

Aplicaciones separadoras entre espacios de funciones continuas

Jesús Araujo

www.araujo.tk

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación
Universidad de Cantabria

XIII Encuentro de Topología
3 y 4 de Noviembre de 2006
Castro Urdiales, Cantabria

X un espacio topológico Tychonoff.

X un espacio topológico Tychonoff.

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

Notación general

X un espacio topológico Tychonoff.

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

$$C(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ es continua}\}$$

Notación general

X un espacio topológico Tychonoff.

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

$$C(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ es continua}\}$$

$C(X)$ es un anillo

De homeomorfismo a isomorfismo

Estructura topológica de $X \Rightarrow$ Estructura de $C(X)$ como anillo

De homeomorfismo a isomorfismo

Estructura topológica de $X \Rightarrow$ Estructura de $C(X)$ como anillo

X e Y homeomorfos

De homeomorfismo a isomorfismo

Estructura topológica de $X \Rightarrow$ Estructura de $C(X)$ como anillo

X e Y homeomorfos

$h : Y \rightarrow X$ homeomorfismo

De homeomorfismo a isomorfismo

Estructura topológica de $X \Rightarrow$ Estructura de $C(X)$ como anillo

X e Y homeomorfos

$h: Y \rightarrow X$ homeomorfismo

$f \in C(X) \rightsquigarrow f \circ h \in C(Y)$ define un isomorfismo de anillos entre $C(X)$ y $C(Y)$

De isomorfismo a homeomorfismo 1

Estructura topológica de $X \Rightarrow$ Estructura de $C(X)$ como anillo

De isomorfismo a homeomorfismo 1

Estructura topológica de $X \Rightarrow$ Estructura de $C(X)$ como anillo

¿Estructura de $C(X)$ como anillo $\Rightarrow$ Estructura topológica de X ?

De isomorfismo a homeomorfismo 1

Estructura topológica de $X \Rightarrow$ Estructura de $C(X)$ como anillo

¿Estructura de $C(X)$ como anillo $\Rightarrow$ Estructura topológica de X ?

CASO ESPECIAL: X, Y compactos

De isomorfismo a homeomorfismo 1

Estructura topológica de $X \Rightarrow$ Estructura de $C(X)$ como anillo

¿Estructura de $C(X)$ como anillo $\Rightarrow$ Estructura topológica de X ?

CASO ESPECIAL: X, Y compactos

$T : C(X) \rightarrow C(Y)$ isomorfismo de anillos

De isomorfismo a homeomorfismo 1

Estructura topológica de $X \Rightarrow$ Estructura de $C(X)$ como anillo

¿Estructura de $C(X)$ como anillo $\Rightarrow$ Estructura topológica de X ?

CASO ESPECIAL: X, Y compactos

$T : C(X) \rightarrow C(Y)$ isomorfismo de anillos

T envía ideales maximales sobre ideales maximales.

De isomorfismo a homeomorfismo 2

Todo ideal maximal en $C(X)$ está centrado en un punto

De isomorfismo a homeomorfismo 2

Todo ideal maximal en $C(X)$ está centrado en un punto

$$x \in X, \quad \mathfrak{M}_x := \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$$

De isomorfismo a homeomorfismo 2

Todo ideal maximal en $C(X)$ está centrado en un punto

$$x \in X, \quad \mathfrak{M}_x := \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$$

$$x \in X, \quad T(\mathfrak{M}_x) = \mathfrak{M}_y$$

De isomorfismo a homeomorfismo 2

Todo ideal maximal en $C(X)$ está centrado en un punto

$$x \in X, \quad \mathfrak{M}_x := \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$$

$$x \in X, \quad T(\mathfrak{M}_x) = \mathfrak{M}_y$$

$T^{-1} : C(Y) \rightarrow C(X)$ también es isomorfismo.

De isomorfismo a homeomorfismo 2

Todo ideal maximal en $C(X)$ está centrado en un punto

$$x \in X, \quad \mathfrak{M}_x := \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$$

$$x \in X, \quad T(\mathfrak{M}_x) = \mathfrak{M}_y$$

$T^{-1} : C(Y) \rightarrow C(X)$ también es isomorfismo.

$$y \in Y, \quad T^{-1}(\mathfrak{M}_y) = \mathfrak{M}_x$$

De isomorfismo a homeomorfismo 2

Todo ideal maximal en $C(X)$ está centrado en un punto

$$x \in X, \quad \mathfrak{M}_x := \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$$

$$x \in X, \quad T(\mathfrak{M}_x) = \mathfrak{M}_y$$

$T^{-1} : C(Y) \rightarrow C(X)$ también es isomorfismo.

$$y \in Y, \quad T^{-1}(\mathfrak{M}_y) = \mathfrak{M}_x$$

Existe una aplicación **biyectiva** $h : Y \rightarrow X$

De isomorfismo a homeomorfismo 2

Todo ideal maximal en $C(X)$ está centrado en un punto

$$x \in X, \quad \mathfrak{M}_x := \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$$

$$x \in X, \quad T(\mathfrak{M}_x) = \mathfrak{M}_y$$

$T^{-1} : C(Y) \rightarrow C(X)$ también es isomorfismo.

$$y \in Y, \quad T^{-1}(\mathfrak{M}_y) = \mathfrak{M}_x$$

Existe una aplicación **biyectiva** $h : Y \rightarrow X$

$h : Y \rightarrow X$ es un **homeomorfismo**

Caso especial:

Sean X, Y **compactos**. Si $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos,

Caso especial:

Sean X , Y **compactos**. Si $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos, entonces **X e Y son homeomorfos**.

Caso especial:

Sean X, Y **compactos**. Si $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos, entonces X e Y son homeomorfos.

Caso general?

Sean X, Y **cualesquiera**. Si $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos,

Caso especial:

Sean X, Y **compactos**. Si $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos, entonces X e Y son homeomorfos.

Caso general?

Sean X, Y **cualesquiera**. Si $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos, ¿son X e Y homeomorfos?

Inmersión de X en un producto

X cualquiera

Inmersión de X en un producto

X cualquiera

Objetivo: Meter X en un producto de copias de $\mathbb{R}$

Inmersión de X en un producto

X cualquiera

Objetivo: Meter X en un producto de copias de $\mathbb{R}$

$C(X, \mathbb{R})$

Inmersión de X en un producto

X cualquiera

Objetivo: Meter X en un producto de copias de $\mathbb{R}$

$C(X, \mathbb{R})$

El producto será

$$\prod_{f \in C(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}_f$$

Inmersión de X en un producto

X cualquiera

Objetivo: Meter X en un producto de copias de $\mathbb{R}$

$C(X, \mathbb{R})$

El producto será

$$\prod_{f \in C(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}_f$$

Habrá una coordenada por cada función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Inmersión de X en un producto

X cualquiera

Objetivo: Meter X en un producto de copias de $\mathbb{R}$

$C(X, \mathbb{R})$

El producto será

$$\prod_{f \in C(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}_f$$

Habrá una coordenada por cada función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Por ejemplo: Si $X = \mathbb{R}$, habrá una coordenada correspondiente al **seno**, $\mathbb{R}_{\sin}$,

Inmersión de X en un producto

X cualquiera

Objetivo: Meter X en un producto de copias de $\mathbb{R}$

$C(X, \mathbb{R})$

El producto será

$$\prod_{f \in C(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}_f$$

Habrá una coordenada por cada función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Por ejemplo: Si $X = \mathbb{R}$, habrá una coordenada correspondiente al **seno**, $\mathbb{R}_{\sin}$, otra a la **exponencial**, $\mathbb{R}_{\exp}$,

Inmersión de X en un producto

X cualquiera

Objetivo: Meter X en un producto de copias de $\mathbb{R}$

$C(X, \mathbb{R})$

El producto será

$$\prod_{f \in C(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}_f$$

Habrá una coordenada por cada función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Por ejemplo: Si $X = \mathbb{R}$, habrá una coordenada correspondiente al **seno**, $\mathbb{R}_{\sin}$, otra a la **exponencial**, $\mathbb{R}_{\exp}$, otra al **valor absoluto**, $\mathbb{R}_{|\cdot|} \dots$

Tomamos $0 \in \mathbb{R}$.

Tomamos $0 \in \mathbb{R}$. Queremos meter 0 en ese producto de rectas reales. Cada coordenada es una función continua.

Tomamos $0 \in \mathbb{R}$. Queremos meter 0 en ese producto de rectas reales. Cada coordenada es una función continua. Así su imagen será:

Tomamos $0 \in \mathbb{R}$. Queremos meter 0 en ese producto de rectas reales. Cada coordenada es una función continua. Así su imagen será:

- 0 ($= \sin 0$) en la coordenada **seno**

Tomamos $0 \in \mathbb{R}$. Queremos meter 0 en ese producto de rectas reales. Cada coordenada es una función continua. Así su imagen será:

- 0 ($= \sin 0$) en la coordenada **seno**
- 1 ($= e^0$) en la coordenada **exponencial**

Tomamos $0 \in \mathbb{R}$. Queremos meter 0 en ese producto de rectas reales. Cada coordenada es una función continua. Así su imagen será:

- 0 ($= \sin 0$) en la coordenada **seno**
- 1 ($= e^0$) en la coordenada **exponencial**
- 0 ($= |0|$) en la coordenada **valor absoluto**

Tomamos $0 \in \mathbb{R}$. Queremos meter 0 en ese producto de rectas reales. Cada coordenada es una función continua. Así su imagen será:

- 0 ($= \sin 0$) en la coordenada **seno**
- 1 ($= e^0$) en la coordenada **exponencial**
- 0 ($= |0|$) en la coordenada **valor absoluto**

En $X = \mathbb{R}$ no hay coordenada log. Sí la hay en $X = (0, +\infty)$.

Tomamos $0 \in \mathbb{R}$. Queremos meter 0 en ese producto de rectas reales. Cada coordenada es una función continua. Así su imagen será:

- 0 ($= \sin 0$) en la coordenada **seno**
- 1 ($= e^0$) en la coordenada **exponencial**
- 0 ($= |0|$) en la coordenada **valor absoluto**

En $X = \mathbb{R}$ no hay coordenada log. Sí la hay en $X = (0, +\infty)$.

$$x \in X \rightsquigarrow (f(x))_{f \in C(X, \mathbb{R})} \in \prod_{f \in C(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}_f$$

Tomamos $0 \in \mathbb{R}$. Queremos meter 0 en ese producto de rectas reales. Cada coordenada es una función continua. Así su imagen será:

- $0 (= \sin 0)$ en la coordenada **seno**
- $1 (= e^0)$ en la coordenada **exponencial**
- $0 (= |0|)$ en la coordenada **valor absoluto**

En $X = \mathbb{R}$ no hay coordenada log. Sí la hay en $X = (0, +\infty)$.

$$x \in X \rightsquigarrow (f(x))_{f \in C(X, \mathbb{R})} \in \prod_{f \in C(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}_f$$

La inmersión paramétrica es un *homeomorfismo* de X en su imagen.

Inmersión cualquiera

X **cualquiera**. Entonces X puede identificarse con un subconjunto de una potencia de $\mathbb{R}$.

Inmersión cualquiera

X **cualquiera**. Entonces X puede identificarse con un subconjunto de una potencia de $\mathbb{R}$.

Si X es **compacto**, cada $f \in C(X, \mathbb{R})$ está acotada

Inmersión cualquiera

X **cualquiera**. Entonces X puede identificarse con un subconjunto de una potencia de $\mathbb{R}$.

Si X es **compacto**, cada $f \in C(X, \mathbb{R})$ está acotada

$$x \in X \rightsquigarrow (f(x))_{f \in C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})} \in \prod_{f \in C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}_f$$

Inmersión cualquiera

X **cualquiera**. Entonces X puede identificarse con un subconjunto de una potencia de $\mathbb{R}$.

Si X es **compacto**, cada $f \in C(X, \mathbb{R})$ está acotada

$$x \in X \rightsquigarrow (f(x))_{f \in C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})} \in \prod_{f \in C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}_f$$

$$X \subset [0, 1]^{C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})}$$

Inmersión cualquiera

X **cualquiera**. Entonces X puede identificarse con un subconjunto de una potencia de $\mathbb{R}$.

Si X es **compacto**, cada $f \in C(X, \mathbb{R})$ está acotada

$$x \in X \rightsquigarrow (f(x))_{f \in C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})} \in \prod_{f \in C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}_f$$

$$X \subset [0, 1]^{C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})}$$

Compacto = $[0, 1]$ –compacto

Sea X **compacto**. Entonces X puede identificarse con un subconjunto cerrado de una potencia de $[0, 1]$.

X cualquiera

X cualquiera

$$X = P(X) \subset \prod_{f \in C(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}$$

X cualquiera

$$X = P(X) \subset \prod_{f \in C(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}$$

$$x \in P(X), f \in C(X, \mathbb{R}),$$

X cualquiera

$$X = P(X) \subset \prod_{f \in C(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}$$

$$x \in P(X), f \in C(X, \mathbb{R}), f(P(x)) = \text{proy}_f(P(x)) \in \mathbb{R}$$

X cualquiera

$$X = P(X) \subset \prod_{f \in C(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}$$

$$x \in P(X), f \in C(X, \mathbb{R}), f(P(x)) = \text{proy}_f(P(x)) \in \mathbb{R}$$

Cada $f \in C(P(X), \mathbb{R})$ se puede extender a $\hat{f} : \overline{PX} \rightarrow \mathbb{R}$ continua

X cualquiera

$$X = P(X) \subset \prod_{f \in C(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}$$

$$x \in P(X), f \in C(X, \mathbb{R}), f(P(x)) = \text{proy}_f(P(x)) \in \mathbb{R}$$

Cada $f \in C(P(X), \mathbb{R})$ se puede extender a $\hat{f} : \overline{PX} \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Inmersión para cada X

Sea X **cualquiera**. Entonces $C(X)$ y $C(\overline{PX})$ son isomorfos como anillos.

Caso general?

Sean X , Y **cualesquiera**. Si $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos,

Caso general?

Sean X , Y **cualesquiera**. Si $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos,

¿son X e Y homeomorfos?

Caso general?

Sean X , Y **cualesquiera**. Si $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos,

¿son X e Y homeomorfos?

En general, **NO**

Caso general?

Sean X , Y **cualesquiera**. Si $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos, ¿son X e Y homeomorfos?

En general, **NO**

Definición

X se dice **realcompacto** si puede identificarse con un subconjunto cerrado de una potencia de $\mathbb{R}$.

Caso general?

Sean X , Y **cualesquiera**. Si $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos, ¿son X e Y homeomorfos?

En general, **NO**

Definición

X se dice **realcompacto** si puede identificarse con un subconjunto cerrado de una potencia de $\mathbb{R}$.

Caso general

Sean X , Y **realcompactos**. Si $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos,

Caso general?

Sean X , Y **cualesquiera**. Si $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos, ¿son X e Y homeomorfos?

En general, **NO**

Definición

X se dice **realcompacto** si puede identificarse con un subconjunto cerrado de una potencia de $\mathbb{R}$.

Caso general

Sean X , Y **realcompactos**. Si $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como anillos, entonces **X e Y son homeomorfos**

Compacto = $[0, 1]$ –compacto

Sea X **compacto**. Entonces X puede identificarse con un subconjunto **cerrado** de una potencia de $[0, 1]$.

Compacto = $[0, 1]$ –compacto

Sea X **compacto**. Entonces X puede identificarse con un subconjunto **cerrado** de una potencia de $[0, 1]$.

Realcompacto = $\mathbb{R}$ –compacto

Sea X **realcompacto**. Entonces X puede identificarse con un subconjunto **cerrado** de una potencia de $\mathbb{R}$.

El anillo $C_{\text{acot}}(X)$

X cualquiera, $X \subset \mathbb{R}^{C(X)}$

El anillo $C_{\text{acot}}(X)$

X cualquiera, $X \subset \mathbb{R}^{C(X)}$

$$C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})$$

El anillo $C_{\text{acot}}(X)$

X cualquiera, $X \subset \mathbb{R}^{C(X)}$

$$C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})$$

$$x \in X \rightsquigarrow (f(x))_{f \in C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})} \in \prod_{f \in C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}_f$$

El anillo $C_{\text{acot}}(X)$

X cualquiera, $X \subset \mathbb{R}^{C(X)}$

$$C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})$$

$$x \in X \rightsquigarrow (f(x))_{f \in C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})} \in \prod_{f \in C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}_f$$

$$X \subset [0, 1]^{C_{\text{acot}}(X)}$$

El anillo $C_{\text{acot}}(X)$

X cualquiera, $X \subset \mathbb{R}^{C(X)}$

$$C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})$$

$$x \in X \rightsquigarrow (f(x))_{f \in C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})} \in \prod_{f \in C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}_f$$

$$X \subset [0, 1]^{C_{\text{acot}}(X)}$$

La clausura $\overline{P(X)}$ en la primera potencia es la realcompactificación de X .

El anillo $C_{\text{acot}}(X)$

X cualquiera, $X \subset \mathbb{R}^{C(X)}$

$$C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})$$

$$x \in X \rightsquigarrow (f(x))_{f \in C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})} \in \prod_{f \in C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}_f$$

$$X \subset [0, 1]^{C_{\text{acot}}(X)}$$

La clausura $\overline{P(X)}$ en la primera potencia es la realcompactificación de X .

La clausura βX en la segunda potencia es la **compactificación de Stone-Čech** de X .

El anillo $C_{\text{acot}}(X)$

X cualquiera, $X \subset \mathbb{R}^{C(X)}$

$$C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})$$

$$x \in X \rightsquigarrow (f(x))_{f \in C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})} \in \prod_{f \in C_{\text{acot}}(X, \mathbb{R})} \mathbb{R}_f$$

$$X \subset [0, 1]^{C_{\text{acot}}(X)}$$

La clausura $\overline{P(X)}$ en la primera potencia es la realcompactificación de X .

La clausura βX en la segunda potencia es la **compactificación de Stone-Čech** de X .

$$X \subset \overline{P(X)} \subset \beta X.$$

Funciones **cualesquiera** con valores en $\mathbb{K}$

Sean X **cualquiera**, $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ continua. Entonces f puede extenderse de manera continua a la **realcompactificación** de X , $\hat{f} : \overline{P(X)} \rightarrow \mathbb{K}$.

Funciones **cualquiera** con valores en $\mathbb{K}$

Sean X **cualquiera**, $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ continua. Entonces f puede extenderse de manera continua a la **realcompactificación** de X , $\hat{f} : \overline{P(X)} \rightarrow \mathbb{K}$.

Funciones **acotadas** con valores en $\mathbb{K}$

Sean X **cualquiera**, $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ continua y **acotada**. Entonces f puede extenderse de manera continua a la **compactificación de Stone-Čech** de X , $\hat{f} : \beta X \rightarrow \mathbb{K}$.

En suma:

En suma:

- Para cualquier X , $C(X)$ y $C(\overline{P(X)})$ son indistinguibles como anillos.

En suma:

- Para cualquier X , $C(X)$ y $C(\overline{P(X)})$ son indistinguibles como anillos.
- Para cualquier X , $C_{\text{acot}}(X)$ y $C_{\text{acot}}(\beta X)$ son indistinguibles como anillos.

X , Y cualesquiera

Aplicaciones separadoras

X, Y cualesquiera

$T : C(X) \rightarrow C(Y)$ se dice **separadora** si:

- T es biyectiva,

Aplicaciones separadoras

X, Y cualesquiera

$T : C(X) \rightarrow C(Y)$ se dice **separadora** si:

- T es biyectiva,
- T es aditiva,

Aplicaciones separadoras

X, Y cualesquiera

$T : C(X) \rightarrow C(Y)$ se dice **separadora** si:

- T es biyectiva,
- T es aditiva,
- $f \cdot g \equiv 0 \Rightarrow Tf \cdot Tg \equiv 0$

Aplicaciones separadoras

X, Y cualesquiera

$T : C(X) \rightarrow C(Y)$ se dice **separadora** si:

- T es biyectiva,
- T es aditiva,
- $f \cdot g \equiv 0 \Rightarrow Tf \cdot Tg \equiv 0$

Aplicaciones separadoras

X, Y cualesquiera

$T : C(X) \rightarrow C(Y)$ se dice **separadora** si:

- T es biyectiva,
- T es aditiva,
- $f \cdot g \equiv 0 \Rightarrow Tf \cdot Tg \equiv 0$

T se dice **biseparadora** si T y T^{-1} son separadoras.

X, Y cualesquiera

$T : C(X) \rightarrow C(Y)$ se dice **separadora** si:

- T es biyectiva,
- T es aditiva,
- $f \cdot g \equiv 0 \Rightarrow Tf \cdot Tg \equiv 0$

T se dice **biseparadora** si T y T^{-1} son separadoras.

Definición similar para el caso $C_{\text{acot}}(X)$ y $C_{\text{acot}}(Y)$

Aplicaciones separadoras

X, Y cualesquiera

$T : C(X) \rightarrow C(Y)$ se dice **separadora** si:

- T es biyectiva,
- T es aditiva,
- $f \cdot g \equiv 0 \Rightarrow Tf \cdot Tg \equiv 0$

T se dice **biseparadora** si T y T^{-1} son separadoras.

Definición similar para el caso $C_{\text{acot}}(X)$ y $C_{\text{acot}}(Y)$

Isomorfismo de anillos $\Rightarrow$ aplicación biseparadora

De aplicación separadora a homeomorfismo

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es un isomorfismo de anillos,

De aplicación separadora a homeomorfismo

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es un isomorfismo de anillos, entonces existe

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es un isomorfismo de anillos, entonces existe

- *un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$*

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es un isomorfismo de anillos, entonces existe

- *un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$*

De aplicación separadora a homeomorfismo

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es un isomorfismo de anillos, entonces existe

- *un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$*

tal que $Tf = f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

De aplicación separadora a homeomorfismo

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es un isomorfismo de anillos, entonces existe

- *un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$*

tal que $Tf = f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

Aplicaciones separadoras?

¿Se consigue algo relacionado si se sustituye **isomorfismo** por **aplicación separadora**?

De aplicación separadora a homeomorfismo

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es un isomorfismo de anillos, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$

tal que $Tf = f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

Aplicaciones separadoras?

¿Se consigue algo relacionado si se sustituye **isomorfismo** por **aplicación separadora**?

Teorema (Jarosz)

Sean X, Y **compactos**. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación **lineal separadora**,

De aplicación separadora a homeomorfismo

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es un isomorfismo de anillos, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$

tal que $Tf = f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

Aplicaciones separadoras?

¿Se consigue algo relacionado si se sustituye **isomorfismo** por **aplicación separadora**?

Teorema (Jarosz)

Sean X, Y **compactos**. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación **lineal separadora**, entonces existen

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$

De aplicación separadora a homeomorfismo

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es un isomorfismo de anillos, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$

tal que $Tf = f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

Aplicaciones separadoras?

¿Se consigue algo relacionado si se sustituye **isomorfismo** por **aplicación separadora**?

Teorema (Jarosz)

Sean X, Y **compactos**. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación **lineal separadora**, entonces existen

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$
- una función $a: Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $a(y) \neq 0$ ($y \in Y$)

De aplicación separadora a homeomorfismo

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es un isomorfismo de anillos, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$

tal que $Tf = f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

Aplicaciones separadoras?

¿Se consigue algo relacionado si se sustituye **isomorfismo** por **aplicación separadora**?

Teorema (Jarosz)

Sean X, Y **compactos**. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación **lineal separadora**, entonces existen

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$
- una función $a: Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $a(y) \neq 0$ ($y \in Y$)

tales que $Tf = a \cdot f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

Buscando h

$$X = \{a, b\}, y \in Y.$$

$$X = \{a, b\}, y \in Y.$$

$(T\xi_a)(y) \neq 0$ o $(T\xi_b)(y) \neq 0$ porque $C(X)$ está generado por ξ_a, ξ_b .

Buscando h

$$X = \{a, b\}, y \in Y.$$

$(T\xi_a)(y) \neq 0$ o $(T\xi_b)(y) \neq 0$ porque $C(X)$ está generado por ξ_a, ξ_b .

Supongamos $(T\xi_a)(y) \neq 0$. Entonces $\xi_a \cdot \xi_b \equiv 0$, y así $(T\xi_b)(y) = 0$

Buscando h

$$X = \{a, b\}, y \in Y.$$

$(T_{\xi_a})(y) \neq 0$ o $(T_{\xi_b})(y) \neq 0$ porque $C(X)$ está generado por ξ_a, ξ_b .

Supongamos $(T_{\xi_a})(y) \neq 0$. Entonces $\xi_a \cdot \xi_b \equiv 0$, y así $(T_{\xi_b})(y) = 0$

El valor en a nos informa sobre el valor en y .

Buscando h

$$X = \{a, b\}, y \in Y.$$

$(T\xi_a)(y) \neq 0$ o $(T\xi_b)(y) \neq 0$ porque $C(X)$ está generado por ξ_a, ξ_b .

Supongamos $(T\xi_a)(y) \neq 0$. Entonces $\xi_a \cdot \xi_b \equiv 0$, y así $(T\xi_b)(y) = 0$

El valor en a nos informa sobre el valor en y .

$$X = \{a, b, c\}, y \in Y.$$

Buscando h

$$X = \{a, b\}, y \in Y.$$

$(T\xi_a)(y) \neq 0$ o $(T\xi_b)(y) \neq 0$ porque $C(X)$ está generado por ξ_a, ξ_b .

Supongamos $(T\xi_a)(y) \neq 0$. Entonces $\xi_a \cdot \xi_b \equiv 0$, y así $(T\xi_b)(y) = 0$

El valor en a nos informa sobre el valor en y .

$$X = \{a, b, c\}, y \in Y.$$

$$(T\xi_a)(y) \neq 0 \text{ o } (T\xi_b)(y) \neq 0 \text{ o } (T\xi_c)(y) \neq 0$$

Buscando h

$$X = \{a, b\}, y \in Y.$$

$(T\xi_a)(y) \neq 0$ o $(T\xi_b)(y) \neq 0$ porque $C(X)$ está generado por ξ_a, ξ_b .

Supongamos $(T\xi_a)(y) \neq 0$. Entonces $\xi_a \cdot \xi_b \equiv 0$, y así $(T\xi_b)(y) = 0$

El valor en a nos informa sobre el valor en y .

$$X = \{a, b, c\}, y \in Y.$$

$$(T\xi_a)(y) \neq 0 \text{ o } (T\xi_b)(y) \neq 0 \text{ o } (T\xi_c)(y) \neq 0$$

Supongamos $(T\xi_a)(y) \neq 0$. Entonces $(T\xi_b)(y) = 0 = (T\xi_c)(y)$

Buscando h

$$X = \{a, b\}, y \in Y.$$

$(T\xi_a)(y) \neq 0$ o $(T\xi_b)(y) \neq 0$ porque $C(X)$ está generado por ξ_a, ξ_b .

Supongamos $(T\xi_a)(y) \neq 0$. Entonces $\xi_a \cdot \xi_b \equiv 0$, y así $(T\xi_b)(y) = 0$

El valor en a nos informa sobre el valor en y .

$$X = \{a, b, c\}, y \in Y.$$

$$(T\xi_a)(y) \neq 0 \text{ o } (T\xi_b)(y) \neq 0 \text{ o } (T\xi_c)(y) \neq 0$$

Supongamos $(T\xi_a)(y) \neq 0$. Entonces $(T\xi_b)(y) = 0 = (T\xi_c)(y)$

Sucede lo mismo de arriba. Sólo a tiene información sobre y .

$$X = \mathbb{N}$$

$$X = \mathbb{N}$$

Puede ser $(T\mathbf{1})(y) \neq 0$ y $(T\xi_n)(y) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, porque $\mathbf{1}$ no es combinación lineal de los ξ_n .

$$X = \mathbb{N}$$

Puede ser $(T\mathbf{1})(y) \neq 0$ y $(T\xi_n)(y) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, porque $\mathbf{1}$ no es combinación lineal de los ξ_n .

¿Lo arreglamos compactificando $\mathbb{N}$?

$$X = \mathbb{N}$$

Puede ser $(T\mathbf{1})(y) \neq 0$ y $(T\xi_n)(y) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, porque $\mathbf{1}$ no es combinación lineal de los ξ_n .

¿Lo arreglamos compactificando $\mathbb{N}$?

Buscamos la información en un punto $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ha de ser en ∞ .

$$X = \mathbb{N}$$

Puede ser $(T\mathbf{1})(y) \neq 0$ y $(T\xi_n)(y) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, porque $\mathbf{1}$ no es combinación lineal de los ξ_n .

¿Lo arreglamos compactificando $\mathbb{N}$?

Buscamos la información en un punto $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ha de ser en ∞ .

$$(T\xi_{2\mathbb{N}})(y) \neq 0 \text{ o } (T\xi_{2\mathbb{N}-1})(y) \neq 0.$$

$$X = \mathbb{N}$$

Puede ser $(T\mathbf{1})(y) \neq 0$ y $(T\xi_n)(y) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, porque $\mathbf{1}$ no es combinación lineal de los ξ_n .

¿Lo arreglamos compactificando $\mathbb{N}$?

Buscamos la información en un punto $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ha de ser en ∞ .

$$(T\xi_{2\mathbb{N}})(y) \neq 0 \text{ o } (T\xi_{2\mathbb{N}-1})(y) \neq 0.$$

No obtenemos ninguna información sobre el valor de $(T\xi_{2\mathbb{N}})(y) \neq 0$.

$$X = \mathbb{N}$$

Puede ser $(T\mathbf{1})(y) \neq 0$ y $(T\xi_n)(y) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, porque $\mathbf{1}$ no es combinación lineal de los ξ_n .

¿Lo arreglamos compactificando $\mathbb{N}$?

Buscamos la información en un punto $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ha de ser en ∞ .

$$(T_{\xi_{2\mathbb{N}}})(y) \neq 0 \text{ o } (T_{\xi_{2\mathbb{N}-1}})(y) \neq 0.$$

No obtenemos ninguna información sobre el valor de $(T_{\xi_{2\mathbb{N}}})(y) \neq 0$.

Necesitamos una compactificación más grande.

$$X = \mathbb{N}$$

Puede ser $(T\mathbf{1})(y) \neq 0$ y $(T\xi_n)(y) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, porque $\mathbf{1}$ no es combinación lineal de los ξ_n .

¿Lo arreglamos compactificando $\mathbb{N}$?

Buscamos la información en un punto $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ha de ser en ∞ .

$$(T_{\xi_{2\mathbb{N}}})(y) \neq 0 \text{ o } (T_{\xi_{2\mathbb{N}-1}})(y) \neq 0.$$

No obtenemos ninguna información sobre el valor de $(T_{\xi_{2\mathbb{N}}})(y) \neq 0$.

Necesitamos una compactificación más grande. $\beta\mathbb{N}$ es la mayor. El cardinal de $\beta\mathbb{N}$ es

$$X = \mathbb{N}$$

Puede ser $(T\mathbf{1})(y) \neq 0$ y $(T\xi_n)(y) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, porque $\mathbf{1}$ no es combinación lineal de los ξ_n .

¿Lo arreglamos compactificando $\mathbb{N}$?

Buscamos la información en un punto $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ha de ser en ∞ .

$$(T_{\xi_{2\mathbb{N}}})(y) \neq 0 \text{ o } (T_{\xi_{2\mathbb{N}-1}})(y) \neq 0.$$

No obtenemos ninguna información sobre el valor de $(T_{\xi_{2\mathbb{N}}})(y) \neq 0$.

Necesitamos una compactificación más grande. $\beta\mathbb{N}$ es la mayor. El cardinal de $\beta\mathbb{N}$ es 2^c .

De aplicación biseparadora a homeomorfismo

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es un isomorfismo de anillos, entonces existe

- *un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$*

tal que $Tf = f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

Aplicaciones biseparadoras?

¿Y si la aplicación es **b**iseparadora?

De aplicación biseparadora a homeomorfismo

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es un isomorfismo de anillos, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$

tal que $Tf = f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

Aplicaciones biseparadoras?

¿Y si la aplicación es **biseparadora**?

Teorema

Sean X, Y **realcompactos**. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación **biseparadora**, entonces existe

De aplicación biseparadora a homeomorfismo

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es un isomorfismo de anillos, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$

tal que $Tf = f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

Aplicaciones biseparadoras?

¿Y si la aplicación es **biseparadora**?

Teorema

Sean X, Y **realcompactos**. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación **biseparadora**, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.

De aplicación biseparadora a homeomorfismo

Teorema

Sean X, Y *realcompactos*. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es un isomorfismo de anillos, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$

tal que $Tf = f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

Aplicaciones biseparadoras?

¿Y si la aplicación es **biseparadora**?

Teorema

Sean X, Y *realcompactos*. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación **biseparadora**, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.

Si además T es **lineal**, entonces existe

De aplicación biseparadora a homeomorfismo

Teorema

Sean X, Y *realcompactos*. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es un isomorfismo de anillos, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$

tal que $Tf = f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

Aplicaciones biseparadoras?

¿Y si la aplicación es **biseparadora**?

Teorema

Sean X, Y *realcompactos*. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación **biseparadora**, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.

Si además T es **lineal**, entonces existe

De aplicación biseparadora a homeomorfismo

Teorema

Sean X, Y *realcompactos*. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es un isomorfismo de anillos, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$

tal que $Tf = f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

Aplicaciones biseparadoras?

¿Y si la aplicación es **biseparadora**?

Teorema

Sean X, Y *realcompactos*. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación **biseparadora**, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.

Si además T es **lineal**, entonces existe

- una función $a: Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $a(y) \neq 0$ ($y \in Y$)

De aplicación biseparadora a homeomorfismo

Teorema

Sean X, Y *realcompactos*. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es un isomorfismo de anillos, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$

tal que $Tf = f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

Aplicaciones biseparadoras?

¿Y si la aplicación es **biseparadora**?

Teorema

Sean X, Y *realcompactos*. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación **biseparadora**, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.

Si además T es **lineal**, entonces existe

- una función $a: Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $a(y) \neq 0$ ($y \in Y$)

tales que $Tf = a \cdot f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

Sea $T : C(X) \rightarrow C(Y)$. Se tiene que en cualquiera de los casos siguientes:

Sea $T : C(X) \rightarrow C(Y)$. Se tiene que en cualquiera de los casos siguientes:

- X e Y son realcompactos, y T is isomorfismo de anillos.

Sea $T : C(X) \rightarrow C(Y)$. Se tiene que en cualquiera de los casos siguientes:

- X e Y son realcompactos, y T is isomorfismo de anillos.
- X e Y son compactos, y T is lineal y separadora.

Sea $T : C(X) \rightarrow C(Y)$. Se tiene que en cualquiera de los casos siguientes:

- X e Y son realcompactos, y T is isomorfismo de anillos.
- X e Y son compactos, y T is lineal y separadora.
- X e Y son realcompactos, y T is lineal y biseparadora.

Sea $T : C(X) \rightarrow C(Y)$. Se tiene que en cualquiera de los casos siguientes:

- X e Y son realcompactos, y T is isomorfismo de anillos.
- X e Y son compactos, y T is lineal y separadora.
- X e Y son realcompactos, y T is lineal y biseparadora.

T es **continua**

Sea $T : C(X) \rightarrow C(Y)$. Se tiene que en cualquiera de los casos siguientes:

- X e Y son realcompactos, y T is isomorfismo de anillos.
- X e Y son compactos, y T is lineal y separadora.
- X e Y son realcompactos, y T is lineal y biseparadora.

T es **continua** (si en $C(X)$ y $C(Y)$ hay topologías razonables)

Aplicaciones separadoras: caso vectorial

X , Y cualesquiera,

Aplicaciones separadoras: caso vectorial

X, Y cualesquiera,

E, F espacios normados cualesquiera

Aplicaciones separadoras: caso vectorial

X, Y cualesquiera,

E, F espacios normados cualesquiera

$C(X, E)$, $C(Y, F)$, $C_{\text{acot}}(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(Y, F)$

Aplicaciones separadoras: caso vectorial

X, Y cualesquiera,

E, F espacios normados cualesquiera

$C(X, E), C(Y, F), C_{\text{acot}}(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(Y, F)$

$T : C(X, E) \rightarrow C(Y, F)$ se dice **separadora** si:

Aplicaciones separadoras: caso vectorial

X, Y cualesquiera,

E, F espacios normados cualesquiera

$C(X, E), C(Y, F), C_{\text{acot}}(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(Y, F)$

$T : C(X, E) \rightarrow C(Y, F)$ se dice **separadora** si:

- T es biyectiva,

Aplicaciones separadoras: caso vectorial

X, Y cualesquiera,

E, F espacios normados cualesquiera

$C(X, E), C(Y, F), C_{\text{acot}}(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(Y, F)$

$T : C(X, E) \rightarrow C(Y, F)$ se dice **separadora** si:

- T es biyectiva,
- T es aditiva,

Aplicaciones separadoras: caso vectorial

X, Y cualesquiera,

E, F espacios normados cualesquiera

$C(X, E), C(Y, F), C_{\text{acot}}(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(Y, F)$

$T : C(X, E) \rightarrow C(Y, F)$ se dice **separadora** si:

- T es biyectiva,
- T es aditiva,
- $\|f(x)\| \cdot \|g(x)\| \equiv 0$ para todo $x \in X \Rightarrow \|(Tf)(y)\| \cdot \|Tg(y)\| \equiv 0$ para todo $y \in Y$.

Aplicaciones separadoras: caso vectorial

X, Y cualesquiera,

E, F espacios normados cualesquiera

$C(X, E), C(Y, F), C_{\text{acot}}(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(Y, F)$

$T : C(X, E) \rightarrow C(Y, F)$ se dice **separadora** si:

- T es biyectiva,
- T es aditiva,
- $\|f(x)\| \cdot \|g(x)\| \equiv 0$ para todo $x \in X \Rightarrow \|(Tf)(y)\| \cdot \|Tg(y)\| \equiv 0$ para todo $y \in Y$.

T se dice **biseparadora** si T y T^{-1} son separadoras.

Aplicaciones separadoras: caso vectorial

X, Y cualesquiera,

E, F espacios normados cualesquiera

$C(X, E), C(Y, F), C_{\text{acot}}(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(Y, F)$

$T : C(X, E) \rightarrow C(Y, F)$ se dice **separadora** si:

- T es biyectiva,
- T es aditiva,
- $\|f(x)\| \cdot \|g(x)\| \equiv 0$ para todo $x \in X \Rightarrow \|(Tf)(y)\| \cdot \|Tg(y)\| \equiv 0$ para todo $y \in Y$.

T se dice **biseparadora** si T y T^{-1} son separadoras.

Definición similar para el caso $C_{\text{acot}}(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(Y, F)$

Teorema (Recordemos:)

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

Teorema (Recordemos:)

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

Teorema (Recordemos:)

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- *un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.*

Teorema (Recordemos:)

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- *un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.*

Si además T es lineal, entonces existe

Teorema (Recordemos:)

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- *un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.*

Si además T es lineal, entonces existe

Teorema (Recordemos:)

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.

Si además T es lineal, entonces existe

- una función $a: Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $a(y) \neq 0$ ($y \in Y$)

Teorema (Recordemos:)

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- *un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.*

Si además T es lineal, entonces existe

- *una función $a: Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $a(y) \neq 0$ ($y \in Y$)*

tales que $(Tf)(y) = a(y)(f \circ h)(y)$ para todo $f \in C(X)$, $y \in Y$.

Aplicaciones biseparadoras vectoriales: caso general

Teorema (Recordemos:)

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- *un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.*

Si además T es lineal, entonces existe

- *una función $a: Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $a(y) \neq 0$ ($y \in Y$)*

tales que $(Tf)(y) = a(y)(f \circ h)(y)$ para todo $f \in C(X)$, $y \in Y$.

Teorema (Caso general)

Sean X, Y realcompactos. Sean E, F espacios normados. Si $T: C(X, E) \rightarrow C(Y, F)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

Aplicaciones biseparadoras vectoriales: caso general

Teorema (Recordemos:)

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.

Si además T es lineal, entonces existe

- una función $a: Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $a(y) \neq 0$ ($y \in Y$)

tales que $(Tf)(y) = a(y)(f \circ h)(y)$ para todo $f \in C(X)$, $y \in Y$.

Teorema (Caso general)

Sean X, Y realcompactos. Sean E, F espacios normados. Si $T: C(X, E) \rightarrow C(Y, F)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.

Si además T es lineal, entonces existe

Aplicaciones biseparadoras vectoriales: caso general

Teorema (Recordemos:)

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.

Si además T es lineal, entonces existe

- una función $a: Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $a(y) \neq 0$ ($y \in Y$)

tales que $(Tf)(y) = a(y)(f \circ h)(y)$ para todo $f \in C(X)$, $y \in Y$.

Teorema (Caso general)

Sean X, Y realcompactos. Sean E, F espacios normados. Si $T: C(X, E) \rightarrow C(Y, F)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.

Si además T es lineal, entonces existe

- una función $J: Y \rightarrow \mathbf{LB}(E, F)$

Aplicaciones biseparadoras vectoriales: caso general

Teorema (Recordemos:)

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.

Si además T es lineal, entonces existe

- una función $a: Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $a(y) \neq 0$ ($y \in Y$)

tales que $(Tf)(y) = a(y)(f \circ h)(y)$ para todo $f \in C(X)$, $y \in Y$.

Teorema (Caso general)

Sean X, Y realcompactos. Sean E, F espacios normados. Si $T: C(X, E) \rightarrow C(Y, F)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.

Si además T es lineal, entonces existe

- una función $J: Y \rightarrow \mathbf{LB}(E, F)$

tales que $(Tf)(y) = (Jy)[(f \circ h)(y)]$ para todo $f \in C(X, E)$, $y \in Y$.

Aplicaciones biseparadoras vectoriales: caso acotado

Recordemos: $C_{\text{acot}}(X)$ y $C(\beta X)$ son indistinguibles como anillos.

Aplicaciones biseparadoras vectoriales: caso acotado

Recordemos: $C_{\text{acot}}(X)$ y $C(\beta X)$ son indistinguibles como anillos.

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C_{\text{acot}}(X) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

Aplicaciones biseparadoras vectoriales: caso acotado

Recordemos: $C_{\text{acot}}(X)$ y $C(\beta X)$ son indistinguibles como anillos.

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C_{\text{acot}}(X) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- *un homeomorfismo $h: \beta Y \rightarrow \beta X$.*

Aplicaciones biseparadoras vectoriales: caso acotado

Recordemos: $C_{\text{acot}}(X)$ y $C(\beta X)$ son indistinguibles como anillos.

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C_{\text{acot}}(X) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- *un homeomorfismo $h: \beta Y \rightarrow \beta X$.*

En general **NO** hay representación aunque T sea lineal.

Teorema (Caso acotado)

Sean X, Y realcompactos. Sean E, F espacios normados.

Aplicaciones biseparadoras vectoriales: caso acotado

Recordemos: $C_{\text{acot}}(X)$ y $C(\beta X)$ son indistinguibles como anillos.

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C_{\text{acot}}(X) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- *un homeomorfismo $h: \beta Y \rightarrow \beta X$.*

En general **NO** hay representación aunque T sea lineal.

Teorema (Caso acotado)

Sean X, Y realcompactos. Sean E, F espacios normados.

Si $T: C_{\text{acot}}(X, E) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y, F)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

Aplicaciones biseparadoras vectoriales: caso acotado

Recordemos: $C_{\text{acot}}(X)$ y $C(\beta X)$ son indistinguibles como anillos.

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C_{\text{acot}}(X) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- *un homeomorfismo $h: \beta Y \rightarrow \beta X$.*

En general **NO** hay representación aunque T sea lineal.

Teorema (Caso acotado)

Sean X, Y realcompactos. Sean E, F espacios normados.

Si $T: C_{\text{acot}}(X, E) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y, F)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- *un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.*

Aplicaciones biseparadoras vectoriales: caso acotado

Recordemos: $C_{\text{acot}}(X)$ y $C(\beta X)$ son indistinguibles como anillos.

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C_{\text{acot}}(X) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- *un homeomorfismo $h: \beta Y \rightarrow \beta X$.*

En general **NO** hay representación aunque T sea lineal.

Teorema (Caso acotado)

Sean X, Y realcompactos. Sean E, F espacios normados.

Si $T: C_{\text{acot}}(X, E) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y, F)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- *un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.*

Si además T es lineal, entonces existe

Aplicaciones biseparadoras vectoriales: caso acotado

Recordemos: $C_{\text{acot}}(X)$ y $C(\beta X)$ son indistinguibles como anillos.

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C_{\text{acot}}(X) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- un homeomorfismo $h: \beta Y \rightarrow \beta X$.

En general **NO** hay representación aunque T sea lineal.

Teorema (Caso acotado)

Sean X, Y realcompactos. Sean E, F espacios normados.

Si $T: C_{\text{acot}}(X, E) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y, F)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.

Si además T es lineal, entonces existe

- una función $J: Y \rightarrow \mathbf{LB}(E, F)$

tales que $(Tf)(y) = (Jy)[(f \circ h)(y)]$ para todo $f \in C_{\text{acot}}(X, E)$, $y \in Y$.

Aplicaciones biseparadoras vectoriales: caso acotado

Recordemos: $C_{\text{acot}}(X)$ y $C(\beta X)$ son indistinguibles como anillos.

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C_{\text{acot}}(X) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- un homeomorfismo $h: \beta Y \rightarrow \beta X$.

En general **NO** hay representación aunque T sea lineal.

Teorema (Caso acotado)

Sean X, Y realcompactos. Sean E, F espacios normados.

Si $T: C_{\text{acot}}(X, E) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y, F)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.

Si además T es lineal, entonces existe

- una función $J: Y \rightarrow \mathbf{LB}(E, F)$

tales que $(Tf)(y) = (Jy)[(f \circ h)(y)]$ para todo $f \in C_{\text{acot}}(X, E)$, $y \in Y$.

Aplicaciones biseparadoras vectoriales: caso acotado

Recordemos: $C_{\text{acot}}(X)$ y $C(\beta X)$ son indistinguibles como anillos.

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C_{\text{acot}}(X) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- un homeomorfismo $h: \beta Y \rightarrow \beta X$.

En general **NO** hay representación aunque T sea lineal.

Teorema (Caso acotado)

Sean X, Y realcompactos. Sean E, F espacios normados.

- **Si E, F son infinitodimensionales**

Si $T: C_{\text{acot}}(X, E) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y, F)$ es una aplicación biseparadora, entonces existe

- un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$.

Si además T es lineal, entonces existe

- una función $J: Y \rightarrow \mathbf{LB}(E, F)$

tales que $(Tf)(y) = (Jy)[(f \circ h)(y)]$ para todo $f \in C_{\text{acot}}(X, E)$, $y \in Y$.

Caso escalar

Sea $T : C(X) \rightarrow C(Y)$. Se tiene que en cualquiera de los casos siguientes:

- X e Y son realcompactos, y T is isomorfismo de anillos.
- X e Y son compactos, y T is lineal y separadora.
- X e Y son realcompactos, y T is lineal y biseparadora.

T es **continua** (si en $C(X)$ y $C(Y)$ hay topologías razonables)

Continuidad automática: caso vectorial

Caso escalar

Sea $T : C(X) \rightarrow C(Y)$. Se tiene que en cualquiera de los casos siguientes:

- X e Y son realcompactos, y T is isomorfismo de anillos.
- X e Y son compactos, y T is lineal y separadora.
- X e Y son realcompactos, y T is lineal y biseparadora.

T es **continua** (si en $C(X)$ y $C(Y)$ hay topologías razonables)

Caso vectorial

T lineal y biseparadora. La continuidad se da si y sólo si existe

- una función $J : Y \rightarrow \text{LCB}(E, F)$

de modo que $(Tf)(y) = (Jy)[(f \circ h)(y)]$ para todo $f, y \in Y$.

Caso vectorial 1

Sean X, Y realcompactos, E, F espacios normados infinitodimensionales.
Sea $T : C_{\text{acot}}(X, E) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y, F)$ biseparadora y lineal. Se tiene que:

Caso vectorial 1

Sean X, Y realcompactos, E, F espacios normados infinitodimensionales.
Sea $T : C_{\text{acot}}(X, E) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y, F)$ biseparadora y lineal. Se tiene que:

entonces T es **continua**

Caso vectorial 1

Sean X, Y realcompactos, E, F espacios normados infinitodimensionales. Sea $T : C_{\text{acot}}(X, E) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y, F)$ biseparadora y lineal. Se tiene que:

- si Y no tiene puntos aislados,

entonces T es **continua** (si en $C_{\text{acot}}(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(Y, F)$ hay topologías razonables)

Caso vectorial 1

Sean X, Y realcompactos, E, F espacios normados infinitodimensionales. Sea $T : C_{\text{acot}}(X, E) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y, F)$ biseparadora y lineal. Se tiene que:

- si Y no tiene puntos aislados,

entonces T es **continua** (si en $C_{\text{acot}}(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(Y, F)$ hay topologías razonables)

Caso vectorial 2

Sean X, Y realcompactos, E, F espacios normados infinitodimensionales. Sea $T : C(X, E) \rightarrow C(Y, F)$ biseparadora y lineal. Se tiene que:

Caso vectorial 1

Sean X, Y realcompactos, E, F espacios normados infinitodimensionales. Sea $T : C_{\text{acot}}(X, E) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y, F)$ biseparadora y lineal. Se tiene que:

- si Y no tiene puntos aislados,

entonces T es **continua** (si en $C_{\text{acot}}(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(Y, F)$ hay topologías razonables)

Caso vectorial 2

Sean X, Y realcompactos, E, F espacios normados infinitodimensionales. Sea $T : C(X, E) \rightarrow C(Y, F)$ biseparadora y lineal. Se tiene que:

entonces T es **continua**

Caso vectorial 1

Sean X, Y realcompactos, E, F espacios normados infinitodimensionales. Sea $T : C_{\text{acot}}(X, E) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y, F)$ biseparadora y lineal. Se tiene que:

- si Y no tiene puntos aislados,

entonces T es **continua** (si en $C_{\text{acot}}(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(Y, F)$ hay topologías razonables)

Caso vectorial 2

Sean X, Y realcompactos, E, F espacios normados infinitodimensionales. Sea $T : C(X, E) \rightarrow C(Y, F)$ biseparadora y lineal. Se tiene que:

- si Y no tiene P -puntos interiores,

entonces T es **continua** (si en $C(X, E)$ y $C(Y, F)$ hay topologías razonables)

Los espacios de Banach $C(X)$ y $C_{\text{acot}}(X)$

X cualquiera

Los espacios de Banach $C(X)$ y $C_{\text{acot}}(X)$

X cualquiera

$$f \in C_{\text{acot}}(X),$$

Los espacios de Banach $C(X)$ y $C_{\text{acot}}(X)$

X cualquiera

$$f \in C_{\text{acot}}(X), \quad \|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Los espacios de Banach $C(X)$ y $C_{\text{acot}}(X)$

X cualquiera

$$f \in C_{\text{acot}}(X), \quad \|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

X cualquiera,

Los espacios de Banach $C(X)$ y $C_{\text{acot}}(X)$

X cualquiera

$f \in C_{\text{acot}}(X)$,

$$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

X cualquiera,

$C_{\text{acot}}(X)$ es un espacio de Banach.

Los espacios de Banach $C(X)$ y $C_{\text{acot}}(X)$

X cualquiera

$f \in C_{\text{acot}}(X)$,

$$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

X cualquiera,

$C_{\text{acot}}(X)$ es un espacio de Banach.

X compacto,

Los espacios de Banach $C(X)$ y $C_{\text{acot}}(X)$

X cualquiera

$f \in C_{\text{acot}}(X)$,

$$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

X cualquiera,

$C_{\text{acot}}(X)$ es un espacio de Banach.

X compacto,

$$C(X) = C_{\text{acot}}(X)$$

Los espacios de Banach $C(X)$ y $C_{\text{acot}}(X)$

X cualquiera

$f \in C_{\text{acot}}(X)$,

$$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

X cualquiera,

$C_{\text{acot}}(X)$ es un espacio de Banach.

X compacto,

$$C(X) = C_{\text{acot}}(X)$$

X compacto,

Los espacios de Banach $C(X)$ y $C_{\text{acot}}(X)$

X cualquiera

$f \in C_{\text{acot}}(X)$,

$$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

X cualquiera,

$C_{\text{acot}}(X)$ es un espacio de Banach.

X compacto,

$$C(X) = C_{\text{acot}}(X)$$

X compacto,

$C(X)$ es un espacio de Banach.

Los espacios de Banach $C(X)$ y $C_{\text{acot}}(X)$

X cualquiera

$f \in C_{\text{acot}}(X)$,

$$\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

X cualquiera,

$C_{\text{acot}}(X)$ es un espacio de Banach.

X compacto,

$$C(X) = C_{\text{acot}}(X)$$

X compacto,

$C(X)$ es un espacio de Banach.

X cualquiera,

$$f \in C_{\text{acot}}(X) \rightsquigarrow \widehat{f} : C(\beta X) \rightarrow \mathbb{K}$$

Los espacios de Banach $C(X)$ y $C_{\text{acot}}(X)$

X cualquiera

$$f \in C_{\text{acot}}(X), \quad \|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

X cualquiera, $C_{\text{acot}}(X)$ es un espacio de Banach.

X compacto, $C(X) = C_{\text{acot}}(X)$

X compacto, $C(X)$ es un espacio de Banach.

X cualquiera, $f \in C_{\text{acot}}(X) \rightsquigarrow \widehat{f} : C(\beta X) \rightarrow \mathbb{K}$

Caso general

- Para cualquier X , $C_{\text{acot}}(X)$ y $C_{\text{acot}}(\beta X)$ son indistinguibles como espacios de Banach.

Caso general?

Sean X , Y **cualesquiera**. Se deduce que X e Y son homeomorfos si

Caso compacto?

Sean X , Y **compactos**. Se deduce que X e Y son homeomorfos si

Caso general?

Sean X , Y **cualesquiera**. Se deduce que X e Y son homeomorfos si

- (?) $C_{\text{acot}}(X)$ y $C_{\text{acot}}(Y)$ son isomorfos como espacios de Banach.

Caso compacto?

Sean X , Y **compactos**. Se deduce que X e Y son homeomorfos si

- (?) $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como espacios de Banach.

Caso general?

Sean X, Y **cualesquiera**. Se deduce que X e Y son homeomorfos si

- (?) $C_{\text{acot}}(X)$ y $C_{\text{acot}}(Y)$ son isomorfos como espacios de Banach.
- (?) $C_{\text{acot}}(X)$ y $C_{\text{acot}}(Y)$ son isométricos como espacios de Banach.

Caso compacto?

Sean X, Y **compactos**. Se deduce que X e Y son homeomorfos si

- (?) $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como espacios de Banach.

Caso general?

Sean X , Y **cualesquiera**. Se deduce que X e Y son homeomorfos si

- (?) $C_{\text{acot}}(X)$ y $C_{\text{acot}}(Y)$ son isomorfos como espacios de Banach.
- (?) $C_{\text{acot}}(X)$ y $C_{\text{acot}}(Y)$ son isométricos como espacios de Banach.

Caso compacto?

Sean X , Y **compactos**. Se deduce que X e Y son homeomorfos si

- (?) $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como espacios de Banach.
- (?) $C(X)$ y $C(Y)$ son isométricos como espacios de Banach.

Teorema (Banach-Stone escalar)

Sean X e Y compactos. Sea $T : C(X) \rightarrow C(Y)$ una isometría lineal. Entonces existen:

Caso general?

Sean X , Y **cualesquiera**. Se deduce que X e Y son homeomorfos si

- (?) $C_{\text{acot}}(X)$ y $C_{\text{acot}}(Y)$ son isomorfos como espacios de Banach.
- (?) $C_{\text{acot}}(X)$ y $C_{\text{acot}}(Y)$ son isométricos como espacios de Banach.

Caso compacto?

Sean X , Y **compactos**. Se deduce que X e Y son homeomorfos si

- (?) $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como espacios de Banach.
- (?) $C(X)$ y $C(Y)$ son isométricos como espacios de Banach.

Teorema (Banach-Stone escalar)

Sean X e Y compactos. Sea $T : C(X) \rightarrow C(Y)$ una isometría lineal. Entonces existen:

- **un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$**

Caso general?

Sean X, Y **cualesquiera**. Se deduce que X e Y son homeomorfos si

- (?) $C_{\text{acot}}(X)$ y $C_{\text{acot}}(Y)$ son isomorfos como espacios de Banach.
- (?) $C_{\text{acot}}(X)$ y $C_{\text{acot}}(Y)$ son isométricos como espacios de Banach.

Caso compacto?

Sean X, Y **compactos**. Se deduce que X e Y son homeomorfos si

- (?) $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como espacios de Banach.
- (?) $C(X)$ y $C(Y)$ son isométricos como espacios de Banach.

Teorema (Banach-Stone escalar)

Sean X e Y compactos. Sea $T : C(X) \rightarrow C(Y)$ una isometría lineal. Entonces existen:

- un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$
- una función $a : Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $|a(y)| \equiv 1$

Caso general?

Sean X , Y **cualesquiera**. Se deduce que X e Y son homeomorfos si

- (?) $C_{\text{acot}}(X)$ y $C_{\text{acot}}(Y)$ son isomorfos como espacios de Banach.
- (?) $C_{\text{acot}}(X)$ y $C_{\text{acot}}(Y)$ son isométricos como espacios de Banach.

Caso compacto?

Sean X , Y **compactos**. Se deduce que X e Y son homeomorfos si

- (?) $C(X)$ y $C(Y)$ son isomorfos como espacios de Banach.
- (?) $C(X)$ y $C(Y)$ son isométricos como espacios de Banach.

Teorema (Banach-Stone escalar)

Sean X e Y compactos. Sea $T : C(X) \rightarrow C(Y)$ una isometría lineal. Entonces existen:

- un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$
- una función $a : Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $|a(y)| \equiv 1$

tales que $Tf = a \cdot f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

Los espacios de Banach $C(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(X, E)$

X cualquiera

Los espacios de Banach $C(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(X, E)$

X cualquiera

E espacio de Banach

Los espacios de Banach $C(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(X, E)$

X cualquiera

E espacio de Banach

$$f \in C_{\text{acot}}(X, E),$$

Los espacios de Banach $C(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(X, E)$

X cualquiera

E espacio de Banach

$$f \in C_{\text{acot}}(X, E), \quad \|f\| := \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

Los espacios de Banach $C(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(X, E)$

X cualquiera

E espacio de Banach

$$f \in C_{\text{acot}}(X, E), \quad \|f\| := \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

X cualquiera,

Los espacios de Banach $C(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(X, E)$

X cualquiera

E espacio de Banach

$$f \in C_{\text{acot}}(X, E), \quad \|f\| := \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

X cualquiera, $C_{\text{acot}}(X, E)$ es un espacio de Banach.

Los espacios de Banach $C(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(X, E)$

X cualquiera

E espacio de Banach

$$f \in C_{\text{acot}}(X, E), \quad \|f\| := \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

X cualquiera, $C_{\text{acot}}(X, E)$ es un espacio de Banach.

X compacto,

Los espacios de Banach $C(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(X, E)$

X cualquiera

E espacio de Banach

$$f \in C_{\text{acot}}(X, E), \quad \|f\| := \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

X cualquiera, $C_{\text{acot}}(X, E)$ es un espacio de Banach.

$$X \text{ compacto,} \quad C(X, E) = C_{\text{acot}}(X, E)$$

Los espacios de Banach $C(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(X, E)$

X cualquiera

E espacio de Banach

$$f \in C_{\text{acot}}(X, E), \quad \|f\| := \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

X cualquiera, $C_{\text{acot}}(X, E)$ es un espacio de Banach.

X compacto, $C(X, E) = C_{\text{acot}}(X, E)$

X compacto,

Los espacios de Banach $C(X, E)$ y $C_{\text{acot}}(X, E)$

X cualquiera

E espacio de Banach

$$f \in C_{\text{acot}}(X, E), \quad \|f\| := \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

X cualquiera, $C_{\text{acot}}(X, E)$ es un espacio de Banach.

X compacto, $C(X, E) = C_{\text{acot}}(X, E)$

X compacto, $C(X, E)$ es un espacio de Banach.

Teorema (Banach-Stone escalar)

Sean X e Y compactos. Sea $T : C(X) \rightarrow C(Y)$ una isometría lineal. Entonces existen:

- un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$
- una función $a : Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $|a(y)| \equiv 1$

tales que $(Tf)(y) = a(y)(f \circ h)(y)$ para todo $f \in C(X)$, $y \in Y$.

Teorema (Banach-Stone escalar)

Sean X e Y compactos. Sea $T : C(X) \rightarrow C(Y)$ una isometría lineal. Entonces existen:

- un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$
- una función $a : Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $|a(y)| \equiv 1$

tales que $(Tf)(y) = a(y)(f \circ h)(y)$ para todo $f \in C(X)$, $y \in Y$.

Teorema (Banach-Stone vectorial)

Sean X, Y compactos. Sean E, F espacios de Banach de centralizador trivial. Sea $T : C(X, E) \rightarrow C(Y, F)$ una isometría lineal. Entonces existen

Teorema (Banach-Stone escalar)

Sean X e Y compactos. Sea $T : C(X) \rightarrow C(Y)$ una isometría lineal. Entonces existen:

- un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$
- una función $a : Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $|a(y)| \equiv 1$

tales que $(Tf)(y) = a(y)(f \circ h)(y)$ para todo $f \in C(X)$, $y \in Y$.

Teorema (Banach-Stone vectorial)

Sean X, Y compactos. Sean E, F espacios de Banach de centralizador trivial. Sea $T : C(X, E) \rightarrow C(Y, F)$ una isometría lineal. Entonces existen

- un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$.

Teorema (Banach-Stone escalar)

Sean X e Y compactos. Sea $T : C(X) \rightarrow C(Y)$ una isometría lineal. Entonces existen:

- un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$
- una función $a : Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $|a(y)| \equiv 1$

tales que $(Tf)(y) = a(y)(f \circ h)(y)$ para todo $f \in C(X)$, $y \in Y$.

Teorema (Banach-Stone vectorial)

Sean X, Y compactos. Sean E, F espacios de Banach de centralizador trivial. Sea $T : C(X, E) \rightarrow C(Y, F)$ una isometría lineal. Entonces existen

- un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$.
- una función $J : Y \rightarrow \text{Is}(E, F)$

Teorema (Banach-Stone escalar)

Sean X e Y compactos. Sea $T : C(X) \rightarrow C(Y)$ una isometría lineal. Entonces existen:

- un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$
- una función $a : Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $|a(y)| \equiv 1$

tales que $(Tf)(y) = a(y)(f \circ h)(y)$ para todo $f \in C(X)$, $y \in Y$.

Teorema (Banach-Stone vectorial)

Sean X, Y compactos. Sean E, F espacios de Banach de centralizador trivial. Sea $T : C(X, E) \rightarrow C(Y, F)$ una isometría lineal. Entonces existen

- un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$.
- una función $J : Y \rightarrow \text{Is}(E, F)$

tales que $(Tf)(y) = (Jy)[(f \circ h)(y)]$ para todo $f \in C(X, E)$, $y \in Y$.

Teorema (Banach-Stone escalar)

Sean X e Y compactos. Sea $T : C(X) \rightarrow C(Y)$ una isometría lineal. Entonces existen:

- un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$
- una función $a : Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $|a(y)| \equiv 1$

tales que $(Tf)(y) = a(y)(f \circ h)(y)$ para todo $f \in C(X)$, $y \in Y$.

Teorema (Banach-Stone vectorial)

Sean X, Y compactos. Sean E, F espacios de Banach de centralizador trivial. Sea $T : C(X, E) \rightarrow C(Y, F)$ una isometría lineal. Entonces existen

- un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$.
- una función $J : Y \rightarrow \mathbf{Is}(E, F)$

tales que $(Tf)(y) = (Jy)[(f \circ h)(y)]$ para todo $f \in C(X, E)$, $y \in Y$.

Hernández, Beckenstein y Narici prueban el resultado utilizando aplicaciones biseparadoras si E, F (o sus duales) son estrictamente convexos.

El Teorema de Banach-Stone no compacto

Teorema

Sean X, Y cualesquiera. Sean E, F espacios de Banach de centralizador trivial.

El Teorema de Banach-Stone no compacto

Teorema

Sean X, Y cualesquiera. Sean E, F espacios de Banach de centralizador trivial.

Sea $T : C_{\text{acot}}(X, E) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y, F)$ una isometría lineal. Entonces existen

El Teorema de Banach-Stone no compacto

Teorema

Sean X, Y cualesquiera. Sean E, F espacios de Banach de centralizador trivial.

Sea $T : C_{\text{acot}}(X, E) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y, F)$ una isometría lineal. Entonces existen

- un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$.*

El Teorema de Banach-Stone no compacto

Teorema

Sean X, Y cualesquiera. Sean E, F espacios de Banach de centralizador trivial.

Sea $T : C_{\text{acot}}(X, E) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y, F)$ una isometría lineal. Entonces existen

- un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$.*
- una función $J : Y \rightarrow \mathbf{Is}(E, F)$*

El Teorema de Banach-Stone no compacto

Teorema

Sean X, Y cualesquiera. Sean E, F espacios de Banach de centralizador trivial.

Sea $T : C_{\text{acot}}(X, E) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y, F)$ una isometría lineal. Entonces existen

- un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$.*
- una función $J : Y \rightarrow \mathbf{Is}(E, F)$*

tales que $(Tf)(y) = (Jy)[(f \circ h)(y)]$ para todo $f \in C_{\text{acot}}(X, E)$, $y \in Y$.

El Teorema de Banach-Stone no compacto

Teorema

Sean X, Y cualesquiera. Sean E, F espacios de Banach de centralizador trivial.

- Si X, Y son realcompactos, y E, F son infinitodimensionales

Sea $T : C_{\text{acot}}(X, E) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y, F)$ una isometría lineal. Entonces existen

- un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$.
- una función $J : Y \rightarrow \mathbf{Is}(E, F)$

tales que $(Tf)(y) = (Jy)[(f \circ h)(y)]$ para todo $f \in C_{\text{acot}}(X, E)$, $y \in Y$.

El Teorema de Banach-Stone no compacto

Teorema

Sean X, Y cualesquiera. Sean E, F espacios de Banach de centralizador trivial.

- Si X, Y son realcompactos, y E, F son infinitodimensionales
- Si todos los puntos de X, Y son G_δ , y E, F son infinitodimensionales

Sea $T : C_{\text{acot}}(X, E) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y, F)$ una isometría lineal. Entonces existen

- un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$.
- una función $J : Y \rightarrow \mathbf{Is}(E, F)$

tales que $(Tf)(y) = (Jy)[(f \circ h)(y)]$ para todo $f \in C_{\text{acot}}(X, E)$, $y \in Y$.

El Teorema de Banach-Stone no compacto

Teorema

Sean X, Y cualesquiera. Sean E, F espacios de Banach de centralizador trivial.

- Si X, Y son realcompactos, y E, F son infinitodimensionales
- Si todos los puntos de X, Y son G_δ , y E, F son infinitodimensionales
- Si X e Y son primero-contables.

Sea $T : C_{\text{acot}}(X, E) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y, F)$ una isometría lineal. Entonces existen

- un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$.
- una función $J : Y \rightarrow \mathbf{Is}(E, F)$

tales que $(Tf)(y) = (Jy)[(f \circ h)(y)]$ para todo $f \in C_{\text{acot}}(X, E)$, $y \in Y$.

El Teorema de Banach-Stone no compacto

Teorema

Sean X, Y cualesquiera. Sean E, F espacios de Banach de centralizador trivial.

- *Si X, Y son realcompactos, y E, F son infinitodimensionales*
- *Si todos los puntos de X, Y son G_δ , y E, F son infinitodimensionales*
- *Si X e Y son primero-contables.*

Sea $T : C_{\text{acot}}(X, E) \rightarrow C_{\text{acot}}(Y, F)$ una isometría lineal. Entonces existen

- *un homeomorfismo $h : Y \rightarrow X$.*
- *una función $J : Y \rightarrow \text{Is}(E, F)$*

tales que $(Tf)(y) = (Jy)[(f \circ h)(y)]$ para todo $f \in C_{\text{acot}}(X, E)$, $y \in Y$.

Caso uniformemente continuo

El resultado anterior también es correcto si suponemos que:

- X e Y son métricos completos.

En tal caso, si $T : C_{\text{acot}}^{\text{unifcont}}(X, E) \rightarrow C_{\text{acot}}^{\text{unifcont}}(Y, F)$ es isometría lineal, se obtiene la representación, donde además h es un homeomorfismo uniforme.

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación lineal y biseparadora, entonces existen un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$ y una función $a: Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $a(y) \neq 0$ ($y \in Y$) tales que $Tf = a \cdot f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

¿ Y separadora? (en el ámbito realcompacto)

¿ Cuándo se puede exigir simplemente que sea separadora?

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación lineal y biseparadora, entonces existen un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$ y una función $a: Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $a(y) \neq 0$ ($y \in Y$) tales que $Tf = a \cdot f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

¿Y separadora? (en el ámbito realcompacto)

¿ Cuándo se puede exigir simplemente que sea separadora?

- cuando X e Y son compactos.

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación lineal y biseparadora, entonces existen un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$ y una función $a: Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $a(y) \neq 0$ ($y \in Y$) tales que $Tf = a \cdot f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

¿ Y separadora? (en el ámbito realcompacto)

¿ Cuándo se puede exigir simplemente que sea separadora?

- cuando X e Y son compactos.

Y además, ¿separadora $\Rightarrow$ biseparadora?...

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación lineal y biseparadora, entonces existen un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$ y una función $a: Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $a(y) \neq 0$ ($y \in Y$) tales que $Tf = a \cdot f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

¿Y separadora? (en el ámbito realcompacto)

¿ Cuándo se puede exigir simplemente que sea separadora?

- cuando X e Y son compactos.

Y además, ¿separadora $\Rightarrow$ biseparadora?...

X, Y cualesquiera. Algunos casos independientes entre sí...

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación lineal y biseparadora, entonces existen un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$ y una función $a: Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $a(y) \neq 0$ ($y \in Y$) tales que $Tf = a \cdot f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

¿Y separadora? (en el ámbito realcompacto)

¿ Cuándo se puede exigir simplemente que sea separadora?

- cuando X e Y son compactos.

Y además, ¿separadora $\Rightarrow$ biseparadora?...

X, Y cualesquiera. Algunos casos independientes entre sí...

- cuando Y es compacto

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación lineal y biseparadora, entonces existen un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$ y una función $a: Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $a(y) \neq 0$ ($y \in Y$) tales que $Tf = a \cdot f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

¿Y separadora? (en el ámbito realcompacto)

¿ Cuándo se puede exigir simplemente que sea separadora?

- cuando X e Y son compactos.

Y además, ¿separadora $\Rightarrow$ biseparadora?...

X, Y cualesquiera. Algunos casos independientes entre sí...

- cuando Y es compacto
- cuando Y es conexo

Teorema

Sean X, Y realcompactos. Si $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ es una aplicación lineal y biseparadora, entonces existen un homeomorfismo $h: Y \rightarrow X$ y una función $a: Y \rightarrow \mathbb{K}$ continua con $a(y) \neq 0$ ($y \in Y$) tales que $Tf = a \cdot f \circ h$ para todo $f \in C(X)$.

¿Y separadora? (en el ámbito realcompacto)

¿ Cuándo se puede exigir simplemente que sea separadora?

- cuando X e Y son compactos.

Y además, ¿separadora $\Rightarrow$ biseparadora?...

X, Y cualesquiera. Algunos casos independientes entre sí...

- cuando Y es compacto
- cuando Y es conexo
- cuando X es cerodimensional