotópico
- La noción dual de Eckmann-Hilton corresponde con el de pushout homotópico
- Como en el caso clásico, los pullbacks y pushouts homotópicos pueden definirse por la propiedad universal débil de límites o colímites homotópicos o bien mediante pullbacks o pushouts homotópicos estándar.
- El *join* del diagrama $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ es el pushout homotópico del pullback homotópico de dicho diagrama:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Pushouts y pullbacks homotópicos

- Decimos que el cuadrado resultante, o cualquiera homotópicamente equivalente a él es un cuadrado pullback homotópico
- La noción dual de Eckmann-Hilton corresponde con el de pushout homotópico
- Como en el caso clásico, los pullbacks y pushouts homotópicos pueden definirse por la propiedad universal débil de límites o colímites homotópicos o bien mediante pullbacks o pushouts homotópicos estándar.
- El *join* del diagrama $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ es el pushout homotópico del pullback homotópico de dicho diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr] \arrow[dd] & & B \arrow[dl] \arrow[dd, "g"] \\
& A *_C B & \\
A \arrow[ur] \arrow[rr, "f"'] & & C
\end{tikzcd}$$

Pushouts y pullbacks homotópicos

- Decimos que el cuadrado resultante, o cualquiera homotópicamente equivalente a él es un cuadrado pullback homotópico
- La noción dual de Eckmann-Hilton corresponde con el de pushout homotópico
- Como en el caso clásico, los pullbacks y pushouts homotópicos pueden definirse por la propiedad universal débil de límites o colímites homotópicos o bien mediante pullbacks o pushouts homotópicos estándar.
- El *join* del diagrama $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ es el pushout homotópico del pullback homotópico de dicho diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr] \arrow[dd] & & B \arrow[dl] \arrow[dd, "g"] \\
& A *_C B \arrow[dr, dotted] & \\
A \arrow[ur] \arrow[rr, "f"'] & & C
\end{tikzcd}
$$

Pushouts y pullbacks homotópicos

- Consideramos la subcategoría plena $\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}_+} \subset \mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$ formada por aquellos espacios exteriores bien basados (X, α) tales que existe una aplicación exterior $r : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ (necesariamente es única salvo homotopía exterior)

Pushouts y pullbacks homotópicos

- Consideramos la subcategoría plena $\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}_+} \subset \mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$ formada por aquellos espacios exteriores bien basados (X, α) tales que existe una aplicación exterior $r : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ (necesariamente es única salvo homotopía exterior)
- Esta restricción no es muy fuerte: si $\mathbf{P}_0^{\mathbb{R}_+}$ es la subcategoría plena de $\mathbf{P}_\infty^{\mathbb{R}_+}$ de espacios propiamente bien basados entonces $\mathbf{P}_0^{\mathbb{R}_+} \subset \mathbf{E}_0^{\mathbb{R}_+}$ mediante el embebimiento pleno cocompacto.

Pushouts y pullbacks homotópicos

- Consideramos la subcategoría plena $\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}_+} \subset \mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$ formada por aquellos espacios exteriores bien basados (X, α) tales que existe una aplicación exterior $r : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ (necesariamente es única salvo homotopía exterior)
- Esta restricción no es muy fuerte: si $\mathbf{P}_0^{\mathbb{R}_+}$ es la subcategoría plena de $\mathbf{P}_\infty^{\mathbb{R}_+}$ de espacios propiamente bien basados entonces $\mathbf{P}_0^{\mathbb{R}_+} \subset \mathbf{E}_0^{\mathbb{R}_+}$ mediante el embebimiento pleno cocompacto.
- $\mathbb{R}_+$ (con la identidad) es objeto inicial y es objeto final salvo homotopía exterior.

Pushouts y pullbacks homotópicos

- Consideramos la subcategoría plena $\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}_+} \subset \mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$ formada por aquellos espacios exteriores bien basados (X, α) tales que existe una aplicación exterior $r : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ (necesariamente es única salvo homotopía exterior)
- Esta restricción no es muy fuerte: si $\mathbf{P}_0^{\mathbb{R}_+}$ es la subcategoría plena de $\mathbf{P}_\infty^{\mathbb{R}_+}$ de espacios propiamente bien basados entonces $\mathbf{P}_0^{\mathbb{R}_+} \subset \mathbf{E}_0^{\mathbb{R}_+}$ mediante el embebimiento pleno cocompacto.
- $\mathbb{R}_+$ (con la identidad) es objeto inicial y es objeto final salvo homotopía exterior.

Teorema

$\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}_+}$ *con la estructura inducida por* $\mathbf{E}_w^{\mathbb{R}_+}$ *es una J-categoría (Doeraene)*

Versiones axiomáticas exteriores.

Definición (Fat wedge exterior)

Sea (X, α) un espacio exterior basado.

Versiones axiomáticas exteriores.

Definición (Fat wedge exterior)

Sea (X, α) un espacio exterior basado. Se define el n-ésimo fat wedge exterior de (X, α), $T^n(X, \alpha) \xrightarrow{j_n} X^n$, inductivamente como sigue:

Versiones axiomáticas exteriores.

Definición (Fat wedge exterior)

Sea (X,α) un espacio exterior basado. Se define el n-ésimo fat wedge exterior de (X,α), $T^n(X,\alpha) \xrightarrow{j_n} X^n$, inductivamente como sigue: $T^1(X,\alpha) = \mathbb{R}_+$, $j_1 = \alpha$, y se define $j_n : T^n(X,\alpha) \to X^n$ como en join en $\mathbf{E}$:

Versiones axiomáticas exteriores.

Definición (Fat wedge exterior)

Sea (X, α) un espacio exterior basado. Se define el n-ésimo fat wedge exterior de (X, α), $T^n(X, \alpha) \xrightarrow{j_n} X^n$, inductivamente como sigue: $T^1(X, \alpha) = \mathbb{R}_+$, $j_1 = \alpha$, y se define $j_n : T^n(X, \alpha) \to X^n$ como en join en $\mathbf{E}$:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr] \arrow[dd] & & X \times T^{n-1}(X,\alpha) \arrow[dl] \arrow[dd, "id_X \times j_{n-1}"] \\
& T^n(X,\alpha) \arrow[dr, dotted, "j_n"] & \\
\mathbb{R}_+ \times X^{n-1} \arrow[ur] \arrow[rr, "\alpha \times id_{X^{n-1}}"'] & & X^n
\end{tikzcd}$$

Versiones axiomáticas exteriores

Definición (Fibración de Ganea)

La *n*-ésima fibración de Ganea exterior de (X, α), $G_n(X, \alpha) \stackrel{p_n}{\twoheadrightarrow} X$, se define inductivamente como:

Versiones axiomáticas exteriores

Definición (Fibración de Ganea)

La *n*-ésima fibración de Ganea exterior de (X, α), $G_n(X, \alpha) \xrightarrow{p_n} X$, se define inductivamente como: $G_1(X, \alpha) = P^{\mathbb{R}_+}(X, \alpha)$ es el espacio exterior de caminos de α, construido como el pullback (homotópico) exterior de $\mathbb{R}_+ \xrightarrow{\alpha} X \xleftarrow{d_0} X^I$.

Versiones axiomáticas exteriores

Definición (Fibración de Ganea)

La n-ésima fibración de Ganea exterior de (X,α), $G_n(X,\alpha) \xrightarrow{p_n} X$, se define inductivamente como: $G_1(X,\alpha) = P^{\mathbb{R}_+}(X,\alpha)$ es el espacio exterior de caminos de α, construido como el pullback (homotópico) exterior de $\mathbb{R}_+ \xrightarrow{\alpha} X \xleftarrow{d_0} X^I$. La composición $p_1 : P^{\mathbb{R}_+}(X,\alpha) \longrightarrow X^I \xrightarrow{d_1} X$, es la correspondiente fibración de caminos.

Versiones axiomáticas exteriores

Definición (Fibración de Ganea)

La n-ésima fibración de Ganea exterior de (X,α), $G_n(X,\alpha) \stackrel{p_n}{\twoheadrightarrow} X$, se define inductivamente como: $G_1(X,\alpha) = P^{\mathbb{R}_+}(X,\alpha)$ es el espacio exterior de caminos de α, construido como el pullback (homotópico) exterior de $\mathbb{R}_+ \stackrel{\alpha}{\to} X \stackrel{d_0}{\leftarrow} X^I$. La composición $p_1 : P^{\mathbb{R}_+}(X,\alpha) \longrightarrow X^I \stackrel{d_1}{\longrightarrow} X$, es la correspondiente fibración de caminos. Entonces, $G_n(X,\alpha)$ es el join:

Versiones axiomáticas exteriores

Definición (Fibración de Ganea)

La n-ésima fibración de Ganea exterior de (X,α), $G_n(X,\alpha) \overset{p_n}{\twoheadrightarrow} X$, se define inductivamente como: $G_1(X,\alpha) = P^{\mathbb{R}_+}(X,\alpha)$ es el espacio exterior de caminos de α, construido como el pullback (homotópico) exterior de $\mathbb{R}_+ \xrightarrow{\alpha} X \xleftarrow{d_0} X^I$. La composición $p_1 : P^{\mathbb{R}_+}(X,\alpha) \longrightarrow X^I \xrightarrow{d_1} X$, es la correspondiente fibración de caminos. Entonces, $G_n(X,\alpha)$ es el join:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathbb{R}_+ \arrow[dl] \arrow[dd, "\alpha"] \\
& G_n(X,\alpha) \arrow[dr, dotted, two heads, "p_n"] & \\
G_{n-1}(X,\alpha) \arrow[ur] \arrow[rr, two heads, "p_{n-1}"'] & & X
\end{tikzcd}$$

La definición por recubrimientos

Definición

Dado X un espacio exterior, se dice que un abierto $U \subset X$ es *e*-categórico si existe un diagrama en $\mathbf{E}$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & X \\ & \mathbb{R}_+ \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

conmutativo salvo homotopía exterior. Así, la *categoría L.S. exterior* de X, *e-cat*(X), es el menor n (o infinito) tal que X se puede recubrir por n abiertos e-categóricos.

La definición por recubrimientos

Definición

Dado X un espacio exterior, se dice que un abierto $U \subset X$ es *e*-categórico si existe un diagrama en $\mathbf{E}$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & X \\ & \mathbb{R}_+ \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

conmutativo salvo homotopía exterior. Así, la *categoría L.S. exterior* de X, *e-cat*(X), es el menor n (o infinito) tal que X se puede recubrir por n abiertos e-categóricos.

De forma análoga se define

- *abierto* α*-e-categórico* (originando *e-cat*$_{[\alpha]}(X)$)

La definición por recubrimientos

Definición

Dado X un espacio exterior, se dice que un abierto $U \subset X$ es *e*-categórico si existe un diagrama en **E**

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & X \\ & \mathbb{R}_+ \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

conmutativo salvo homotopía exterior. Así, la *categoría L.S. exterior* de X, *e-cat*(X), es el menor n (o infinito) tal que X se puede recubrir por n abiertos e-categóricos.

De forma análoga se define

- *abierto* α*-e-categórico* (originando *e-cat*$_{[\alpha]}(X)$)
- abierto *basadamente categórico* (originando *e-cat*$^*_{[\alpha]}(X)$)

Caracterizaciones axiomáticas en el caso exterior

Teorema (Caracterización axiomática exterior)

Sea (X, α) un espacio exterior normal en $\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}_+}$. Entonces son equivalentes:

Caracterizaciones axiomáticas en el caso exterior

Teorema (Caracterización axiomática exterior)

Sea (X, α) *un espacio exterior normal en* $\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}_+}$. *Entonces son equivalentes:*

- *e-cat*$_{[\alpha]}(X) \leq n$ *(respec. e-cat*$^*_{[\alpha]}(X) \leq n$*)*

Caracterizaciones axiomáticas en el caso exterior

Teorema (Caracterización axiomática exterior)

Sea (X,α) un espacio exterior normal en $\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}_+}$. Entonces son equivalentes:

- *e-cat$_{[\alpha]}(X) \leq n$ (respec. e-cat$^*_{[\alpha]}(X) \leq n$)*
- *La aplicación diagonal $\Delta_n : X \longrightarrow X^n$ se factoriza, salvo homotopía exterior (respec. homotopía exterior basada), a través del n-ésimo fat wedge exterior:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "\Delta_n"'] & T^n(X,\alpha) \arrow[d, "j_n"] \\ & X^n \end{tikzcd}$$

Caracterizaciones axiomáticas en el caso exterior

Teorema (Caracterización axiomática exterior)

Sea (X, α) un espacio exterior normal en $\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}_+}$. Entonces son equivalentes:

- *e-cat$_{[\alpha]}(X) \leq n$ (respec. e-cat$^*_{[\alpha]}(X) \leq n$)*
- *La aplicación diagonal $\Delta_n : X \to X^n$ se factoriza, salvo homotopía exterior (respec. homotopía exterior basada), a través del n-ésimo fat wedge exterior:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "\Delta_n"'] & T^n(X, \alpha) \arrow[d, "j_n"] \\ & X^n \end{tikzcd}$$

- *La n-ésima fibración de Ganea exterior $p_n : G_n(X, \alpha) \twoheadrightarrow X$ admite una sección homotópica (respec. sección homotópica basada).*

El descenso al caso propio.

Teorema

Sea X un espacio en $\mathbf{P}_\infty$.

El descenso al caso propio.

Teorema

Sea X un espacio en $\mathbf{P}_\infty$. Entonces

$$p\text{-}cat(X) = e\text{-}cat(X_{cc})$$

El descenso al caso propio.

Teorema

Sea X un espacio en $\mathbf{P}_\infty$. Entonces

$$p\text{-}cat(X) = e\text{-}cat(X_{cc})$$

Además, para todo espacio propiamente bien basado (X, α) en $\mathbf{P}_\infty$,

$$p\text{-}cat_{[\alpha]}(X) = e\text{-}cat_{[\alpha_{cc}]}(X_{cc}), \qquad p\text{-}cat^*_{[\alpha]}(X) = e\text{-}cat^*_{[\alpha_{cc}]}(X_{cc}).$$

El descenso al caso propio.

Teorema (Caracterización axiomática propia)

Sea (X, α) *en* $\mathbf{P}_\infty$*, un espacio propiamente bien basado. Son equivalentes:*

El descenso al caso propio.

Teorema (Caracterización axiomática propia)

Sea (X, α) en $\mathbf{P}_\infty$, un espacio propiamente bien basado. Son equivalentes:

- *p-cat*$_{[\alpha]}(X) \leq n$ *(respec. p-cat*$^*_{[\alpha]}(X) \leq n$*)*

El descenso al caso propio.

Teorema (Caracterización axiomática propia)

Sea (X, α) en $\mathbf{P}_\infty$, un espacio propiamente bien basado. Son equivalentes:

- *p-cat$_{[\alpha]}(X) \leq n$ (respec. p-cat$^*_{[\alpha]}(X) \leq n$)*
- *La aplicación diagonal $\Delta_n : X_{cc} \to X^n_{cc}$ factoriza a través de n-ésimo fat wedge salvo homotopía exterior (respec. homotopía exterior basada)*

$$\begin{tikzcd} X_{cc} \arrow[r] \arrow[dr, "\Delta_n"'] & T^n(X_{cc}, \alpha_{cc}) \arrow[d, "j_n"] \\ & X^n_{cc} \end{tikzcd}$$

El descenso al caso propio.

Teorema (Caracterización axiomática propia)

Sea (X, α) en $\mathbf{P}_\infty$, un espacio propiamente bien basado. Son equivalentes:

- *p-cat$_{[\alpha]}(X) \leq n$ (respec. p-cat$^*_{[\alpha]}(X) \leq n$)*
- *La aplicación diagonal $\Delta_n : X_{cc} \to X^n_{cc}$ factoriza a través de n-ésimo fat wedge salvo homotopía exterior (respec. homotopía exterior basada)*

$$\begin{tikzcd} X_{cc} \arrow[r] \arrow[dr, "\Delta_n"'] & T^n(X_{cc}, \alpha_{cc}) \arrow[d, "j_n"] \\ & X^n_{cc} \end{tikzcd}$$

- *La n-ésima fibración de Ganea exterior $p_n : G_n(X_{cc}, \alpha_{cc}) \to X_{cc}$ admite una sección homotópica exterior (respec. sección homotópica basada).*

Caracterización de co-H-espacios propios

Caracterización de co-H-espacios propios

Todos los espacios, aplicaciones y homotopías son basados.

Caracterización de co-H-espacios propios

Todos los espacios, aplicaciones y homotopías son basados.

Definición

Un *co-H-espacio propio* es un espacio propiamente bien basado (X, α) tal que existe una aplicación propia $\mu : X \to X \vee_\alpha X$ de forma que el diagrama

Caracterización de co-H-espacios propios

Todos los espacios, aplicaciones y homotopías son basados.

Definición

Un *co-H-espacio propio* es un espacio propiamente bien basado (X, α) tal que existe una aplicación propia $\mu : X \to X \vee_\alpha X$ de forma que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X & X \vee_\alpha X \arrow[l, "\{\alpha r, id\}"'] \arrow[r, "\{id, \alpha r\}"] & X \\ & X \arrow[ul, "id_X"] \arrow[u, "\mu"'] \arrow[ur, "id_X"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo salvo homotopía propia. Aquí $r : X \to \mathbb{R}_+$ es una retracción de α, $X \vee_\alpha X$ es el pushout de $X \xleftarrow{\alpha} \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\alpha} X$ y $\{f, g\}$ denota el morfismo pushout inducido por f y g.

Caracterización de co-H-espacios propios

Teorema (Caracterización de co-H-espacio propio)

Sea (X, α) *espacio propiamente bien basado en* $\mathbf{P}_\infty$. *Entonces son equivalentes:*

Caracterización de co-H-espacios propios

Teorema (Caracterización de co-H-espacio propio)

Sea (X, α) espacio propiamente bien basado en $\mathbf{P}_\infty$. Entonces son equivalentes:

- (X, α) *es co-H-espacio propio*

Caracterización de co-H-espacios propios

Teorema (Caracterización de co-H-espacio propio)

Sea (X, α) *espacio propiamente bien basado en* $\mathbf{P}_\infty$. *Entonces son equivalentes:*

- (X, α) *es co-H-espacio propio*
- *p-cat*$^*_{[\alpha]}(X) \leqslant 2$

Caracterización de co-H-espacios propios

Teorema (Caracterización de co-H-espacio propio)

Sea (X, α) *espacio propiamente bien basado en* $\mathbf{P}_\infty$. *Entonces son equivalentes:*

- (X, α) *es co-H-espacio propio*
- $p\text{-}cat^*_{[\alpha]}(X) \leqslant 2$

Demostración.

Caracterización de co-H-espacios propios

Teorema (Caracterización de co-H-espacio propio)

Sea (X, α) espacio propiamente bien basado en $\mathbf{P}_\infty$. Entonces son equivalentes:

- (X, α) *es co-H-espacio propio*
- $p\text{-}cat^*_{[\alpha]}(X) \leqslant 2$

Demostración.

- Si (X, α) es espacio exterior en $\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}_+}$ entonces existe una equivalencia de homotopía exterior $X \vee_\alpha X \simeq T^2(X, \alpha)$ (sólo se requieren herramientas axiomáticas)

Caracterización de co-H-espacios propios

Teorema (Caracterización de co-H-espacio propio)

Sea (X, α) espacio propiamente bien basado en $\mathbf{P}_\infty$. Entonces son equivalentes:

- (X, α) *es co-H-espacio propio*
- *p-cat*$^*_{[\alpha]}(X) \leqslant 2$

Demostración.

- Si (X, α) es espacio exterior en $\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}_+}$ entonces existe una equivalencia de homotopía exterior $X \vee_\alpha X \simeq T^2(X, \alpha)$ (sólo se requieren herramientas axiomáticas)
- Si (X, α) es un espacio propiamente bien basado en $\mathbf{P}_\infty$ entonces $(X \vee_\alpha X)_{cc} \simeq X_{cc} \vee_{\alpha_{cc}} X_{cc} \quad (\simeq T^2(X_{cc}, \alpha_{cc}))$

Caracterización de co-H-espacios propios

Teorema (Caracterización de co-H-espacio propio)

Sea (X, α) espacio propiamente bien basado en $\mathbf{P}_\infty$. Entonces son equivalentes:

- *(X, α) es co-H-espacio propio*
- *$p\text{-}cat^*_{[\alpha]}(X) \leqslant 2$*

Demostración.

- Si (X, α) es espacio exterior en $\mathbf{E}_0^{\mathbb{R}_+}$ entonces existe una equivalencia de homotopía exterior $X \vee_\alpha X \simeq T^2(X, \alpha)$ (sólo se requieren herramientas axiomáticas)
- Si (X, α) es un espacio propiamente bien basado en $\mathbf{P}_\infty$ entonces $(X \vee_\alpha X)_{cc} \simeq X_{cc} \vee_{\alpha_{cc}} X_{cc} \quad (\simeq T^2(X_{cc}, \alpha_{cc}))$
- Utilización de la caracterización de Whitehead (por fat-wedge)

$\square$

Algunas referencias adicionales

- J.P. Doeraene. Homotopy pullbacks, homotopy pushouts and joins. *Bull. Belg. Math. Soc.* 5(1) (1998), 15-37.
- J.P. Doeraene. L.S.-category in a model category. *Journal of Pure and Appl. Algebra* 84 (1993), 215-261.
- J.M. García-Calcines, M. García-Pinillos and L.J. Hernández-Paricio. A closed model category for proper homotopy and shape theories. *Bull. Austral. Math. Soc.* 57(2) (1998) 221-242.
- J.M. García-Calcines, M. García-Pinillos and L.J. Hernández-Paricio. Closed simplicial model structures for exterior and proper homotopy theory. *Appl. Categ. Structures* 12(3) (2004), 225-243.
- M. Mather. Pull-backs in Homotopy Theory. *Can. J. Math.* 28(2) (1976), 225-263.

¡GRACIAS!