

## Capítulo 3

# Propiedades de los diagramas de Voronoi y Delaunay para distancias convexas en el plano

Una de las herramientas fundamentales de la *Geometría Computacional* son los *Diagramas de Voronoi*. La idea que subyace detrás de los mismos es la de, dado un conjunto de objetos geométricos  $S$  en un cierto espacio  $E$ , descomponer  $E$  en “regiones de influencia” de los mismos. A estas regiones de influencia se las llama *regiones de Voronoi*.

En su versión original el espacio  $E$  es el espacio Euclídeo, el conjunto  $S$  es un conjunto finito (o al menos discreto) de puntos y la descomposición de  $E$  se hace de forma que cada punto  $p$  de  $E$  pertenece a la región correspondiente al punto de  $q \in S$  que le es más próximo (respecto a la distancia usual, o *Euclídea*). Véase un ejemplo en la Figura 3.1.

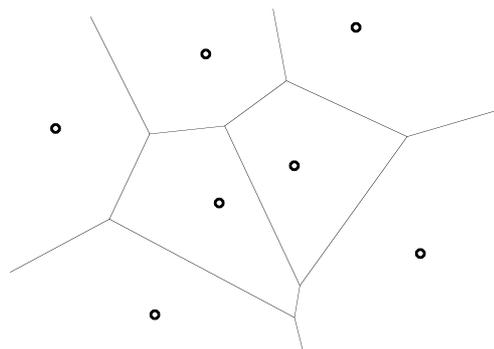


Figura 3.1: Diagrama de Voronoi Euclídeo.

La idea da pie a muchas variaciones. Uno puede sustituir el espacio Euclídeo por otro espacio geométrico, uno puede sustituir los puntos de  $S$  por objetos más complicados y uno puede sustituir la distancia Euclídea por otras “funciones distancia” diferentes, que no necesitan siquiera ser *distancias* en el sentido matemático del término. Para más información en estos aspectos consúltense los *surveys* [Klein] y [Aurenhammer]

El trabajo que nosotros presentamos se dirige en el último sentido. Consideraremos diagramas de Voronoi en el plano Euclídeo definidos por nubes finitas de puntos, pero utilizaremos para construirlos distancias diferentes de la distancia Euclídea. En particular, estudiaremos el caso de las distancias *convexas* que son una generalización natural de la distancia Euclídea y aparecen en el Análisis Funcional con el nombre de *métricas funcionales de Minkowski*, aunque generalmente en espacios vectoriales topológicos de dimensión infinita (véase [Köthe]).

Las principales aplicaciones de los diagramas de Voronoi nacen de que el diagrama contiene de una forma compacta información sobre la proximidad relativa de los puntos de la nube  $S$ . Así, por ejemplo, el punto  $Q$  de  $S$  más cercano a otro cierto punto  $P$  de  $S$  es siempre uno de sus *vecinos* en el diagrama de Voronoi. Para muchas de estas aplicaciones lo que es más interesante de un diagrama de Voronoi no es su forma exacta, sino su estructura topológico-combinatoria (ésto es, qué regiones son adyacentes entre sí, o *vecinas*). Por ello, es muchas veces equivalente trabajar con el diagrama de Voronoi en sí o con su dual topológico (de hecho, uno se obtiene del otro en tiempo lineal). Además, el dual topológico del diagrama de Voronoi admite una realización geométrica más sencilla que el diagrama de Voronoi, en la cual los vértices son los puntos de  $S$  y las aristas son segmentos que unen puntos de  $S$  cuyas regiones de Voronoi son adyacentes. A ésta realización específica del dual de un diagrama de Voronoi se la conoce habitualmente como *triangulación de Delaunay*. En realidad no siempre es una triangulación, ya que el diagrama de Voronoi puede tener vértices de valencia mayor que tres en casos degenerados. Nosotros usaremos el nombre *diagrama de Delaunay* para evitar confusión. La Figura 3.2 muestra el diagrama de Delaunay correspondiente a la nube de puntos de la Figura 3.1.

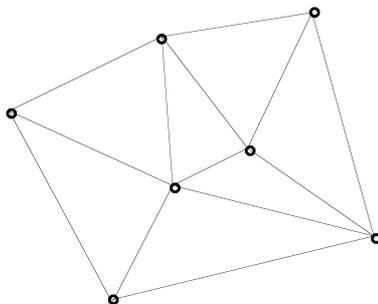


Figura 3.2: Diagrama de Delaunay Euclídeo.

La importancia del diagrama de Delaunay (o el de Voronoi) como paso previo para resolver problemas de proximidad puede verse en el hecho de que los siguientes problemas se resuelven en tiempo lineal una vez que se conoce el diagrama de Delaunay [Preparata-Sha.]. Además, todos ellos tienen complejidad  $O(n \log(n))$  intrínsecamente, que es la misma que la del propio diagrama de Delaunay.

- (i) Cálculo de una triangulación de  $S$ .
- (ii) Cálculo del diagrama de Voronoi de  $S$ .
- (iii) Cálculo de la envolvente convexa de  $S$ .

- (iv) Cálculo de un árbol de longitud total mínima y que tenga por vértices a los puntos de  $S$ .
- (v) Cálculo del vecino más próximo en  $S$  para cada punto de  $S$ .

Para las distancias convexas que vamos a manejar la conveniencia de considerar diagramas de Delaunay en vez de diagramas de Voronoi es aún mayor, puesto que en los diagramas de Voronoi las aristas no serán, en general, segmentos de recta, sino curvas más o menos complicadas dependiendo de la forma del convexo que las define.

La estructura del capítulo es la siguiente.

La sección 3.1 está dedicada a mostrar algunas propiedades interesantes de los diagramas de Delaunay (y de Voronoi) para la distancia Euclídea, relacionados con la propiedad del levantamiento. La propiedad del levantamiento es la que permite traducir el cálculo de los diagramas de Voronoi y de Delaunay de una configuración de puntos en  $\mathbb{R}^d$  al cálculo de la envolvente convexa (más bien, de la envolvente convexa inferior) de una configuración de puntos “levantados” a  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Además de esta aplicación práctica, la propiedad del levantamiento permite relacionar los tipos topológicos de diagramas de Delaunay con los de poliedros inscribibles en la esfera (cf. la Sección 3.1.2), permite deducir que los diagramas de Delaunay son divisiones regulares de la envolvente convexa de los puntos (Sección 3.1.3) y permite definir ciertas matroides orientadas relacionadas con las particiones de los puntos producidas por circunferencias (o, más generalmente, por esferas) a las que nosotros llamamos *matroides orientadas de Delaunay* (Sección 3.1.4). Aunque estas cosas son todas ellas más o menos bien conocidas el tratamiento es original, especialmente en lo referente a matroides orientadas de Delaunay (en particular, el primer lugar donde éstas aparecen con ese nombre es en [Santos3, Santos4]).

Las secciones 3.2 y 3.3 estarán dedicadas a introducir, respectivamente, las distancias convexas y los diagramas de Voronoi y Delaunay que producen. El material de estas secciones proviene en parte de [Mazón] y algunas otras fuentes que se señalan en cada momento, pero también hay aportaciones originales y simplificación de muchas de las demostraciones. En 3.2 veremos las propiedades más interesantes de las distancias convexas, especialmente en el caso de que sean *estrictamente convexas* y *suaves*. En éste caso, las  $d_K$ -circunferencias de la distancia  $d_K$  tendrán muchas de las buenas propiedades de las circunferencias Euclídeas (por ejemplo, el hecho de que tres puntos alineados no son cocirculares y que tres puntos no alineados definen una única circunferencia que pasa por ellos. El objetivo de 3.3 es probar sendos resultados sobre la estructura de los diagramas de Voronoi y Delaunay de las distancias *estrictamente convexas* (Proposiciones 3.3.5 y 3.3.10). En particular, el hecho de que son diagramas en el sentido del Capítulo 1). Como Corolario se obtiene la dualidad entre diagramas de Voronoi y de Delaunay.

La sección 3.4 entra a comparar con más cuidado los tipos topológicos de diagramas de Delaunay producidos por las distancias estrictamente convexas con los permitidos en el caso de la distancia Euclídea. Si la distancia no es suave el diagrama de Delaunay puede no tener contorno convexo, lo cual implica la aparición de nuevos tipos topológicos (Proposición 3.4.2). Más difícil será probar la aparición de estos nuevos tipos para las distancias estrictamente convexas y suaves. Sin embargo, obtendremos que *cualquier* distancia estrictamente convexa cuya bola unidad no

sea una elipse puede producir diagramas de Delaunay de tipos prohibidos para la distancia Euclídea (Teoremas 3.4.6 y 3.4.10). Además, se muestra un ejemplo con el mínimo número de puntos posibles, que es 7.

La última sección hace referencia a la relación de los diagramas de Delaunay con matroides orientadas y divisiones regulares. En 3.5.1 se ve que, aunque las matroides orientadas de Delaunay se definieron partiendo de la *propiedad del levantamiento* en la Sección 3.1, la definición en sí no necesita de dicha propiedad sino tan sólo unas ciertas “buenas propiedades” de las circunferencias. El resultado 3.5.1 de esta sección es válido para cualquier dimensión. Después, no será difícil comprobar que estas buenas propiedades se satisfacen para las distancias estrictamente convexas y suaves. Por tanto, la definición se extiende a ellas de forma natural (cf.3.5.2). Sin embargo, las matroides orientadas que aparecen ahora pueden ser *no-realizables*, y ejemplos de ellas se muestran en 3.5.3. Así mismo, se muestra que el diagrama de Delaunay puede ser una división no regular de la envolvente convexa de la nube de puntos, lo cual tiene por consecuencia la imposibilidad de una propiedad del levantamiento semejante a la de la distancia Euclídea.

### 3.1 La propiedad del levantamiento de los diagramas de Delaunay Euclídeos y algunas consecuencias

En esta sección vamos a ver algunas propiedades de los diagramas de Delaunay Euclídeos. El lector no familiarizado con los diagramas de Delaunay y de Voronoi puede consultar las definiciones y propiedades que se dan en la Sección 3.3 directamente para el caso de diagramas de Voronoi respecto a una distancia convexa arbitraria. Bástele saber que la distancia Euclídea es una distancia estrictamente convexa y suave.

#### 3.1.1 La propiedad del levantamiento

Sea  $S$  una nube de puntos en el plano Euclídeo  $\mathbb{R}^2$  y consideremos su diagrama de Delaunay  $DelS$ . Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos de  $S$  que están unidos por una arista en el diagrama. Entonces, por definición, las regiones de Voronoi de  $P$  y de  $Q$  son adyacentes. Ésto implica que existe un cierto punto  $x$  en la arista de adyacencia de las dos regiones tal que

$$d(x, P) = d(x, Q) < d(x, R), \forall R \in S \setminus \{P, Q\}.$$

Dicho de otra manera, existe una cierta circunferencia (con centro en el punto  $x$ ) que pasa por  $P$  y  $Q$  que tiene al resto de puntos de  $S$  en su exterior estricto. Del mismo modo, si  $P_1, \dots, P_k$  son los vértices de uno de los polígonos del diagrama de Delaunay las correspondientes regiones de Voronoi tienen un vértice común. Ésto implica que existe una circunferencia (con centro en dicho vértice de Voronoi común) que pasa por los puntos  $P_1, \dots, P_k$  y que tiene al resto de puntos de  $S$  en su exterior estricto. Además, el recíproco de estas propiedades también es cierto. Todo ello se puede expresar de la siguiente manera: las *celdas* (i.e., caras, aristas y vértices) del diagrama de Delaunay son las envolventes convexas de aquéllos subconjuntos  $T$  de  $S$  tales que existe una circunferencia que pasa por todos los puntos de  $T$  y tienen en su exterior a todos los puntos de  $S \setminus T$ .

Una primera consecuencia de esta caracterización de las celdas del diagrama de Delaunay es que el diagrama de Delaunay tiene contorno convexo, puesto que para dos vértices consecutivos  $P$  y  $Q$  de la envolvente convexa, una circunferencia con centro en su bisector y suficientemente alejada, pasa por  $P$  y  $Q$  y tiene al resto de los puntos en su exterior. Sin embargo, hay algunas consecuencias más profundas, como es la que estudiamos en este apartado. En particular, este comportamiento del diagrama de Delaunay respecto a las circunferencias proporcionará uno de los algoritmos más elegantes para el cálculo de un diagrama de Delaunay (o de Voronoi) en el espacio Euclídeo de  $d$  dimensiones  $\mathbb{R}^d$ , que es el que lo reduce al cálculo de una envolvente convexa en  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Esta reducción se expone a continuación.

Consideremos la aplicación  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $p(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ , la cual produce un *levantamiento* del plano sobre el paraboloides esférico de ecuación  $z = x^2 + y^2$ . La propiedad fundamental de éste levantamiento es que la intersección del paraboloides con un plano no vertical se proyecta sobre una circunferencia de  $\mathbb{R}^2$ . Además, la parte del paraboloides por debajo del plano se proyecta sobre el interior de la circunferencia y la parte por encima sobre el exterior.

Recíprocamente, cualquier circunferencia de  $\mathbb{R}^2$ , al levantarla al paraboloides es una elipse, es decir, la intersección del paraboloides con un plano no vertical. Por otra parte, la intersección del paraboloides con cualquier plano vertical se proyecta sobre una recta de  $\mathbb{R}^2$  y cualquier recta de  $\mathbb{R}^2$  se levanta sobre una parábola, que es la intersección del paraboloides con un plano vertical.

Consideremos ahora una nube de puntos  $S$  y su imagen  $S' = p(S)$  en el paraboloides. Sea  $T$  un cierto subconjunto de  $S$  que define una celda del diagrama de Delaunay. Sea  $c_T$  la circunferencia que pasa por todos los puntos de  $T$  y tiene a los demás en el exterior. Entonces, la elipse  $c'_T = p(c_T)$  que resulta de levantar  $c_T$  pasa por cada uno de los puntos de  $T' = p(T)$  y todos los demás puntos del levantamiento  $S'$  de  $S$  están *encima* del plano que contiene a  $c'_T$ . Dicho de otra forma,  $T'$  es el conjunto de vértices de una cara de la envolvente convexa de  $S'$  cuya normal exterior se dirige hacia abajo. A esta parte de la envolvente convexa se la conoce como la *envolvente inferior* de  $S'$ . En consecuencia:

**Proposición 3.1.1 ([Brown])** *El diagrama de Delaunay de una cierta nube de puntos  $S$  del plano Euclídeo coincide con la proyección de la envolvente inferior del levantamiento de los puntos al paraboloides  $z = x^2 + y^2$  de  $\mathbb{R}^3$ .  $\square$*

Normalmente nos referiremos a este resultado como la propiedad del levantamiento de los diagramas de Delaunay Euclídeos. La propiedad del levantamiento es válida en cualquier dimensión, sin más que sustituir el paraboloides por la hipersuperficie  $x_{n+1} = x_1^2 + \dots + x_n^2$ . Implica que el cálculo de un diagrama de Delaunay de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^d$  puede hacerse en el mismo tiempo que el de la envolvente convexa en  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Para  $d \geq 3$  esto significa esencialmente  $O(n^{\frac{d}{2}})$  (hay una pequeña distinción entre el caso de que  $d$  sea par o impar). Para  $d = 2$  la envolvente convexa se calcula en  $O(n \log(n))$ , lo cual es óptimo para el diagrama de Delaunay. Se conocen otros algoritmos para el cálculo de diagramas de Delaunay planos en este mismo tiempo, pero el que pasa por un levantamiento de los puntos es quizá el más elegante (y el de más fácil implementación, tomando la envolvente convexa como primitiva) aunque posiblemente no el más eficiente.

### 3.1.2 Poliedros inscribibles en la esfera y tipos topológicos de diagramas de Delaunay

Una consecuencia interesante de la propiedad del levantamiento es que relaciona los tipos topológicos de diagramas de Delaunay Euclídeos posibles en el plano con los tipos topológicos de poliedros que se pueden inscribir en el paraboloides. Sin embargo, la relación no es del todo directa puesto que el diagrama de Delaunay se corresponde sólo con la parte inferior de dichos poliedros. Mediante una pequeña modificación del método podemos relacionar los diagramas de Delaunay con poliedros inscribibles en la esfera, lo cual es más conveniente.

Supongamos que en vez de proyectar el plano de forma ortogonal sobre un paraboloides hacemos una proyección estereográfica sobre una esfera. Llamemos  $\infty$  al punto de la esfera que es el centro de la proyección, es decir, a la “imagen” del infinito del plano por la proyección. Ahora la propiedad fundamental es que las circunferencias del plano se proyectan sobre circunferencias de la esfera que no pasan por  $\infty$ , yendo el exterior a parar a la región que contiene a  $\infty$ . Sea de nuevo  $S$  una nube de puntos en el plano y sea  $S'$  su imagen en la esfera. Consideremos la envolvente convexa de  $S' \cup \infty$ , que es un poliedro inscrito en la esfera. Entonces, las caras del diagrama de Delaunay se corresponden biyectivamente con las caras de dicho poliedro que no tienen a  $\infty$  como vértice. Recíprocamente, dado un cierto poliedro en la esfera que tiene a  $\infty$  como vértice, y deshaciendo la proyección estereográfica, las caras del poliedro que no tienen a  $\infty$  por vértice se proyectan sobre un diagrama de Delaunay.

El problema de si todo poliedro topológico admite un representante inscrito en la esfera fue propuesto por J. Steiner en 1882 y resuelto negativamente por E. Steinitz en 1927. A los que sí admiten un representante inscrito en la esfera se les conoce como *inscribibles*. Véase [Grümbaum] para las referencias precisas y una demostración de existencia de poliedros no-inscribibles. El siguiente enunciado refleja la relación antes descrita entre poliedros inscribibles y diagramas de Delaunay y es una reescritura del lema 2.2 de [Dill.-Smith].

**Proposición 3.1.2** *Un cierto diagrama  $\mathcal{D}$  conexo y acotado en el plano Euclídeo es topológicamente equivalente a un diagrama de Delaunay si y sólo si el poliedro (topológico) que resulta de compactificar el plano por un punto en el infinito y unir cada vértice del contorno de  $\mathcal{D}$  con el infinito es inscribible en la esfera.*

Veamos ésto con un ejemplo. Considérense los dos diagramas de la Figura 3.3. Compactificando, en cualquiera de ellos, el plano por un punto en el infinito y uniendo éste con los seis vértices exteriores en el primer ejemplo o con los tres exteriores en el segundo, se obtiene el mismo poliedro topológico. Dicho poliedro topológico se conoce como *tetraedro punteado*, porque coincide con el que se obtiene si se toma un punto interior en cada una de las cuatro caras de un tetraedro y se une a los tres vértices de dicha cara. Es conocido que el tetraedro punteado no es inscribible en la esfera. Una demostración se puede hacer a través del siguiente condición necesaria de inscribibilidad, tomada de [Grümbaum]:

**Lema 3.1.3** *Sea  $P$  un poliedro inscribible en la esfera. Sea  $V^*$  un subconjunto de los vértices de  $P$  tal que ninguna arista une dos vértices de  $V^*$ . Entonces,  $V^*$  consta de, a lo más, la mitad de los vértices de  $P$  y consta exactamente de la mitad si y sólo si toda arista de  $P$  incide en al menos un vértice de  $V^*$ .*

En el tetraedro punteado, los cuatro vértices añadidos son exactamente la mitad del total, pero existen aristas que no inciden en ellos. Por tanto, no es un poliedro inscribible. Ésto, unido a la Proposición 3.1.2, implica que ningún diagrama de Delaunay Euclídeo tiene el tipo topológico de ninguno de los dos de la Figura 3.3. Por exploración exhaustiva es fácil ver que los ejemplos son minimales: cualquier diagrama que pueda ser dibujado con aristas rectilíneas, contorno convexo y a lo más seis vértices puede ser realizado como diagrama de Delaunay.

Una demostración alternativa de la no-realizabilidad de estos dos diagramas se puede hacer mediante el siguiente procedimiento: consideremos el caso de una triangulación de Delaunay, es decir, un diagrama de Delaunay cuyas caras son todos triángulos. Consideremos dos triángulos  $PQR_1$  y  $PQR_2$  con una arista común  $PQ$ . El hecho de que exista una circunferencia que pasa por  $P$  y  $Q$  y deja a  $R_1$  y  $R_2$  en el exterior es equivalente a que los dos ángulos opuestos a la arista (el del triángulo  $PQR_1$  en el vértice  $R_1$  y el del triángulo  $PQR_2$  en el vértice  $R_2$ ) sumen menos de  $\pi$  radianes.

Aplicando ésto a las tres aristas más gruesas del primer diagrama se obtiene que los tres ángulos de los vértices más exteriores suman menos de  $\pi$  radianes (porque los tres del vértice interior suman  $2\pi$ ), lo cual es imposible, si queremos que el contorno sea convexo. En el segundo ejemplo, de nuevo considerando las tres aristas más gruesas, la implicación sería que alguno de los tres ángulos obtusos de los tres triángulos exteriores habría de valer más de  $\pi$  radianes.

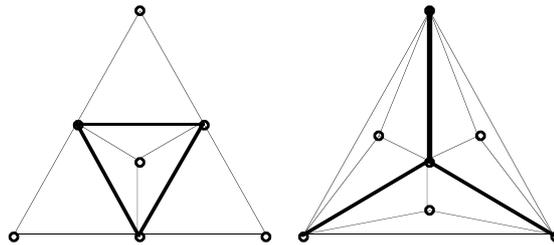


Figura 3.3: Algunos diagramas que no pueden ser de Delaunay, para la distancia Euclídea.

Para diagramas con caras de cuatro lados, una condición para que sean Delaunay es que los dos ángulos opuestos de una cara de cuatro lados sumen exactamente  $\pi$  radianes. Por tanto, con los mismos argumentos se puede demostrar que los diagramas descritos en la siguiente Proposición tampoco son realizables como diagramas de Delaunay. Aunque no lo demostraremos, de nuevo una exploración exhaustiva indica que éstos son todos los ejemplos posibles de diagramas no realizables como diagrama de Delaunay Euclídeo con siete puntos.

**Proposición 3.1.4** *Ni los dos diagramas que se muestran en la figura 3.3 ni ninguno de los trece que se obtienen de suprimir una o dos de las tres aristas más gruesas en alguno de ellos o las tres aristas más gruesas en el segundo es realizable por un diagrama de Delaunay con la distancia Euclídea.*  $\square$

En la Sección 3.4 veremos que éstos diagramas (en particular el de la izquierda) sí se pueden realizar como diagramas de Delaunay para una distancia convexa (es más, para “casi toda” distancia convexa).

Antes de terminar este apartado debemos mencionar una caracterización de los poliedros inscribibles en la esfera, dada recientemente por Rivin (véase [Rivin], [Hodgson-Rivin] [Hodgson-R-S]) a través de su relación con los poliedros realizables en el espacio hipérbolico tridimensional con todos sus vértices en el hiperplano del infinito. Ésta caracterización resulta tener que ver con las condiciones de suma de ángulos que acabamos de mencionar para los diagramas de Delaunay.

Sea  $\mathcal{D}$  un poliedro topológico del que queremos saber si es inscribible en la esfera. Asignemos a cada arista  $e$  del mismo un cierto “peso”  $w(e)$  (que se corresponde exactamente con la suma de ángulos opuestos en el diagrama de Delaunay). Consideremos el dual de  $\mathcal{D}$  y asignemos a cada arista dual  $e^*$  el peso dual  $w^*(e^*) = \pi - w(e)$ . Entonces,  $\mathcal{D}$  es inscribible en la esfera si y sólo si existe una tal asignación de pesos tal que

- (i)  $0 < w^*(e^*) < \pi$
- (ii) La suma de los pesos duales de las aristas de una cara suman exactamente  $2\pi$  (en la interpretación de ángulos del diagrama de Delaunay ésto es equivalente a que los ángulos alrededor de un vértice sumen  $2\pi$ ).
- (iii) La suma de los pesos duales de un ciclo de aristas (un circuito) que no sean el contorno de una cara es estrictamente mayor que  $2\pi$ .

Es decir, los argumentos sobre ángulos opuestos que nosotros hemos señalado son condiciones necesarias para que un cierto diagrama sea realizable como diagrama de Delaunay Euclídeo, pero no son suficientes, porque no tienen en cuenta ni lo que pasa en el “vértice del infinito” ni la condición (iii) de Rivin. Ésta última se traduciría al diagrama como una condición sobre la suma de ángulos opuestos a todas las aristas de cada *cocircuito* del diagrama  $\mathcal{D}$ , en lenguaje de teoría de grafos. La caracterización de Rivin traduce el problema de inscribibilidad de un poliedro en la esfera y el de realizabilidad de un diagrama como diagrama de Delaunay Euclídeo a un problema de existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones e inecuaciones lineales. Dicho problema puede ser resuelto en tiempo polinomial en el número de vértices (tiempo  $O(n^{5.38})$  de acuerdo con [Hodgson-R-S]). Ésto supone una importante mejora sobre un algoritmo de decisión de realizabilidad como diagrama de Delaunay mencionado en [C-M-R-Santos], el cual se basaba en la existencia de solución a un sistema de ecuaciones de grado dos.

Por último, mencionemos también que otro intento de caracterizar los diagramas equivalentes a uno de Delaunay (y, por tanto, los poliedros inscribibles en la esfera) está siendo llevado a cabo por M. Dillencourt (y varios colaboradores), está vez teniendo en cuenta únicamente propiedades del grafo del diagrama (por ejemplo, el hecho de que el grafo de un poliedro inscribible posee siempre un ciclo Hamiltoniano). Sin embargo, las condiciones necesarias y las condiciones suficientes que poseen hasta el momento no dan aún una caracterización completa. Como referencias en esta dirección véanse [Dillencourt] y [Dill.-Smith].

### 3.1.3 Triangulaciones (o divisiones) regulares

La propiedad del levantamiento nos lleva también a relacionar los diagramas de Delaunay con dos conceptos fundamentales en Geometría Combinatoria, como son las *triangulaciones regulares* y las *matroides orientadas*. Nosotros utilizaremos el

nombre de *divisiones regulares* en vez de el de triangulaciones (más frecuente en la bibliografía) para admitir la posibilidad de casos degenerados.

Introduzcamos un poco de notación. Un *polígono convexo* (o, simplemente *polígono*)  $\mathcal{P}$  en el espacio Euclídeo  $d$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$  es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos  $P_1, \dots, P_n$ . Una *cara* de  $\mathcal{P}$  es la intersección de  $\mathcal{P}$  con un hiperplano que no corta al interior de  $\mathcal{P}$ . De otra manera, cada funcional lineal  $l$  en  $\mathbb{R}^n$  define una cara  $c_l$  de  $\mathcal{P}$ , que es el conjunto de puntos de  $\mathcal{P}$  donde  $l$  alcanza su valor máximo posible en  $\mathcal{P}$ . Una *división* de  $\mathcal{P}$  es una colección de polígonos convexos  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$  cuya unión es  $\mathcal{P}$  y que se cortan bien, entendiéndose por esto que la intersección de dos cualesquiera de ellos es una cara de ambos.

Dada una subdivisión  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$  de un cierto polígono  $\mathcal{P}$ , se dice que la división es *regular* [Ziegler] (o *convexa* [Itenberg] o *coherente* [Gel'fand-K-Z]) si existe una cierta función continua  $f$  de  $\mathcal{P}$  en  $\mathbb{R}$  tal que para todo par de puntos  $P$  y  $Q$  de  $\mathcal{P}$ , si  $R$  es el punto medio del segmento  $[P, Q]$  se tiene:

- (i)  $f(P) + f(Q) = 2f(R)$  si  $P$  y  $Q$  pertenecen a un mismo sub-polígono de la división.
- (ii)  $f(P) + f(Q) < 2f(R)$  si  $P$  y  $Q$  no pertenecen a un mismo sub-polígono de la división.

La primera condición implica que  $f$  es lineal en cada subpolígono. La segunda, que  $f$  es convexa y que no es lineal en la unión de dos subpolígonos.

Como muestra de la importancia del concepto de divisiones regulares, mencionemos que aparecen en Geometría Algebraica en relación con las llamadas *Varietades Tóricas* y, en particular, son utilizadas en el Teorema de Viro (cf. [Itenberg] ó [Viro]) sobre construcción de curvas algebraicas con topología controlada, ya mencionado en la Sección 2.3 del Capítulo anterior.

La definición de división regular admite una interpretación geométrica, especialmente clara para el caso de un polígono ( $d = 2$ ). Consideremos el grafo de la función  $f$  como un levantamiento del plano a una cierta superficie. Las condiciones de la definición implican que  $f$  es una función convexa y lineal a trozos. Por tanto, dicha superficie es la envolvente inferior de un cierto poliedro convexo. Además, por la condición de linealidad en cada polígono de la división y no-linealidad en la unión de dos, se tiene que los polígonos de la división son exactamente la imagen de las caras del levantamiento. Por tanto, una división de un polígono convexo del plano es regular si y sólo si coincide con la proyección de la envolvente inferior de un cierto levantamiento de sus vértices. La propiedad del levantamiento (Proposición 3.1.1) de los diagramas de Delaunay Euclídeos implica, por tanto, que *el diagrama de Delaunay Euclídeo de una nube de puntos  $S$  en el plano es una división regular de la envolvente convexa de  $S$* . Este resultado también es cierto en dimensión superior.

Veamos algunos ejemplos de divisiones que no son regulares. El más clásico (también el más pequeño posible, en número de vértices) es el de la Figura 3.4. La clave para demostrar que la división de la Figura no es regular está en observar que las prolongaciones de las tres aristas  $P_1P_2$ ,  $P_3P_4$  y  $P_5P_6$  se cortan en un cierto punto  $O$ . Consideremos un levantamiento convexo  $P'_1P'_2P'_3P'_4P'_5P'_6$  de los vértices de la figura, y la recta vertical  $o$  que pasa por  $O$ . Para que la envolvente inferior de los puntos levantados se corresponda con la figura (en particular, con los triángulos  $P_1P_2P_3$  y  $P_2P_3P_4$ ) es necesario que la prolongación de  $P'_1P'_2$  corte a la recta  $o$

más abajo que la prolongación de  $P_3P_4'$ . Del mismo modo, es necesario que la prolongación de  $P_3P_4'$  corte a  $o$  más abajo que la de  $P_5P_6'$  y que ésta la corte más abajo que la de  $P_1P_2'$ . Ésto hace imposible encontrar un tal levantamiento.

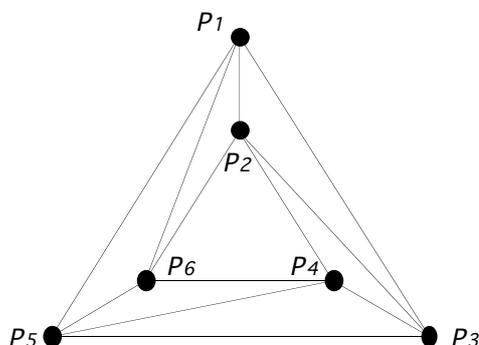


Figura 3.4: Una división no regular de un triángulo.

El ejemplo se puede generalizar a un polígono de más de tres lados, con los mismos argumentos. Ni siquiera es necesario que las prolongaciones de las tres aristas se corten en un punto, sino una condición más general que podemos expresar de la siguiente manera:

Sea  $S$  una nube finita de puntos y sea  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$  una división de la envolvente convexa de  $S$  en polígonos convexos. Sea  $O$  un punto cualquiera del plano. Diremos que uno de los polígonos  $\mathcal{P}_i$  está detrás de otro  $\mathcal{P}_j$  visto desde  $O$  si hay una semirrecta que parte de  $O$  y atraviesa los interiores de  $\mathcal{P}_j$  y  $\mathcal{P}_i$ , en ese orden. Diremos que  $\mathcal{P}_i$  y  $\mathcal{P}_j$  están necesariamente a igual distancia vistos desde  $O$  si tienen una arista común, cuya prolongación pasa por  $O$ .

Supongamos que la división que estamos considerando es regular y consideremos un levantamiento de los puntos para el cual la división coincide con la proyección de su envolvente inferior. Sean  $\mathcal{P}'_1, \dots, \mathcal{P}'_k$  los polígonos de la envolvente inferior del levantamiento, que se proyectan respectivamente sobre  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ . Si  $\mathcal{P}_i$  está detrás de  $\mathcal{P}_j$  visto desde  $O$ , entonces el plano que contiene a  $\mathcal{P}'_i$  corta a la recta vertical que pasa por  $O$  más abajo que el plano que contiene a  $\mathcal{P}'_j$ . Por otro lado, si  $\mathcal{P}_i$  y  $\mathcal{P}_j$  tienen una arista común cuya prolongación pasa por  $O$ , entonces los planos que contienen a  $\mathcal{P}'_i$  y  $\mathcal{P}'_j$  cortan a la recta vertical que pasa por  $O$  en el mismo punto.

Por tanto, para que la división pueda ser regular es necesario que las relaciones “estar detrás (visto desde  $O$ )” y “estar necesariamente a igual distancia (visto desde  $O$ )” que hemos definido sobre los polígonos de la división no contengan contradicción o, dicho de otra manera, que exista un orden total sobre los polígonos de la división para el cual aquéllos polígonos que tienen una arista común cuya prolongación pasa por  $O$  se considerean identificados y para dos polígonos  $\mathcal{P}_i$  y  $\mathcal{P}_j$ , si  $\mathcal{P}_i$  está detrás de  $\mathcal{P}_j$  visto desde  $O$  entonces  $\mathcal{P}_i > \mathcal{P}_j$ . Si tal orden existe, para un cierto punto  $O$ , diremos que la división es *coherente* (vista desde  $O$ ) y que es *incoherente* en caso contrario. De todo lo dicho anteriormente se deduce que:

**Proposición 3.1.5** *Sea  $S$  una nube finita de puntos en el plano y sea  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$  una división de la envolvente convexa de  $S$ . Si existe un punto  $O$  en el plano para el cual la división es incoherente, entonces la división no es regular.  $\square$*

Observaciones:

- (i) Las definiciones de *estar detrás* y *estar necesariamente a igual distancia* vistos desde el punto  $O$  se generalizan de manera trivial para polítopos de una división en dimensión arbitraria  $d$ , sin más que exigir en la segunda que los dos polítopos tengan una cara  $(d - 1)$ -dimensional en común y que el hiperplano que contiene a ésta pase por  $O$ . En estas condiciones sigue siendo cierta la Proposición 3.1.5.
- (ii) En el caso de dimensión 2 un punto “visto desde el cual” la división es incoherente está necesariamente dentro de la envolvente convexa de  $S$ . Sin embargo, ésto no es cierto en dimensión mayor o igual a 3.
- (iii) En realidad, la definición de “ser coherente vista desde  $O$ ” para una división puede hacerse restringiendo la definición de “estar detrás” a pares de polítopos que tengan una cara  $(d - 1)$ -dimensional en común. Ésto es así porque si esta relación restringida puede extenderse a un orden total, la transitividad de éste nos asegura que el orden es compatible con la relación sin restringir.

Como aplicación de la Proposición 3.1.5, considérense los dos diagramas de la Figura 3.5, que son pequeñas perturbaciones del de la Figura 3.4. En ellos las tres aristas  $P_1P_2$ ,  $P_3P_4$  y  $P_5P_6$  ya no se cortan en un punto común. Aún así, en el de la derecha la división sigue siendo incoherente respecto al antiguo punto de corte  $O$  y, por tanto, no es regular. La división de la izquierda es coherente desde dicho punto y desde cualquier otro y, de hecho, es regular.

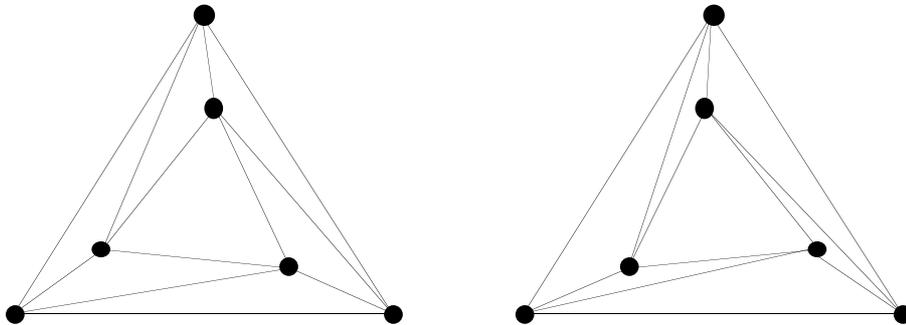


Figura 3.5: Dos perturbaciones de la triangulación de la Figura 3.4

La importancia que damos a la Proposición 3.1.5 proviene del hecho de que no conocemos ninguna división no regular que no sea incoherente respecto de algún punto. Podríamos conjeturar, por tanto, que la Proposición da una caracterización de las triangulaciones no regulares en el plano, aunque nos parece demasiado aventurado conjeturarlo en dimensión arbitraria. Debemos mencionar que la posibilidad de que las divisiones no regulares de un polígono convexo estén caracterizadas por un enunciado del estilo de nuestra Proposición 3.1.5 ha sido sugerida al autor por Jesús de Loera.

### 3.1.4 Matroides orientadas de Delaunay

Vayamos ahora con el concepto de matroide orientada. Para todo tipo de información sobre matroides orientadas recomendamos la consulta de [Björner-L-S-W-Z].

A modo de introducción, observemos que los determinantes que acabamos de definir para tres puntos en el plano Euclídeo se pueden generalizar a  $k$  puntos  $P_1, \dots, P_k$  en el espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^{k-1}$  de dimensión  $k - 1$ . Definimos

$$(P_1, \dots, P_k) = \begin{pmatrix} P_1 & 1 \\ P_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ P_k & 1 \end{pmatrix}$$

De nuevo, el determinante es cero si los puntos son afínmente dependientes y si no lo es su signo nos indica la orientación que definen en su envolvente convexa, que es un símplex. Dados dos conjuntos  $S = \{P_1, \dots, P_n\}$  y  $T = \{Q_1, \dots, Q_n\}$  de puntos en el espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^{k-1}$ , decimos que los puntos definen la misma matroide orientada si hay una aplicación biyectiva de  $S$  en  $T$  que preserva los signos de los determinantes de  $n$ -tuplas de puntos. En realidad, la definición original de matroide orientada no se hace sobre conjuntos de puntos en el espacio Euclídeo, sino con vectores en el espacio vectorial  $\mathbb{R}^k$ . Es por ésto por lo que nosotros necesitamos añadir una última componente 1 a cada uno de los puntos. En cierto modo, estamos considerando matroides orientadas definidas por vectores que quedan todos al mismo lado de un cierto hiperplano vectorial. Estas matroides orientadas particulares se conocen como *acíclicas*.

La definición usual de matroide orientada se hace a través de una serie de propiedades (axiomas) que la colección de signos de los determinantes de  $k$ -tuplas de puntos de un conjunto finito siempre satisface. Otras definiciones equivalentes no hacen referencia a los signos de los determinantes sino a otros invariantes afines de la configuración de puntos. Nosotros escogeremos la definición en términos de *covectores*, porque es la que mejor se adapta a la situación de los diagramas de Delaunay.

**Definición 3.1.6** *Sea  $S = \{P_1, \dots, P_n\}$  un conjunto finito. Los  $P_i$  son aquí entes abstractos que, a priori, no se corresponden con puntos de ningún espacio, pero usaremos la palabra puntos para referirnos a ellos. Un covector  $C$  será una partición de  $S$  en tres conjuntos  $(C_-, C_0, C_+)$  a los que llamaremos, parte positiva, nula y negativa del covector. Diremos que una colección  $\mathcal{V}$  de covectores forma (o define) una matroide orientada en  $S$  si se satisfacen las cuatro condiciones siguientes:*

(V0) *El covector vacío  $(\emptyset, S, \emptyset)$  está en  $\mathcal{V}$ .*

(V1) *Para todo covector  $C = (C_-, C_0, C_+)$  de  $\mathcal{V}$  su opuesto  $-C = (C_+, C_0, C_-)$  también está en  $\mathcal{V}$ .*

(V2) *Para cada par de covectores  $C = (C_-, C_0, C_+)$  y  $D = (D_-, D_0, D_+)$  de  $\mathcal{V}$  su composición  $C \circ D = (C_- \cup (D_- \cap C_0), C_0 \cap D_0, C_+ \cup (D_+ \cap C_0))$  también está en  $\mathcal{V}$ . Dicho con otras palabras, el covector  $C \circ D$  tiene el signo de  $C$  en los puntos donde  $C$  no es nulo y el de  $D$  en los demás.*

(V3) *Para cada par de covectores  $C = (C_-, C_0, C_+)$  y  $D = (D_-, D_0, D_+)$  de  $\mathcal{V}$  y para todo punto  $e \in C_+ \cap D_-$  existe otro covector  $Z = (Z_-, Z_0, Z_+)$  en  $\mathcal{V}$  que es cero en  $e$  (i.e. con  $e \in Z_0$ ) y con  $(C_+ \setminus D_-) \cup (D_+ \setminus C_-) \subseteq Z_+$  y  $(C_- \setminus D_+) \cup (D_- \setminus C_+) \subseteq Z_-$ . Dicho con otras palabras, el signo de  $Z$  en un cierto punto coincide con la suma de los signos de  $C$  y  $D$ , siempre que esta suma esté bien definida, es decir, que  $C$  y  $D$  no tengan signos contrarios en dicho punto.*

En muchas ocasiones un cierto covector definido sobre un conjunto de puntos  $P_1, \dots, P_n$  será representado como una lista de los signos que el covector toma en los diferentes puntos. Así, si  $S = \{P_1, \dots, P_6\}$ , el covector  $C = (\{P_1, P_4, P_5\}, \{P_3\}, \{P_2, P_6\})$  vendrá representado como  $[-, +, 0, -, -, +]$ . Esta representación hace más evidente el significado del covector como asignación de un cierto signo a cada punto.

El *rango* de una matroide orientada se define como la longitud máxima de una cadena de covectores en la cual cada covector se obtiene del anterior mediante composición con otro covector. Por ejemplo, si  $P = \{1, 2, 3\}$  y  $\mathcal{V}$  consiste en todas los posibles covectores de  $P$  (lo cual satisface los axiomas (V0)-(V3)) ésto produce una matroide orientada de rango 3 y una posible cadena de covectores de longitud tres es

$$[0, 0, 0] \rightarrow [+ , 0, 0] \rightarrow [+ , +, 0] \rightarrow [+ , +, +].$$

Claramente, el rango de una matroide orientada es menor o igual que el número de puntos.

Una matroide orientada se dice *acíclica* si contiene al covector positivo  $(\emptyset, \emptyset, S)$  y se dice *politopal* si, para todo punto  $e \in S$ , contiene al covector  $(\emptyset, \{e\}, S \setminus \{e\})$ .

Volvamos a considerar el caso de una nube finita de puntos  $S$  en el espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^{k-1}$ . Todo funcional lineal  $l$  define una partición (un covector) de  $S$  en tres partes  $C_l = (l^{-1}(\mathbb{R}_-), l^{-1}(0), l^{-1}(\mathbb{R}_+))$ . Además, el conjunto de tales particiones satisface los axiomas de los covectores de una matroide orientada: la composición  $C_{l_1} \circ C_{l_2}$  de dos covectores  $C_{l_1}$  y  $C_{l_2}$  asociado a dos funcionales es el covector  $C_l$  asociado a un funcional  $l = l_1 + \varepsilon l_2$  que es una “pequeña perturbación” de  $l_1$  por  $l_2$ , en el mismo sentido que las pequeñas perturbaciones estudiadas en la Sección 2.3 del Capítulo 2. Denotando  $h_i$  al hiperplano  $l_i = 0$ , el signo del parámetro  $\varepsilon$  de la perturbación se toma de forma que  $l$  tenga signo positivo en la parte de  $h_1 \setminus h_2$  donde  $l_2$  tiene signo positivo. Por su parte, dado un punto  $P \in S$  tal que  $l_1(P) > 0$  y  $l_2(P) < 0$ , i.e. en las condiciones del axioma (V3), el covector  $Z$  que allí aparece viene dado por cualquier combinación lineal  $l = \alpha l_1 + \beta l_2$  para la cual  $l(P) = 0$ , con  $\alpha, \beta > 0$ .

Es fácil comprobar que la matroide orientada definida por estos covectores es acíclica, y que es politopal si y sólo si los puntos se encuentran en *posición convexa* (i.e., si todos ellos son vértices de la envolvente convexa de  $S$ ). Su rango vale una unidad más que la dimensión del subespacio afín generado por  $S$ . A las matroides orientadas que se pueden obtener de esta manera las llamaremos orientables:

**Definición 3.1.7** *Una matroide orientada acíclica  $\mathcal{M}$  de rango  $k$  en  $n$  puntos se dice realizable (o representable) si existe una nube  $S$  de  $n$  puntos en el espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^{k-1}$  de  $k - 1$  dimensiones tal que  $\mathcal{M}$  coincide con la matroide orientada cuyos covectores son las particiones de  $S$  inducidas por los hiperplanos de  $\mathbb{R}^{k-1}$ .*

Estamos ahora en condiciones de ver la relación entre matroides orientadas y diagramas de Delaunay. Hemos de mencionar que, aunque ésta relación ya aparece formulada en [Björner-L-S-W-Z], la exposición allí contenida se hace en términos de circuitos de la matroide orientada y sólo para el caso de diagramas en el plano. La formulación en términos de covectores resulta ser mucho más sencilla y fácil de generalizar a dimensión mayor.

Sea  $S$  una nube de puntos en el plano y consideremos su levantamiento  $S'$  al paraboloides en  $\mathbb{R}^3$ , antes descrito. Consideremos la matroide orientada asociada a  $S'$  como conjunto de puntos. Esta matroide orientada es acíclica, politopal, tiene rango cuatro si los puntos de  $S$  no eran ni cocirculares ni colineales y, además, sus covectores admiten una caracterización muy sencilla en términos de cómo las distintas circunferencias o rectas del plano parten al conjunto  $S$ . A saber, si  $c$  es una cierta circunferencia y  $c_+$  y  $c_-$  son las dos componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 \setminus c$ , entonces la imagen por el levantamiento de la partición de  $S$  ( $c_- \cap S, c \cap S, c_+ \cap S$ ) (que es un covector en  $S'$ ) es uno de los covectores de la matroide orientada. De ésta manera, cada circunferencia o recta del plano define dos covectores (que son opuestos) en la matroide orientada de  $S'$ .

En particular, para todo subconjunto  $T$  de  $S$  cuya envolvente convexa sea una celda (cara, arista o vértice) del diagrama de Delaunay de  $S$ , se tiene que  $(\emptyset, T, S \setminus T)$  es un covector de la matroide orientada de  $S'$ . Por ésta razón, a esta matroide orientada la llamaremos, *matroide orientada de Delaunay* de  $S$ , y la denotaremos por  $\text{DOM}(S)$ . Sin embargo, ésta relación no es del todo biyectiva, puesto que un covector de la forma  $(\emptyset, T, S \setminus T)$  en la matroide orientada de Delaunay puede corresponder con una circunferencia del plano que tiene a todos los puntos de  $S \setminus T$  en su interior, en vez de en su exterior.

Para solucionar ésto podemos considerar un punto adicional  $\infty$  al que supon-dremos en el exterior de cualquier circunferencia y sobre cualquier recta. Los co- vectores definidos por cómo las rectas y circunferencias del plano dividen a  $S \cup \{\infty\}$  definen una nueva matroide orientada  $\text{EDOM}(S)$  a la que llamaremos la *matroide orientada de Delaunay extendida* de  $S$ . El nombre proviene del hecho de que la operación de añadir un punto a una matroide orientada se conoce generalmente con el nombre de *extensión*.

La matroide orientada de Delaunay extendida es, de nuevo, politopal y acíclica. Su rango es cuatro siempre que los puntos de  $S$  no estén alineados. Además, las celdas del diagrama de Delaunay se corresponden de forma biyectiva con los covectores de  $\text{EDOM}(S)$  que sean de la forma  $(\emptyset, T, S \cup \{\infty\} \setminus T)$ , de forma que una tal celda es la envolvente convexa del correspondiente subconjunto  $T$ .

Aún más, la matroide orientada de Delaunay extendida de  $S$  contiene la in- formación topológico/combinatoria de no sólo el diagrama de Voronoi usual (o de orden 1) de  $S$ , sino del diagrama de Voronoi de cualquier orden. El diagrama de Voronoi de orden  $i$  divide el plano en regiones, cada una correspondiente a un cierto subconjunto  $T$  de  $S$  de cardinal  $i$ , de forma que cada punto de la “región de Voronoi” de  $T$  es más cercano a cualquier punto de  $T$  que a cualquier punto de  $S \setminus T$  [Edelsb.-Seidel].

El estudio de las matroides orientadas de Delaunay (así como la regularidad de los diagramas de Delaunay) será retomado en la Sección 3.5, ésta vez aplicado a las distancias estrictamente convexas y suaves.

## 3.2 Distancias convexas en el plano. Definición y propiedades

Pasamos a estudiar ahora una clase de *funciones de distancia* a cuyos diagramas de Delaunay/Voronoi intentaremos aplicar las propiedades que hemos visto en la Sección anterior para la distancia Euclídea. Estas distancias, que son las llamadas distancias convexas, no van a poseer una propiedad del levantamiento como la distancia Euclídea (lo cual forma parte de una de nuestros principales resultados). Sin embargo, algunas de las cosas que hemos mencionado como consecuencia de la propiedad del levantamiento para la distancia Euclídea serán aún ciertas para ellas.

### 3.2.1 Distancias convexas

Sea  $K$  un cierto subconjunto convexo y compacto del plano Euclídeo  $\mathbb{R}^2$ , con interior no vacío. Sea  $O$  un punto del interior de  $K$ , al que llamaremos el *centro* de  $K$  y que tomaremos como origen de coordenadas. Definiremos la “ $K$ -distancia” desde  $O$  a cualquier otro punto  $P$  del plano como el único factor de escala  $\lambda \geq 0$  para el cual el convexo  $\lambda K$  tiene a  $P$  en su frontera. Aún más, para cualquier par de puntos  $P$  y  $Q$  del plano definiremos la  $K$ -distancia desde  $P$  hasta  $Q$  (y denotaremos por  $d_K(P, Q)$ ) como el único factor de escala  $\lambda \geq 0$  para el cual el convexo  $P + \lambda K$  tiene a  $Q$  en su frontera.

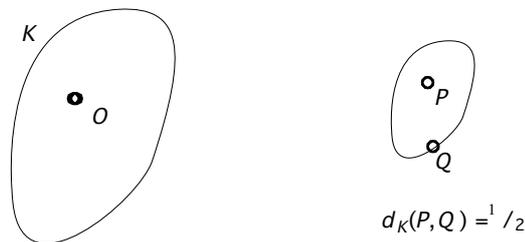


Figura 3.6: Definición de una distancia convexa.

Para que la definición tenga sentido no es estrictamente necesario que  $K$  sea convexo; bastaría con que sea “estrellado” con respecto al punto  $O$  (es decir, que cualquier semirrecta que parte de  $O$  corte a la frontera de  $K$  una y sólo una vez). Sin embargo, es fácil demostrar (véase [Chew-Drysdale] o nuestra Proposición 3.2.2) que, gracias a la convexidad de  $K$ , la función  $d_K$  satisface la desigualdad triangular

$$\forall P, Q, R \in \mathbb{R}^2, \quad d_K(P, Q) + d_K(Q, R) \leq d_K(P, R).$$

Si, además, el convexo  $K$  tiene simetría central respecto a  $O$  (es decir, si  $K = -K$ ), la función  $d_K : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  que acabamos de definir será simétrica y será, por tanto, una verdadera distancia. En este caso la función  $d_K$  define la llamada *norma de Minkowski* asociada al convexo  $K$  [Köthe]. Nosotros no exigiremos la condición de simetría, y nos quedaremos con la siguiente definición:

**Definición 3.2.1** Sea  $d_K$  una función de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0}$  y supongamos que existe un cierto conjunto convexo y compacto  $K$  del plano  $\mathbb{R}^2$  con el origen de coordenadas  $O$  en su interior y tal que para todo par de puntos  $P$  y  $Q$  del plano

$d_K(P, Q)$  coincide con el único factor de escala  $\lambda > 0$  tal que  $P + \lambda K$  tiene a  $Q$  en su frontera. Entonces, diremos que  $d_K$  es una distancia convexa. Diremos que  $K$  es la bola unidad de  $d_K$  y que su frontera  $\partial K$  es la circunferencia unidad de  $d_K$ . Las traslaciones a escala  $P + \lambda K$  y  $P + \lambda \partial K$  (para todo punto  $P$  del plano y todo  $\lambda > 0$ ) serán, respectivamente, las bolas y circunferencias de  $d_K$ . Nótese que toda  $d_K$ -circunferencia es, por tanto, la frontera de una cierta  $d_K$ -bola.

Como ya hemos dicho, las distancias convexas simétricas han sido ampliamente estudiadas desde principios de siglo en el ámbito del análisis funcional. En el contexto de los diagramas de Voronoi, fueron introducidas por Chew y Drysdale que mostraron un algoritmo del tipo “divide y vencerás” para su cálculo. Diagramas de Voronoi para algunos caso particulares (distancias  $L_p$ ) ya habían sido estudiados anteriormente. Después, fueron estudiadas en más profundidad en [Mazón] y [Klein]. Una caracterización (o definición equivalente) de las distancias convexas a través de sus “buenas propiedades” está contenida en el siguiente enunciado.

**Proposición 3.2.2** *Sea  $d_K$  una función de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0}$ . Entonces  $d_K$  es una distancia convexa si y solo si satisface las siguientes propiedades:*

- (i)  $d_K$  es continua.
- (ii)  $\forall P, Q \in \mathbb{R}^2, \quad d_K(P, Q) \geq 0, \quad d_K(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$
- (iii)  $\forall P, Q, R \in \mathbb{R}^2, \quad d_K(P, Q) + d_K(Q, R) \geq d_K(P, R).$
- (iv)  $\forall P, Q, R \in \mathbb{R}^2, \quad d_K(P, Q) = d_K(P + R, Q + R)$  ( $d_K$  es invariante por traslaciones).
- (v)  $\forall P, Q \in \mathbb{R}^2, \forall R \in [P, Q], \quad d_K(P, Q) = d_K(P, R) + d_K(R, Q)$  ( $d_K$  es aditiva en segmentos).

*Demostración:* A partir de la definición es claro que una distancia convexa cumple (i), (ii), (iv) y (v). Para la demostración de (iii), sea  $a = d_K(P, Q)$  y  $b = d_K(Q, R)$ . Por definición,  $Q \in P + aK$  y  $R \in Q + bK$ , de donde  $R \in P + aK + bK$ . Ahora bien, por ser  $K$  convexo se tiene  $aK + bK \subseteq (a + b)K$ , y de aquí  $R \in P + (a + b)K$ . Esto es equivalente a decir que  $d(P, R) \leq a + b$ , que es lo que se pretendía demostrar.

Supongamos, recíprocamente, que una cierta función  $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0}$  satisface (i), (ii), (iii), (iv) y (v). Vamos a demostrar que  $d$  coincide con la distancia convexa  $d_K$  asociada al convexo  $K = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(O, P) \leq 1\}$ , donde  $O$  es el origen de coordenadas.

- $K$  es cerrado: por continuidad de  $d$ .
- $K$  es convexo: por ser  $K$  cerrado, bastará demostrar que el punto medio de dos puntos de  $K$  está en  $K$ . Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos de  $K$ , es decir  $d(O, P) \leq 1$  y  $d(O, Q) \leq 1$ . Por la invariancia frente a traslaciones se tiene que  $d(P, P + Q) = d(O, Q) \leq 1$  y combinando ésto con la desigualdad triangular obtenemos  $d(O, P + Q) \leq 2$ . Por aditividad en segmentos,  $d(O, \frac{P+Q}{2}) \leq 1$ , es decir,  $\frac{P+Q}{2} \in K$ .
- $K$  es acotado: dado que  $K$  es convexo, si no fuera acotado necesariamente debería contener una semirrecta con origen en  $O$ . Ésto es imposible ya que, la aditividad en segmentos junto a la propiedad (2) hacen que en toda semirrecta con origen en  $O$  haya puntos  $P$  con  $d_K(O, P) \geq 1$ .

- El origen está en el interior de  $K$ : es claro que  $O \in K$ . Si  $O$  estuviera en la frontera de  $K$ , entonces (por ser  $K$  convexo) debería haber una semirrecta partiendo de  $O$  que corte a  $K$  sólo en  $O$ . Ésto es de nuevo imposible, también por la propiedad (2) y la aditividad en segmentos.
- $d$  coincide con la distancia convexa asociada al conjunto  $K$ : fácil de demostrar, usando aditividad en segmentos e invariancia por traslaciones.

Lo cual termina la demostración □

### 3.2.2 Distancias estrictamente convexas y/o suaves

Las buenas propiedades que hemos descrito para las funciones de distancia convexa no son suficientes para conseguir que los diagramas de Voronoi asociados a ellas tengan, a su vez, propiedades análogas a los diagramas de Voronoi Euclídeos. Consideremos por ejemplo la distancia  $L_\infty$  (cuya bola unidad es un cuadrado paralelo a los ejes coordenados) y como nube de puntos la formada por dos puntos  $P$  y  $Q$  en la misma horizontal. El diagrama de Voronoi (cuya definición formal aparece más adelante) coincide con el *bisector* de  $P$  y  $Q$ , y éste resulta tener interior no vacío. Por tanto, las regiones de Voronoi no cubren una parte densa del plano, sino que hay partes del plano que no están en la adherencia de ninguna región.

Ésto va contra el “espíritu” del diagrama de Voronoi de partir el plano en regiones de influencia. Por ésta razón normalmente exigiremos que nuestra distancia convexa sea, además, *estrictamente convexa*, *suave* o ambas cosas a la vez, de acuerdo con la definición que sigue. En cualquier caso, estas dos propiedades adicionales serán siempre señaladas explícitamente. Nótese que las distancias  $L_1$  y  $L_\infty$  no son estrictamente convexas ni suaves y que cualquier otra distancia  $L_p$ , con  $1 < p < \infty$  es ambas cosas.

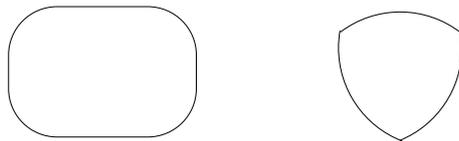


Figura 3.7: Circunferencias unidad no-estrictamente convexa y no-suave, respectivamente.

**Definición 3.2.3** Sea  $d_K$  una distancia convexa asociada a un cierto convexo  $K$ . Entonces, diremos que  $d_K$  es estrictamente convexa si puntos diferentes de la frontera del convexo  $K$  no admiten la misma recta soporte y que es suave si ningún punto de la frontera de  $K$  admite dos rectas soporte diferentes.

Las propiedades de las distancias estrictamente convexas que se citan a continuación (Proposición 3.2.4) aparecen demostradas en [Mazón] (cf. sus Teoremas 1.2.3.5 y 1.2.3.10). Sin embargo, no se demuestra allí la equivalencia entre dichas propiedades y el hecho de ser estrictamente convexa. Por otra parte, algunas de nuestras demostraciones son sensiblemente más cortas que las que allí aparecen, lo cual justifica su inclusión aquí. La equivalencia entre que la distancia sea suave y que toda terna de puntos no-alineados sea  $d_K$ -cocircular (nuestra Proposición 3.2.5) sí que aparece explícitamente mencionada (cf. la Observación 1.2.6.6 de [Mazón]).

**Proposición 3.2.4** Sea  $d_K$  una distancia convexa. Entonces son equivalentes:

- (i)  $d_K$  es estrictamente convexa.
- (ii) la  $d_K$ -circunferencia unidad no contiene tres puntos alineados.
- (iii) ninguna  $d_K$ -circunferencia contiene tres puntos alineados.
- (iv) dos  $d_K$ -circunferencias cualesquiera se cortan a lo más en dos puntos.
- (v) por tres puntos cualesquiera del plano pasa a lo más una sola  $d_K$ -circunferencia.
- (vi) en la desigualdad triangular de tres puntos no alineados nunca se da la igualdad.

*Demostración:* Las equivalencias (i)  $\Leftrightarrow$  (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) y (iv)  $\Leftrightarrow$  (v) son prácticamente inmediatas. Nos limitaremos, por tanto, a mostrar las equivalencias (iii)  $\Leftrightarrow$  (iv)  $\Leftrightarrow$  (vi). Mencionemos que (iii)  $\Leftrightarrow$  (iv) y (iii)  $\Leftrightarrow$  (vi) aparecen demostrados en [Mazón] (Teoremas 1.2.3.5 y 1.2.3.8), pero las demostraciones que aquí presentamos son originales y sensiblemente más sencillas.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) : Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos  $d_K$ -circunferencias que se cortan en tres puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$ . Puesto que todas las  $d_K$ -circunferencias se obtienen de la  $d_K$ -circunferencia unidad  $d_K$  por composición de traslaciones y homotecias, también  $C_2$  se obtiene de  $C_1$  por una composición de traslaciones y homotecias que, como es sabido, resulta ser equivalente a una única traslación u homotecia  $h$ . Sean  $P'$ ,  $Q'$  y  $R'$  las imágenes por  $h$  de los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$ , que están forzosamente en  $C_2$ . Se tiene entonces que los dos triángulos  $PQR$  y  $P'Q'R'$  tienen sus vértices en un cierto convexo (la  $d_K$ -bola cuya frontera es  $C_2$ ) que tiene a  $d_K$  por frontera. La única forma en que ésto puede suceder, teniendo en cuenta que  $P'Q'R'$  se ha obtenido por una traslación u homotecia de  $PQR$ , es que uno de los vértices (pongamos que es  $P$ ) coincida con su imagen  $P'$ . Ésto implicaría que los tres puntos  $P$ ,  $Q$  y  $Q'$  (así como los puntos  $P$ ,  $R$  y  $R'$ ) son tres puntos alineados en  $C_2$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (iii) : Si una  $d_K$ -circunferencia  $C_1$  contiene tres puntos alineados  $P$ ,  $Q$  y  $R$ , entonces ha de contener a todo el segmento  $[P, Q]$  (si no, la  $d_K$ -bola correspondiente no podría ser convexa). En estas condiciones es fácil construir otra  $d_K$ -circunferencia (por ejemplo, por una homotecia con centro en  $P$  y de razón mayor que 1) que también contenga a todo el segmento  $[P, Q]$ .

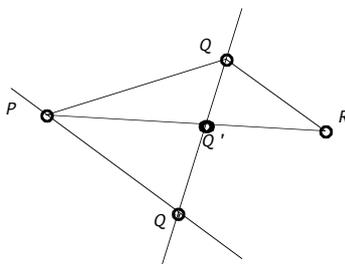


Figura 3.8: Desigualdad triangular estricta para distancias estrictamente convexas.

(iii)  $\Rightarrow$  (vi) : Supongamos que tres puntos no alineados  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son tales que  $d_K(P, Q) + d_K(Q, R) = d_K(P, R)$  y demostremos que hay una  $d_K$ -circunferencia

con tres puntos alineados. Llamemos  $a = d_K(P, Q)$  y  $b = d_K(Q, R)$ , de donde  $d_K(P, R) = a + b$ . Por aditividad en segmentos existe un punto  $Q'$  en el segmento  $[P, R]$  tal que  $d_K(P, Q') = a$  y  $d_K(Q', R) = b$ . Sea  $Q''$  el punto de intersección de la recta que pasa por  $Q$  y  $Q'$  con la paralela al segmento  $[Q, R]$  que pasa por  $P$  (véase la Figura 3.8). Aplicando reglas de proporcionalidad sencillas (a saber, la igualdad entre los cocientes de longitudes  $\frac{[P, Q']}{[Q', R]}$  y  $\frac{[P, Q'']}{[Q, R]}$ ) es fácil deducir que  $d_K(P, Q'')$  vale  $a$ , es decir, lo mismo que  $d_K(P, Q)$  y  $d_K(P, Q')$ . Por tanto, la  $d_K$ -circunferencia de radio  $a$  con centro en  $P$  contiene a los tres puntos  $Q, Q'$  y  $Q''$ , que están alineados.

(vi)  $\Rightarrow$  (iii) : Por una construcción inversa a la anterior. Sea  $C$  una  $d_K$ -circunferencia que contiene a tres puntos alineados  $Q, Q'$  y  $Q''$ . Sea  $P$  el centro de dicha  $d_K$ -circunferencia. Sea  $l$  la recta que pasa por  $Q, Q'$  y  $Q''$  y supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $Q, Q'$  y  $Q''$  aparecen en ese orden en la recta (ver de nuevo la Figura 3.8). Entonces, si llamamos  $R$  a la intersección de la paralela a  $[P, Q'']$  que pasa por  $Q$  con la prolongación de  $[P, Q']$ , tendremos tres puntos no alineados  $P, Q$  y  $R$  con  $d_K(P, R) = d_K(P, Q') + d_K(Q', R) = d_K(P, Q) + d_K(Q, R)$ , por las mismas reglas de proporcionalidad que en el caso anterior.  $\square$

**Proposición 3.2.5** *Sea  $d_K$  una distancia convexa. Entonces son equivalentes:*

- (i)  $d_K$  es suave.
- (ii) dados tres puntos no alineados  $P, Q$  y  $R$  existe una  $d_K$ -circunferencia que pasa por ellos.

*Demostración:* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Un enunciado equivalente de (ii) es que dado un cierto triángulo  $PQR$  no degenerado, siempre existe un triángulo  $P'Q'R'$  que se obtiene de él por traslación u homotecia y está inscrito en la circunferencia unidad  $\partial K$  de  $d_K$ . Para ver que ésto se cumple, consideremos todos los posibles segmentos paralelos a  $[P, Q]$  con sus dos extremos en  $\partial K$ . Sin pérdida de generalidad, para simplificar la exposición, supongamos que el segmento  $[P, Q]$  es horizontal y que  $R$  se encuentra por encima de él. Tomando un segmento  $[P_1, Q_1]$  paralelo a  $PQ$  con sus extremos en  $\partial K$  y suficientemente abajo, el tercer vértice del triángulo  $P_1Q_1R_1$  semejante a  $PQR$  estará dentro de  $\partial K$ . Del mismo modo, por ser  $\partial K$  suave, tomando un segmento  $[P_2, Q_2]$  paralelo a  $PQ$  con sus extremos en  $\partial K$  y suficientemente arriba, el tercer vértice del triángulo  $P_2Q_2R_2$  semejante a  $PQR$  estará fuera de  $\partial K$ . Como podemos mover el segmento  $[P_1, Q_1]$  de forma continua hasta convertirlo en  $[P_2, Q_2]$  y pasando siempre por segmentos paralelos a  $[P, Q]$  y con sus extremos en  $\partial K$ , habrá un cierto momento en el cual el tercer vértice del triángulo está exactamente en  $\partial K$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Sea  $P$  un punto de la  $d_K$ -circunferencia unidad  $\partial K$  con dos rectas soporte diferentes  $r$  y  $s$ . Sin pérdida de generalidad y para simplificar el lenguaje, supongamos que  $r$  tiene pendiente positiva,  $s$  tiene pendiente negativa y que  $K$  se encuentra a la derecha de ambas (como en la Figura 3.9). Sea  $t$  la vertical que pasa por  $P$  y sean  $Q$  y  $R$  dos puntos a la derecha de  $t$  pero a la izquierda de  $r$  y  $s$ , uno encima de ambas y el otro debajo (como muestra la Figura). Demostraremos que ninguna  $d_K$ -circunferencia que pasa por  $P$  y  $Q$  puede pasar por  $R$ .

En efecto, sea  $C$  una cierta  $d_K$ -circunferencia que pasa por  $P$  y por  $Q$ .  $C$  es, por definición, la imagen de  $\partial K$  por una cierta traslación u homotecia  $h$ . Sea  $P'$  la imagen del punto  $P$  en  $C$  y sean  $r'$  y  $s'$  las paralelas a  $r$  y  $s$  por  $P'$ . Como  $C$  ha de

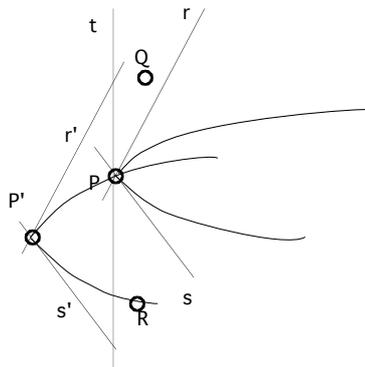


Figura 3.9: Ilustración de la Proposición 3.2.5.

estar a la derecha de  $r'$  y  $s'$ , tenemos que  $P$  está en el triángulo  $P'QR$  y, por tanto,  $R$  no puede estar en  $C$ .  $\square$

### 3.3 Diagramas de Voronoi y de Delaunay para distancias estrictamente convexas. Propiedades estructurales

#### 3.3.1 Diagramas de Voronoi

Sea  $d_K$  una distancia convexa y sea  $S$  un conjunto finito de  $\mathbb{R}^2$  al que llamaremos *nube de puntos*. El diagrama de Voronoi de  $S$  respecto a la distancia  $d_K$  se obtiene dividiendo el plano  $\mathbb{R}^2$  en regiones, llamadas *de Voronoi*, cada una de las cuales está asociada a uno de los puntos de la nube y formada por la porción del plano que es más próxima a dicho punto que a cualquiera de los demás. Formalmente:

**Definición 3.3.1** Para cada punto  $P \in S$  llamaremos *región de Voronoi de  $P$  respecto al conjunto  $S$  y la distancia convexa  $d_K$  al conjunto*

$$\text{Reg}_{d_K}(P; S) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \forall Q \in S \setminus \{P\} \quad d_K(P, x) < d_K(Q, x)\}.$$

Llamaremos *diagrama de Voronoi de  $S$  respecto a la distancia  $d_K$  al complementario de la unión de las regiones de Voronoi*.

Claramente, todos los puntos del diagrama de Voronoi son igualmente próximos a al menos dos puntos de la nube. Ésto significa que el diagrama de Voronoi está formado por trozos de los  $d_K$ -bisectores de puntos de  $S$ .

**Definición 3.3.2** Sea  $d_K$  una distancia convexa y sean  $P$  y  $Q$  dos puntos del plano. El bisector  $Bi_{d_K}(P, Q)$  de  $P$  y  $Q$  será el conjunto de puntos  $x$  del plano tal que  $d_K(x, P) = d_K(x, Q)$ . Dados tres puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$  diremos que los bisectores  $Bi_{d_K}(P, Q)$ ,  $Bi_{d_K}(P, R)$  y  $Bi_{d_K}(Q, R)$  son asociados.

Como ya hemos visto antes con la distancia  $L_\infty$ , los bisectores de una distancia convexa pueden tener interior no vacío. Ésto no ocurre para las distancias estrictamente convexas. El siguiente enunciado es un compendio de “buenas propiedades” de éstos bisectores, tomado de [Mazón] y [Corbalán-M-R].

**Lema 3.3.3** Sea  $d_K$  una distancia estrictamente convexa. Entonces:

- (i) el bisector  $Bi_{d_K}(P, Q)$  de dos puntos cualesquiera  $P$  y  $Q$  es topológicamente equivalente a una recta. Además, está contenido en una cierta “banda angular” (como la de la figura 3.10) que tiene a  $P$  y a  $Q$  en sus vértices.
- (ii) tres bisectores asociados  $Bi_{d_K}(P, Q)$ ,  $Bi_{d_K}(P, R)$  y  $Bi_{d_K}(Q, R)$  o no se cortan o se cortan dos a dos a lo más en un punto, que es el centro  $O$  de una  $d_K$ -circunferencia que pasa por ellos. En este caso, el punto  $O$  divide a cada uno de los tres bisectores, por ejemplo a  $Bi_{d_K}(P, Q)$  en una parte que es más cercana a  $P$  y  $Q$  que a  $R$  y otra que es más cercana a  $R$  que a  $P$  y  $Q$ . Por tanto, el diagrama de Voronoi de los tres puntos es como el de la figura 3.10.  $\square$

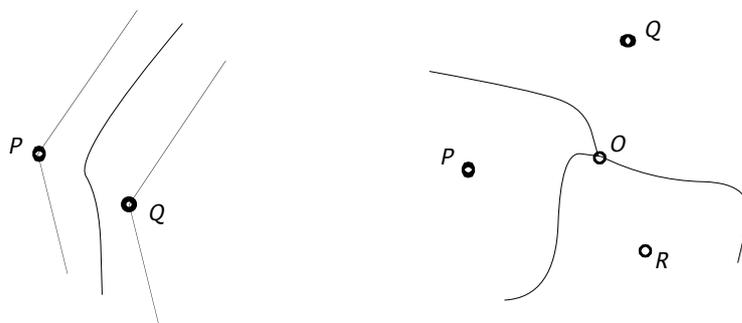


Figura 3.10: Bisector de dos puntos y diagrama de Voronoi de tres puntos.

Éste resultado conlleva a su vez una serie de propiedades para los diagramas de Voronoi, también tomados de [Mazón].

**Lema 3.3.4** Sea  $d_K$  una distancia estrictamente convexa en el plano y  $S$  una nube finita de puntos. Denotemos por  $R_{d_K, S}(P)$  la región de Voronoi de cada punto  $P$  de  $S$  por la distancia  $d_K$ . Entonces:

- (i)  $R_{d_K, S}(P)$  es un abierto no vacío de  $\mathbb{R}^2$  que coincide con  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_K(x, P) < d_K(x, Q) \forall Q \in S \setminus P\}$ .
- (ii) Si  $P$  y  $Q$  son puntos distintos de  $S$ , entonces  $R_{d_K, S}(P)$  y  $R_{d_K, S}(Q)$  son disjuntas.
- (iii)  $R_{d_K, S}(P)$  es estrellada respecto a  $P$ , esto es, si  $x \in R_{d_K, S}(P)$ , entonces todo el segmento de recta  $[P, x]$  está en  $R_{d_K, S}(P)$ .
- (iv) La clausura de  $R_{d_K, S}(P)$  coincide con  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_K(x, P) \leq d_K(x, Q) \forall Q \in S \setminus P\}$ .
- (v) La unión de las clausuras de todas las regiones de Voronoi cubre al plano.  $\square$

Como resultado de estos dos enunciados tenemos lo siguiente:

**Proposición 3.3.5** Sea  $d_K$  una distancia estrictamente convexa en el plano y  $S$  una nube finita de puntos. Entonces, el diagrama de Voronoi  $Vor_{d_K}(S)$  de  $S$  tiene estructura de diagrama plano en las siguientes condiciones:

- (i) Sus caras son las regiones de Voronoi, en correspondencia biunívoca, por tanto, con los puntos de  $S$ .
- (ii) Cada arista de  $Vor_{d_K}(S)$  es un trozo conexo del bisector  $Bi_{d_K}(P, Q)$  para un cierto par de puntos de  $S$ . Los pares de puntos  $(P, Q)$  que producen arista son aquéllos para los cuales existe una  $d_K$ -bola con  $P$  y  $Q$  en su frontera y los demás puntos de  $S$  en su exterior. Aún más, la arista es el lugar geométrico de los centros de tales  $d_K$ -bolas.
- (iii) Cada vértice de  $Vor_{d_K}(S)$  es el centro de una cierta  $d_K$ -bola con al menos tres puntos de  $S$  en su frontera y sin puntos de  $S$  en su interior estricto.
- (iv) Un subconjunto de  $S$  de al menos tres puntos produce un vértice de  $Vor_{d_K}(S)$  si y solo si está en las condiciones de (iii). Un par de puntos de  $S$  produce una (y solo una) arista de  $Vor_{d_K}(S)$  si y solo si está en las condiciones de (ii).

*Demostración:* El diagrama de Voronoi está claramente contenido en la unión de todos los bisectores de pares de puntos de  $S$ . Además es cerrado, por estar definido por condiciones cerradas sobre la distancia convexa  $d_K$ , que es una función continua. Ésto implica que el diagrama es, de hecho, un diagrama en el sentido de nuestra definición del Capítulo primero. Sus vértices serán los puntos comunes de la adherencia de tres caras y sus aristas las componentes conexas de lo que queda al eliminar los vértices en el diagrama. En particular, las aristas son partes conexas de la adherencia común de dos caras, que están contenidas, por definición, en el bisector de los dos puntos correspondientes.

Ésto termina la demostración de (i) y (ii), salvo por el hecho de que un punto  $x$  de una arista entre las dos caras de  $P$  y  $Q$  tiene menor distancia a  $P$  y a  $Q$  que a cualquier otro punto de  $S$  (que es otra forma de expresar la condición sobre la  $d_K$ -bola con centro en  $x$ ). Si no fuera así, es decir, si existiera un tercer punto  $R$  a la misma distancia de  $x$  que  $P$  y  $Q$ , pero sin que  $x$  estuviera en la adherencia de su región de Voronoi, entonces la condición (ii) del Lema 3.3.3 se violaría.

(iii) Es trivial, de nuevo por continuidad de la distancia convexa.

(iv) Debemos probar dos cosas. Que todo centro de una  $d_K$ -circunferencia que pasa por al menos tres puntos de  $S$  y no tiene puntos en el interior es adherente a al menos tres regiones de Voronoi y que dos caras adyacentes comparten una sólo arista. Lo primero es consecuencia de (ii) puesto que todo punto del diagrama es adherente a al menos dos caras y en (ii) vimos que un punto de la adherencia común de dos caras que sea centro de una  $d_K$ -circunferencia por tres puntos es, de hecho, adherente a tres caras.

Lo segundo se deduce de nuevo de la condición (ii) del Lema 3.3.3. Efectivamente, si  $x_1$  y  $x_2$  son dos puntos del bisector de  $P$  y  $Q$  cuya distancia a  $P$  y a  $Q$  es menor que la distancia a cualquier otro, no puede haber un punto  $x_0$  entre ellos cuya distancia a un cierto punto  $R$  de  $S$  sea mayor o igual que su distancia a  $P$  sin que se viole dicha condición.  $\square$

**Corolario 3.3.6** *Sea  $d_K$  una distancia estrictamente convexa en el plano y  $S$  una nube finita de puntos. Entonces, las caras, aristas y vértices del diagrama de Voronoi  $Vor_{d_K}(S)$  de  $S$  forman una descomposición celular del plano. Hay una*

correspondencia biyectiva entre las celdas (caras, aristas y vértices) de la descomposición y los subconjuntos  $T$  de  $S$  tales que existe una  $d_K$ -bola con  $T$  contenido en su frontera y  $S \setminus T$  en su exterior. Además, la celda correspondiente a un cierto  $T$  es una región de Voronoi si  $T$  consta de un sólo punto, es una arista del diagrama si  $T$  consta de dos puntos y es un vértice si  $T$  consta de al menos tres puntos.

*Demostración:* Inmediata, a la luz de la Proposición anterior y del hecho de que una parte conexas de un bisector es una celda 1-dimensional y que las regiones de Voronoi, por ser abiertas y estrelladas, son celdas 2-dimensionales.  $\square$

### 3.3.2 Diagramas de Delaunay

Del Corolario 3.3.6 se desprende el hecho de que, si sólo nos interesa la estructura combinatoria del diagrama de Voronoi, podemos olvidarnos de la función  $d_K$  como función distancia y tener en cuenta sólo sus  $d_K$ -bolas. Dicho de otra manera, a efectos de la estructura del diagrama de Voronoi no tiene importancia donde esté colocado el origen de coordenadas como centro de la bola unidad, sino tan sólo la bola en sí. Por esta razón, entre otras, es por lo que nosotros trabajaremos a partir de ahora con los diagramas de Delaunay en vez de los de Voronoi. El diagrama de Delaunay es geoméricamente más sencillo, puesto que sus aristas son segmentos de recta que conectan puntos de la nube de puntos, y sin embargo contiene toda la estructura topológico/combinatoria del diagrama de Voronoi, que es su dual (cf. 3.3.11).

**Definición 3.3.7** Sea  $d_K$  una distancia estrictamente convexa y sea  $S$  una nube finita de puntos. Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos de  $S$ . Diremos que el segmento  $[P, Q]$  es una arista de Delaunay de  $S$  para la distancia  $d_K$  si existe una  $d_K$ -bola que tiene a  $P$  y a  $Q$  en su frontera y al resto de  $S$  en su exterior. Llamaremos diagrama de Delaunay de  $S$  a la unión de todas las aristas de Delaunay.

**Lema 3.3.8** Sea  $d_K$  una distancia estrictamente convexa y sea  $S$  una nube finita de puntos. Entonces, dos aristas de Delaunay no se cortan, salvo eventualmente en un extremo común. Por tanto, el diagrama de Delaunay tiene estructura de grafo inmerso en el plano, siendo sus vértices los puntos de  $S$  y sus aristas las aristas de Delaunay que acabamos de definir.

*Demostración:* Sean  $P_1, P_2, Q_1$  y  $Q_2$  cuatro puntos distintos de  $S$  y supongamos, para llegar a un absurdo, que  $[P_1, P_2]$  y  $[Q_1, Q_2]$  son aristas de Delaunay y se cortan en un punto  $O$ . En primer lugar,  $O$  no puede coincidir con ninguno de  $P_1, P_2, Q_1$  ni  $Q_2$ . Si, por ejemplo,  $O = P_1$  entonces cualquier  $d_K$ -bola que contenga a  $Q_1$  y  $Q_2$  en su frontera contiene también a  $P_1$ .

En estas condiciones, las dos aristas de Delaunay dividen al plano en cuatro cuadrantes, no necesariamente ortogonales, con vértice común en  $O$ . Sea  $C$  una  $d_K$ -bola (por tanto, estrictamente convexa) que pase por  $P_1$  y  $P_2$  y tenga a  $Q_1$  y  $Q_2$  en el exterior y  $D$  una  $d_K$ -bola que pase por  $Q_1$  y  $Q_2$  y tenga a  $P_1$  y  $P_2$  en el exterior. Es fácil probar que las fronteras de  $C$  y  $D$  deben cortarse al menos una vez en cada cuadrante, lo cual contradice la Proposición 3.2.4.  $\square$

**Lema 3.3.9** Sea  $d_K$  una distancia estrictamente convexa en el plano. Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos del plano y sean  $C$  y  $D$  dos  $d_K$ -bolas que tienen a  $P$  y  $Q$  en su frontera. Entonces, se tiene que una de las dos componentes conexas de  $C \setminus [P, Q]$  está contenida en una de las componentes conexas de  $D \setminus [P, Q]$  y la otra componente conexas de  $C \setminus [P, Q]$  contiene a la otra componente conexas de  $D \setminus [P, Q]$ .

*Demostración:* Sea  $h$  la traslación u homotecia que transforma  $C$  en  $D$ . Sean  $P'$  y  $Q'$  las imágenes de  $P$  y  $Q$ . El segmento  $[P', Q']$  es paralelo a  $[P, Q]$  y no está sobre la misma recta que él, puesto que  $P, Q, P'$  y  $Q'$  son puntos de la frontera de  $D$ . Sea  $C_1$  (resp.  $D_1$ ) la componente conexas de  $C \setminus [P, Q]$  (resp. de  $D \setminus [P, Q]$ ) del lado de  $[P, Q]$  en el que está  $[P', Q']$ . Sea  $C'_1$  la imagen de  $C_1$  por  $h$ . Entonces, es claro (ver Figura 3.11) que el cuadrilátero  $B$  con vértices  $P, Q, P'$  y  $Q'$  está contenido en  $D_1$  y que  $C_1$  está contenido en  $B \cup C'_1$ . Por tanto,  $C_1$  está contenido en  $D_1$ . Aplicando los mismos argumentos a la traslación u homotecia inversa de  $h$ , que lleva  $C$  sobre  $D$ , concluiremos que la otra componente conexas de  $D \setminus [P, Q]$  está contenida en la otra componente conexas de  $C \setminus [P, Q]$ .  $\square$

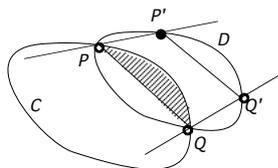


Figura 3.11: Ilustración del Lema 3.3.9.

La siguiente Proposición es el equivalente a la Proposición 3.3.5 en el lenguaje de Delaunay y tiene como consecuencia la dualidad entre el diagrama de Voronoi y el diagrama de Delaunay.

**Proposición 3.3.10** Sea  $d_K$  una distancia estrictamente convexa en el plano y  $S$  una nube finita de puntos. Entonces, el diagrama de Delaunay  $Del_{d_K}(S)$  de  $S$  tiene estructura de diagrama plano en las siguientes condiciones:

- (i) Sus vértices son los puntos de  $S$ .
- (ii) Cada arista de  $Del_{d_K}(S)$  es un segmento  $[P, Q]$  para un cierto par de puntos  $P$  y  $Q$  de  $S$ . Tales  $P$  y  $Q$  tienen la propiedad de que existe una  $d_K$ -bola con  $P$  y  $Q$  en su frontera y los demás puntos de  $S$  en su exterior.
- (iii) Cada cara (excepto la no acotada) de  $Del_{d_K}(S)$  es un polígono convexo cuyos vértices son un subconjunto  $T$  de  $S$  con la propiedad de que existe una cierta  $d_K$ -bola con  $T$  en su frontera y  $S \setminus T$  en su exterior estricto.
- (iv) Todo subconjunto de  $S$  de al menos tres puntos en las condiciones de (iii) produce una cara de  $Del_{d_K}(S)$ . Un par de puntos de  $S$  produce una arista de  $Del_{d_K}(S)$  si y solo si está en las condiciones de (ii).

*Demostración:* Que el diagrama de Delaunay es, efectivamente, un diagrama con las condiciones (i) y (ii) proviene directamente de la definición y del Lema 3.3.8. Para el resto, demostraremos primero (iv) y luego (iii).

(iv) Sea  $T$  un subconjunto de  $S$  en las condiciones de (iii), es decir, los vértices de un polígono convexo inscrito en una cierta  $d_K$ -bola  $C_T$  que tiene a  $S \setminus T$  en su exterior. Veamos que dicho polígono es una cara del diagrama de Delaunay. Lo que debemos mostrar es que para cada par de vértices  $P$  y  $Q$  consecutivos del polígono, existe una cierta  $d_K$ -bola con  $P$  y  $Q$  en su frontera y el resto de los puntos de  $S$  en su exterior. Para ello, consideremos un segmento  $[P', Q']$  paralelo a  $[P, Q]$ , con  $P'$  y  $Q'$  también en la frontera de  $C_K$  y en la dirección del resto de los vértices del polígono. Además, supongamos que  $[P', Q']$  es muy cercano a  $[P, Q]$ .

Sea  $h$  la traslación u homotecia que lleva  $P'$  sobre  $P$  y  $Q'$  sobre  $Q$  y sea  $C'_T$  la imagen de  $C_T$  por  $h$ .  $C'_T$  es también una  $d_K$ -bola que tiene a  $P$  y a  $Q$  en su frontera. Además, la parte de  $C'_T$  que queda en la dirección del resto de los vértices del polígono está contenida en la correspondiente parte de  $C_T$ , como en el Lema 3.3.9. Además, ninguno de los demás vértices del polígono está en la frontera de  $C'_T$  porque entonces las fronteras de  $C_T$  y  $C'_T$  se cortarían en tres puntos. En consecuencia, todos los puntos de  $T \setminus \{P, Q\}$  son exteriores a  $C'_T$ . Si la modificación de  $C_T$  es suficientemente pequeña (esto es, si  $P'$  y  $Q'$  se toman suficientemente cerca de  $P$  y  $Q$ ), entonces los puntos de  $S \setminus T$  seguirán siendo exteriores a  $C'_T$ , como lo eran a  $C_T$ .

El resto de (iv) (lo que se refiera a las aristas) se deduce fácilmente de la definición de diagrama de Delaunay.

(iii) Sea  $f$  una cierta cara del diagrama de Delaunay. Demostremos, en primer lugar, que sus vértices son  $d_K$ -cocirculares. Comencemos con una cierta  $d_K$ -bola suficientemente grande para contener a toda la cara  $f$  en su interior. Disminuyámosla de forma continua hasta que el primero de los vértices de la cara  $f$  esté en la frontera de  $d_K$ . Llamemos  $P$  a un tal vértice y sean  $Q$  y  $R$  los vértices de  $f$  anterior y posterior a  $P$  en la cara  $f$ . Continuemos decreciendo la  $d_K$ -bola, ahora manteniendo siempre  $P$  en su frontera, hasta que uno de los dos vértices  $Q$  ó  $R$  esté también en la frontera. Supongamos que se trata de  $Q$ .

Entonces, puesto que existe una  $d_K$ -bola que tiene a  $P$  y  $Q$  en su frontera y a  $R$  en su interior y también existe una  $d_K$ -bola que tiene a  $P$  y  $Q$  en su frontera y a  $R$  en su exterior (recordemos que  $[P, Q]$  es una de las aristas del diagrama) ha de existir también una  $d_K$ -bola que tiene a  $P$ ,  $Q$  y  $R$  en su frontera. Sea  $C$  dicha  $d_K$ -bola. Afirmamos que  $C$  tiene también en su frontera a todos los demás vértices de la cara, si es que los hay. Ésto es así porque, gracias a (iv), todos los puntos de  $S$  que estén en la frontera de  $C$  serán los vértices de una cierta cara del diagrama. Como dos caras del diagrama no pueden tener tres vértices en común, dicha cara es precisamente  $f$ .  $\square$

**Corolario 3.3.11** *Sea  $d_K$  una distancia estrictamente convexa y sea  $S$  una nube finita de puntos. Entonces, los diagramas de Voronoi  $Vor_K(S)$  y de Delaunay  $Del_K(S)$  de  $S$  respecto a la distancia  $d_K$  son duales el uno del otro.*

*Demostración:* No hay más que comparar los enunciados de la Proposición 3.3.10 y 3.3.5.  $\square$

De nuevo, estas buenas propiedades no son ciertas sin la condición de convexidad estricta. En el diagrama de Delaunay de tres puntos para la distancia  $L_\infty$  puede ocurrir (como en la Figura 3.12) que la arista  $[P, Q]$  no aparezca en el diagrama, pero el triángulo  $PQR$  esté en las condiciones de la Proposición 3.3.10. En este

sentido podemos decir que para distancias no-estrictamente convexas el diagrama de Delaunay no está bien definido, puesto que una definición basada en aristas (como nuestra Definición 3.3.7) no es congruente con una posible definición basada en caras. Por este motivo, a partir de este momento sólo consideraremos distancias estrictamente convexas.

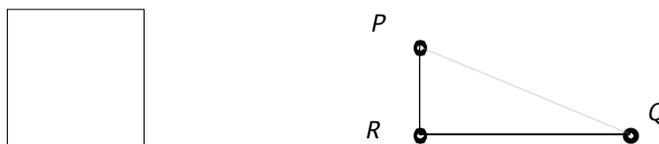


Figura 3.12: Bola unidad  $L_\infty$  y diagrama de Delaunay “atípico”.

### 3.4 Tipos topológicos de diagramas de Delaunay con distancias convexas

Vamos a estudiar en esta sección los tipos topológicos de diagramas de Delaunay producidos por distancias convexas. Más concretamente estaremos interesados en saber si son los mismos que se pueden producir con la distancia Euclídea. Para distancias no estrictamente convexas ya hemos visto que es posible producir diagramas de Delaunay “atípicos”, en el sentido de que sus caras no se corresponden con polígonos con un número maximal de vértices  $d_K$ -cocirculares. Supondremos ahora que la distancia  $d_K$  es estrictamente convexa. Nuestro resultado más importante será que cualquier distancia convexa  $d_K$  cuyas  $K$ -circunferencias no sean elipses puede producir diagramas de Delaunay (y, por tanto, diagramas de Voronoi) que no son topológicamente equivalentes a ningún diagrama de Delaunay Euclídeo.

En primer lugar veamos las consecuencias que en el diagrama de Delaunay tiene el hecho de que la distancia sea o no sea suave, además de estrictamente convexa. Nuestro primer Lema nos dice que cualquier distancia no suave produce diagramas de Delaunay que no son topológicamente equivalentes a ningún diagrama de Delaunay Euclídeo, porque no puede ser realizado con contorno convexo. La construcción que aparece en su demostración proviene de [Mazón, Proposición 1.2.6.7]. El segundo Lema nos dice que para las distancias estrictamente convexas y suaves este tipo topológico concreto está prohibido, así como todos los que obliguen al diagrama de Delaunay a tener contorno no convexo.

**Lema 3.4.1** *Sea  $d_K$  una distancia estrictamente convexa y no-suave. Entonces existen cuatro puntos cuyo diagrama de Delaunay tiene el tipo topológico de la Figura 3.13.*

*Demostración:* Como  $d_K$  es no suave, sabemos que existen tres puntos  $P$ ,  $Q$  y  $O$  que no son ni  $d_K$ -cocirculares ni alineados. Lo que sí podemos conseguir es una  $d_K$ -bola que tenga a dos de ellos en su frontera y al tercero en su interior, por un procedimiento parecido al de la demostración de la Proposición 3.3.10: Comencemos con una  $d_K$ -bola suficientemente grande que contenga a  $P$ ,  $Q$  y  $O$  en su interior, y hagámosla decrecer hasta que uno de los puntos esté en su frontera (digamos  $P$ ) y luego, por una homotecia continua con centro en  $P$  hasta que otro de ellos esté

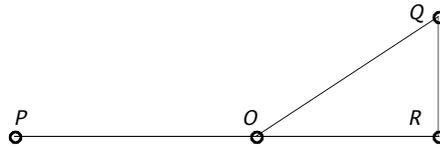


Figura 3.13: Diagrama de Delaunay con contorno no convexo.

también en su frontera (digamos  $Q$ ). En estas condiciones, escojamos otro punto  $R$  en la frontera de esta  $d_K$ -bola y en la prolongación de  $[P, O]$ . El diagrama de Delaunay de estos cuatro puntos es como el de la Figura 3.13, porque los puntos  $O, Q$  y  $R$  son  $d_K$ -cocirculares, pero  $P, Q$  y  $O$  no lo son.  $\square$

**Lema 3.4.2** Sea  $d_K$  una distancia estrictamente convexa.

- (i) Si  $d_K$  es suave, entonces todos los diagramas de Delaunay producidos por  $d_K$  tienen contorno convexo.
- (ii) Si  $d_K$  no es suave, entonces existen nubes de puntos cuyos diagramas de Delaunay respecto a la distancia  $d_K$  no tienen contorno convexo. Además, tres puntos son suficientes para encontrar contraejemplos.

*Demostración:* Para la demostración de (i), consideremos dos puntos consecutivos  $P$  y  $Q$  en la envolvente convexa de  $S$ . Todo lo que necesitamos probar es que  $[P, Q]$  es una arista de Delaunay, es decir, que existe una  $d_K$ -bola con  $P$  y  $Q$  en su frontera y con cualquier otro punto de  $S$  en su exterior. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que la recta que pasa por  $P$  y  $Q$  es horizontal y no tiene ningún punto de  $S$  encima (como en la Figura 3.14). Por ser  $d_K$  suave, para cada recta  $l$  que pase por  $P$  y tenga a  $Q$  encima existe una  $d_K$ -bola  $C_l$  que tiene a  $l$  como su única recta soporte en  $P$  y que tiene a  $P$  y  $Q$  en su frontera. Además, si hacemos tender la recta  $l$  a una horizontal, la recta soporte a  $C_l$  en  $Q$  tiende también a una horizontal. En estas condiciones, tomando  $l$  suficientemente cercana a la horizontal,  $C_l$  deja en su exterior a cualquier punto de  $S \setminus \{P, Q\}$ .

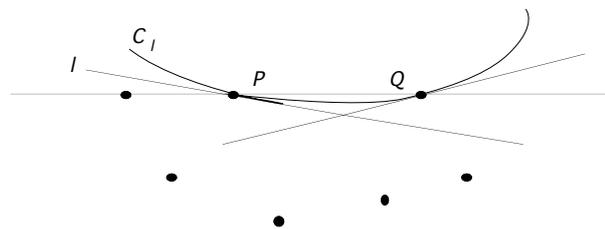


Figura 3.14: Convexidad del diagrama de Delaunay para distancias suaves.

La demostración de (ii) es consecuencia inmediata del Lema 3.4.2.  $\square$

Aún para distancias no suaves, hay ciertas restricciones a la no-convexidad del diagrama de Delaunay. Por ejemplo, de los dos diagramas mostrados en la figura 3.15 el de la izquierda no puede ser producido por ninguna distancia estrictamente convexa y el de la derecha sólo puede ser producido por distancias no suaves y no-simétricas. Ambos hechos se desprenden del siguiente Lema.

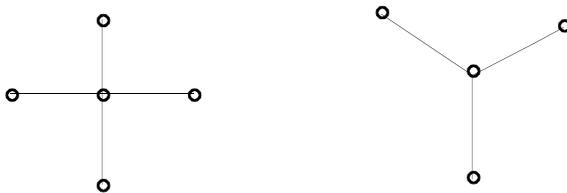


Figura 3.15: Más diagramas de Delaunay con contorno no convexo.

**Lema 3.4.3** *Sea  $d_K$ -una distancia estrictamente convexa, no suave, con bola unidad  $K$ . Sea  $S$  una cierta nube de puntos cuyo  $d_K$ -diagrama de Delaunay no tiene contorno convexo. Sean  $P$ ,  $Q$  y  $R$  tres puntos consecutivos del contorno del diagrama de Delaunay, en ese orden y siendo  $Q$  un vértice no convexo del mismo. Entonces, existe una  $d_K$ -bola que tiene a  $Q$  en su frontera y contenida en la región angular definida por  $PQR$ , como en la Figura 3.16.*

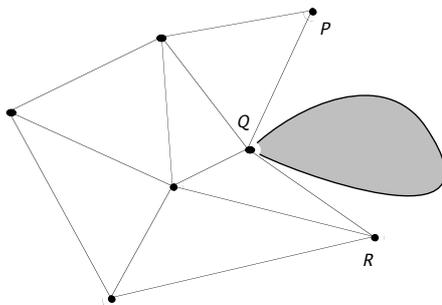


Figura 3.16: Una  $d_K$ -bola en un vértice no convexo.

*Demostración:* En primer lugar, observemos que cualquier  $d_K$ -bola que tenga a  $P$  y a  $R$  en su frontera debe tener a  $Q$  en su interior. Si no fuera así, sea  $C$  una  $d_K$ -bola que tiene a  $P$  y  $R$  en su frontera y a  $Q$  en su frontera o en su exterior, y busquemos una contradicción. Los segmentos  $[P, Q]$  y  $[Q, R]$  cortan cada uno a  $\partial C$  en dos puntos, es decir,  $[P, Q]$  separa a  $R$  de una cierta región de  $C$  a la que llamaremos  $C_P$  y  $[Q, R]$  separa a  $P$  de una cierta región de  $C$  a la que llamaremos  $C_R$ . Sean  $S_P$  y  $S_R$  los conjuntos de puntos de  $S$  contenidos en  $C_P$  y  $C_R$  respectivamente, sin contar a  $Q$ .  $S_P$  y  $S_R$  son no vacíos, porque  $P \in S_P$  y  $R \in S_R$ .

En estas condiciones, podemos encontrar una  $d_K$ -bola  $C'$  contenida en  $C$  que no tenga puntos de  $S$  en su interior y que tenga en su frontera a al menos un punto  $P'$  de  $S_P$  y un punto  $R'$  de  $S_R$  (puede ocurrir que  $R = R'$  o  $P = P'$ ). Ésto puede hacerse, por ejemplo, reduciendo  $C$  en una primera etapa por una homotecia con centro en  $P$  hasta que no haya ningún punto de  $S_R$  en su interior pero quede algún punto  $R'$  de  $S_R$  en su frontera, y después reduciendo de nuevo la  $d_K$ -bola así obtenida, ésta vez por una homotecia con centro en  $R'$ . Por no contener puntos de  $S$  en su interior, la  $d_K$ -bola  $C'$  define un polígono en el diagrama de Delaunay, formado por los puntos en su frontera (por la Proposición 3.3.10). En particular, hay una arista de Delaunay que conecta a un punto de  $S_P$  con un punto de  $S_R$ . Ahora bien, todo segmento que conecta un punto de  $S_P$  con uno de  $S_R$ , ninguno de los cuales es  $Q$ , necesariamente corta a los dos segmentos  $[P, Q]$  y  $[Q, R]$ , que son aristas de Delaunay. Por el Lema 3.3.8, la única posibilidad es que dicha arista de

Delaunay sea precisamente  $[P, R]$ . Ésto no puede ocurrir porque  $[P, R]$  no es una arista del diagrama, lo cual da la contradicción buscada.

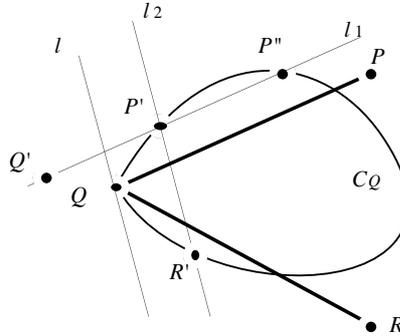


Figura 3.17: Ilustración de la demostración de 3.4.3.

La construcción que terminará la demostración está ilustrada en la Figura 3.17. Consideremos la recta  $l$  paralela al segmento  $[P, R]$  y que pasa por  $Q$ . Es claro que existe una  $d_K$ -bola  $C_Q$  que tiene a  $Q$  en su frontera, que tiene a  $l$  como recta soporte y que está del lado de  $l$  en el que están  $P$  y  $R$ . De hecho,  $C_Q$  se puede conseguir por traslaciones de la  $d_K$ -bola unidad, sin necesidad de homotecias. Demostraremos que las rectas que contienen a los segmentos  $[P, Q]$  y  $[R, Q]$  no cortan a  $C_Q$  más que en el punto  $Q$ , lo cual implica, por convexidad, que  $C_Q$  está contenida en la región angular del enunciado.

Supongamos, por reducción al absurdo, que la recta que contiene a  $[P, Q]$  corta a  $C_Q$  en más puntos aparte del propio  $Q$ , es decir, que la corta en un cierto segmento. Si ésto sucede, seguirá sucediendo para una ligera traslación de dicha recta hacia el lado en el que no se encuentra  $R$ , como ocurre con la recta  $l_1$  de la Figura 3.17. Sean  $P'$  y  $P''$  los dos puntos en los que  $l_1$  corta a la frontera de  $C_Q$ . Supondremos que  $P'$  es el más cercano a la recta  $l$  y  $P''$  el más lejano, es decir, que la semirrecta de  $l_1$  que parte de  $P'$  en sentido opuesto a  $P''$  corta a  $l$ . Es claro que dicha semirrecta no vuelve a cortar a  $C_Q$ . Sea  $l_2$  la recta paralela a  $[P, R]$  (y a  $l$ ) que pasa por  $P'$ .  $l_2$  separa a  $Q$  de  $P''$ , así que contiene otro punto de la frontera de  $C_Q$ , al que llamaremos  $R'$ . Como  $[P, R]$  es paralelo a  $[P', R']$ , existe una traslación u homotecia  $h$  que envía el uno sobre el otro. Sea  $Q'$  la imagen de  $Q$  por  $h$ . Por construcción y por convexidad estricta de  $C_Q$ ,  $Q'$  es exterior a  $C_Q$  ( $Q'$  está en la semirrecta de  $l_1$  antes mencionada, que no corta a  $C_Q$ ). Por tanto,  $Q$  es exterior a la imagen inversa de  $C_Q$  por la traslación u homotecia  $h$ , la cual es una  $d_K$ -bola que tiene a  $P$  y  $R$  en su frontera. Ésto contradice la afirmación del comienzo de la demostración.  $\square$

Veamos las implicaciones de este Lema para con los diagramas de la Figura 3.15. En el de la izquierda, el Lema implica que podemos encontrar una  $d_K$ -bola con un vértice en el punto central y situada enteramente en cada uno de los cuadrantes. Trasladando las configuraciones a una misma  $d_K$ -bola (por ejemplo, la  $d_K$ -bola unidad) ésto implicaría que existe un cierto rectángulo que contiene a la  $d_K$ -bola y con sus cuatro vértices en la frontera de ésta, lo cual es imposible pues la  $d_K$ -bola es estrictamente convexa. Por lo tanto, tal diagrama es imposible de producir con una distancia estrictamente convexa. En el segundo, supongamos que además la  $d_K$ -bola unidad es simétrica. Entonces, podemos aplicar el mismo tipo de argumentos al

diagrama y a su “opuesto” (girado  $180^\circ$ ) y obtener un hexágono que contiene a una  $d_K$ -bola y con sus seis vértices en la frontera de ésta. Sin embargo, el diagrama de la derecha sí es realizable por una  $d_K$ -distancia estrictamente convexa y no simétrica, como la de la derecha de la Figura 3.7 (página 135).

Si consideramos sólo diagramas con contorno convexo, en el apartado 3.1.2 ya dijimos que todos los diagramas con contorno convexo de hasta seis puntos son realizables con la distancia Euclídea. Es más, el mismo tipo de exploración exhaustiva nos dice que dichos diagramas son realizables de hecho por cualquier distancia estrictamente convexa. Para siete puntos la cosa cambiaba: existen diagramas convexos de siete puntos no realizables por la distancia Euclídea (veáse la Figura 3.3 en la página 125 y la Proposición 3.1.4 que la acompaña).

El resto de esta sección está dedicada a mostrar que la distancia Euclídea y aquéllas distancias convexas que tienen por bola unidad una elipse son muy especiales en cuanto a los diagramas de Delaunay que son capaces de producir, en el conjunto total de las distancias convexas. Aunque el resultado en sí no difiere del caso simétrico al no simétrico la demostración es relativamente diferente, por lo cual hemos separado el enunciado en dos partes (Teoremas 3.4.6 y 3.4.10). La Proposición 3.4.4 y su Corolario 3.4.5 (que aparecen en [C-M-R-Santos]) nos dicen por qué las distancias con bola unidad elíptica son excepciones a estos Teoremas. Ambos son de fácil demostración, que omitimos.

**Proposición 3.4.4** *Sean  $d_K$  y  $d_{K'}$  dos distancias convexas definidas por sendos convexos  $K$  y  $K'$ . Supongamos que  $K'$  es la imagen de  $K$  por una cierta aplicación afín  $f$ . Entonces, la imagen por  $f$  del diagrama de Delaunay de cualquier nube de puntos  $S$  para la distancia  $d_K$  coincide con el diagrama de Delaunay para la distancia  $d_{K'}$  de la nube de puntos  $S' = f(S)$ .  $\square$*

**Corolario 3.4.5** *(i) Dos distancias estrictamente convexas  $d_K$  y  $d_{K'}$  cuyas bolas unidad  $K$  y  $K'$  son imagen afín la una de la otra producen exactamente los mismos tipos topológicos de diagramas de Delaunay.*

*(ii) Una distancia convexa  $d_K$  cuya bola unidad sea una elipse produce exactamente los mismos tipos topológicos de diagramas de Delaunay que la distancia Euclídea.  $\square$*

**Teorema 3.4.6** *Sea  $d_K$  una distancia estrictamente convexa y suave, y supongamos que su bola unidad  $K$  no es simétrica. Entonces, existe una nube  $S$  de siete puntos tales que el diagrama de Delaunay  $Del_K(S)$  tiene el tipo topológico del primero mostrado en la Figura 3.3 (pág. 125).*

*Demostración:* Todos los pasos de la demostración serán ilustrados en la Figura 3.18.

Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos de la  $d_K$ -circunferencia unidad  $\partial K$ , “opuestos” en el sentido de que hay rectas soporte  $l_P$  y  $l_Q$  de  $\partial K$  en  $P$  y  $Q$  paralelas. Llamemos  $O$  al punto medio del segmento  $[P, Q]$ . No es difícil probar, gracias a la convexidad estricta de  $K$  que  $\partial K$  es la única  $d_K$ -circunferencia de radio 1 que pasa por  $P$  y  $Q$ . Entonces, existe un cierto punto  $R$  en  $\partial K$  tal que su simétrico  $R'$  respecto al punto  $O$  es exterior a  $\partial K$ . (Si no fuera así, tampoco existiría ningún punto  $R$  cuyo simétrico respecto a  $O$  fuera interior a  $\partial K$ ).

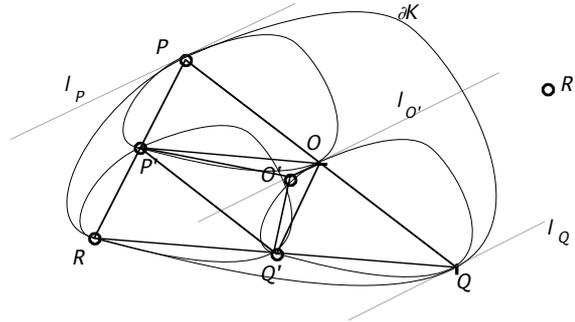


Figura 3.18: Ilustración del Teorema 3.4.6.

Llamemos  $P'$  al punto medio del segmento  $[R, P]$  y  $Q'$  al punto medio del segmento  $[R, Q]$ . Entonces, existen sendas (y únicas)  $d_K$ -circunferencias pasando por los vértices de los triángulos  $P'Q'R$ ,  $PP'O$  y  $QQ'O$ , que son trasladadas de  $\partial K$  a escala  $1/2$ .

Consideremos un cierto punto  $O'$  en la paralela  $l_O$  a  $l_P$  y  $l_Q$  a través de  $O$  que esté suficientemente cerca de  $O$  y en el interior del triángulo  $P'Q'O$ . En estas condiciones, el punto  $O'$  es exterior a la  $d_K$ -circunferencia que pasa por  $P'Q'R$ , puesto que también lo es  $O$ , y es exterior a las  $d_K$ -circunferencias que pasan por  $PP'O$  y  $QQ'O$  porque  $l_O$  es recta soporte de las mismas. Por tanto, el  $d_K$ -diagrama de Delaunay de los siete puntos  $P, Q, R, O, P', Q'$ , y  $O'$  es como se muestra en la Figura, esto es, del tipo topológico que buscábamos.  $\square$

Para la demostración de la versión simétrica de este Teorema (i.e., el Teorema 3.4.10) usaremos la Proposición 3.4.9 (tomada de [Santos5]). La Figura 3.19 ilustra el enunciado de la Proposición. La Proposición es, en realidad, más fuerte de lo que aquí nos hace falta pero merece la pena que la demostremos porque va a ser usada de nuevo en la sección 3.5.3 para demostrar el Teorema 3.5.9. La demostración de la Proposición 3.4.9 es un tanto técnica y se basa en los Lemas 3.4.7 y 3.4.8. El lector no interesado puede simplemente “creerse” el enunciado (que es, en cierto modo, bastante intuitivo a pesar de lo complicado de su demostración) y pasar directamente al Teorema 3.4.10 en una primera lectura.

**Lema 3.4.7** *Sea  $K$  un subconjunto compacto y convexo del plano  $\mathbb{R}^2$ , centralmente simétrico y no contenido en ninguna recta. Entonces, existe una cierta elipse  $E$  que corta a  $\partial K$  en, al menos, tres pares de puntos opuestos.*

*Demostración:* Sean  $P, P', Q$  y  $Q'$  dos pares cualesquiera de puntos opuestos en  $\partial K$ . Entonces, o bien existe un tercer par de puntos opuestos  $R$  y  $R'$  en  $\partial K$  tal que  $PQR P'Q'R'$  es un hexágono estrictamente convexo y centralmente simétrico, o bien  $K$  coincide con el cuadrilátero  $PQP'Q'$  (recuérdese que hemos supuesto a  $K$  convexo). En el primer caso existe una elipse que pasa por los seis puntos. En el segundo, reduciendo ligeramente cualquier elipse circunscrita al cuadrilátero tendremos el resultado.  $\square$

**Lema 3.4.8** *Sea  $K$  un subconjunto compacto y convexo del plano  $\mathbb{R}^2$ , centralmente simétrico y no contenido en ninguna recta. Entonces, existe un círculo  $C$  y una*

transformación afín del plano  $l$  tal que  $C$  está circunscrito a la imagen  $M$  de  $K$  por  $l$  y corta a la frontera de  $M$  en al menos dos pares de puntos opuestos.

*Demostración:* Apliquemos el Lema anterior a  $K$  y consideremos una transformación afín  $l'$  que convierta la elipse  $E$  obtenida en un círculo. Sea  $M' = l'(K)$ . Sea  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}_+$  la función que describe a  $\partial M'$  en coordenadas polares, como función del ángulo. Entonces,  $f$  es periódica de periodo  $\pi$  (por ser  $M'$  centralmente simétrico) y tiene el mismo valor en tres puntos diferentes  $0 \leq x < y < z < \pi$  (los puntos donde  $\partial M'$  corta al círculo  $C'$ ). En estas condiciones  $f$  tiene al menos dos máximos locales en cada periodo. Efectivamente, o bien al menos dos de los intervalos abiertos  $(x, y)$ ,  $(y, z)$  y  $(z, x + \pi)$  contienen un máximo local, o bien uno de ellos (pongamos que es  $(x, y)$ ) contienen un máximo local y el tercer punto (en este caso  $z$ ) es otro máximo local.

Sean, en cualquier caso,  $\alpha$  y  $\beta$  dos máximos locales de  $f$  en un periodo y supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $\alpha$  es de hecho un máximo global. Considérese la colección de transformaciones lineales  $l_r$  ( $0 < r \leq 1$ ) que fijan la dirección en la que se encuentra  $\beta$  y contraen la dirección normal a  $\beta$  en un factor  $r$ . Llamemos  $f_r$  a la transformada de  $f$  por  $l_r$ , esto es,  $f_r = f \circ l_r$ . Entonces, para  $r$  próximo a 0,  $\beta$  es claramente un máximo global de  $f_r$ . Sea  $r_0$  el supremo de los valores de  $r$  para los que ésto ocurre. Afirmamos que en estas condiciones  $\beta$  es un máximo global de  $f_{r_0}$ , pero no es el único.

La afirmación terminará la prueba del Lema como sigue. Sean  $l = l_{r_0} \circ l'$ ,  $M = l(K) = l_{r_0}(M')$  y sea  $C$  el círculo de radio  $f_{r_0}(\beta)$ . Este círculo contiene a  $M$  y corta a su frontera en los dos pares de puntos correspondientes a las direcciones  $\beta$  y  $\gamma$  para las cuales  $f_{r_0}$  toma el máximo valor.

Para demostrar la afirmación, el hecho de que  $\beta$  sea un máximo global para  $f_r$  para valores de  $r$  arbitrariamente cercanos a  $r_0$  implica que también es un máximo global de  $f_{r_0}$ . Por otra parte, para cualquier  $r > r_0$  el máximo absoluto de  $f_r$  no se alcanza en  $\beta$ , ni en ningún punto de un cierto intervalo  $[\beta - \epsilon, \beta + \epsilon]$  alrededor de  $\beta$  (puesto que  $\beta$  es un máximo local de  $f_r$  para todo  $r$ ). Considérese una sucesión  $r_1 > r_2 > \dots$  que tienda a  $r_0$ , y para cada  $r_i$  sea  $\gamma_i$  un máximo absoluto de  $l_{r_i}$ . Entonces, la sucesión  $\gamma_i$  tiene algún punto límite en el compacto  $[0, \beta - \epsilon] \cup [\beta + \epsilon, \pi]$  y este punto límite  $\gamma$  ha de ser un máximo de  $f_{r_0}$ .  $\square$

**Proposición 3.4.9** *Sea  $K$  un subconjunto acotado del plano  $\mathbb{R}^2$ , centralmente simétrico y no contenido en ninguna recta. Entonces, existe una cierta elipse  $E$  circunscrita a  $K$  y tal que la frontera  $\partial K$  corta a  $E$  en, al menos, dos pares de puntos opuestos.*

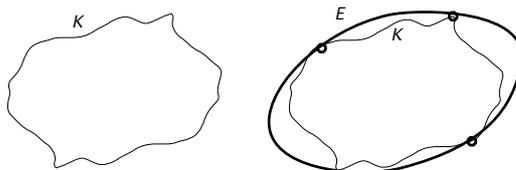


Figura 3.19: Elipse circunscrita a un objeto simétrico.

*Demostración:* Si  $K$  es convexo, apliquemos el último Lema a su clausura, que es convexa y compacta. De este modo se obtiene un círculo  $C$  y una transformación

lineal  $l$  que envía  $K$  sobre un convexo  $M$  inscrito en  $C$  y cuya frontera corta a  $C$  en al menos dos pares de puntos opuestos. La imagen inversa  $E = l^{-1}(C)$  de  $C$  cumple entonces las condiciones que se piden.

Si  $K$  no es convexo, pero es compacto, aplíquense las consideraciones anteriores a su cierre convexo  $\text{conv}(K)$ . Veamos cómo cualquier punto de  $\partial\text{conv}(K) \cap E$  está también en  $\partial K \cap E$  (lo cual terminará la demostración para este caso). Sea  $P$  un cierto punto en  $\partial\text{conv}(K) \cap E$ . Como se tiene que  $\partial\text{conv}(K) \subseteq \text{conv}(K) = \text{conv}(\partial K)$ ,  $P$  está contenido en un cierto segmento  $[Q, R]$  con  $Q, R \in \partial K$ . Ahora bien, como  $P \in E$  y  $E$  está circunscrita a todo  $\text{conv}(K)$  (en particular a  $\partial K$ , la única posibilidad es que, o bien  $P = Q$  o bien  $P = R$ . Por tanto,  $P \in \partial K$ .

Por último, la reducción del caso compacto al caso acotado es trivial, puesto que la tesis atañe sólo a la frontera de  $K$ .  $\square$

**Teorema 3.4.10** *Sea  $d_K$  una distancia estrictamente convexa y supongamos que su bola unidad  $K$  es simétrica, pero no es una elipse. Entonces, existe una nube  $S$  de siete puntos tales que el diagrama de Delaunay  $\text{Del}_K(S)$  tiene el tipo topológico del primero mostrado en la Figura 3.3 (pág. 125).*

*Demostración:* Todos los pasos de la demostración serán ilustrados en la Figura 3.20.

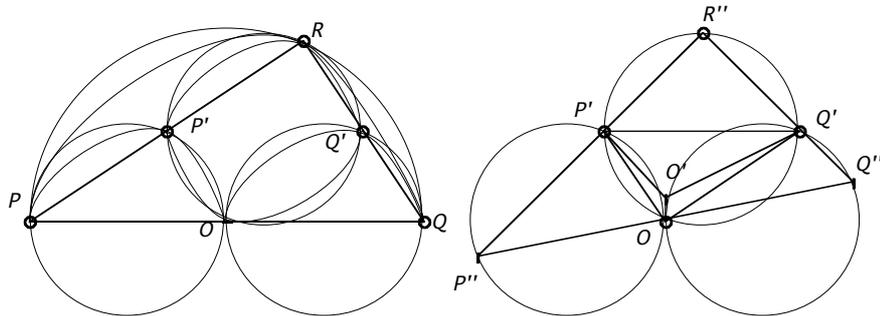


Figura 3.20: Ilustración del Teorema 3.4.10.

Sea  $E$  una elipse circunscrita a la  $d_K$ -bola unidad  $K$ , como la que se obtiene en la Proposición 3.4.9. Supongamos que, de hecho,  $E$  es una circunferencia. Si no fuera así, podríamos en cualquier caso aplicar la discusión que sigue a una cierta transformada afín de  $d_K$  y demostrar para ella el Teorema, lo cual, gracias al Corolario 3.4.5, demostraría también el Teorema para  $d_K$ .

Sean  $P$  y  $Q$  uno de los pares de puntos opuestos en  $\partial K \cap E$ , sea  $O$  el punto medio del segmento  $[P, Q]$  y sea  $R$  otro punto en  $\partial K \cap E$ . Podemos además suponer que no hay ningún otro punto de corte de  $\partial K$  con  $E$  en el arco de  $d_K$  que va de  $P$  a  $R$  sin pasar por  $Q$ . Ésto es posible de conseguir, sin más que tomar como  $P$  y  $R$  los extremos de una componente conexa de  $\partial K \setminus (\partial K \cap E)$  y después tomar como  $Q$  el opuesto de  $P$ . En estas condiciones las circunferencias  $C_{PP'O}$ ,  $C_{QQ'O}$  y  $C_{P'Q'R}$  circunscritas a los triángulos  $PP'O$ ,  $QQ'O$  y  $P'Q'R$  se cortan en el punto  $O$ , como muestra la parte izquierda de la Figura 3.20. También pasan por  $O$  las tres  $d_K$ -circunferencias que pasan por los vértices de dichos triángulos, puesto que son traslaciones a escala  $1/2$  de la  $d_K$ -circunferencia unidad.

Elijamos ahora un punto arbitrario  $R''$  en el arco  $RP'$  de la circunferencia  $C_{P'Q'R}$ . Éste punto estará necesariamente en el exterior estricto de la correspondiente  $d_K$ -circunferencia. Además es posible encontrar una  $d_K$ -circunferencia  $C$  que pasa por  $P'$  y  $Q'$  y que deja tanto a  $R''$  como a  $O$  en su exterior. Tomemos un punto  $O'$  en el interior del triángulo,  $OP'Q'$ , exterior a las circunferencias  $C_{PP'O}$ ,  $C_{QQ'O}$  y suficientemente cerca de  $O$  para ser también exterior a la  $d_K$ -circunferencia  $C$ . Sean por último  $P''$  y  $Q''$  los cortes de las prolongaciones de los segmentos  $[R'', P']$  y  $[R'', Q']$  con las circunferencias  $C_{PP'O}$ ,  $C_{QQ'O}$ , respectivamente. Afirmamos que entonces el  $d_K$ -diagrama de Delaunay de los siete puntos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $O$ ,  $P'$ ,  $Q'$ , y  $O'$  es como se muestra en la Figura, esto es, del tipo topológico que buscábamos.

En primer lugar, es fácil probar, usando técnicas de Geometría elemental, que los puntos  $P''$ ,  $O$  y  $Q''$  están alineados (de hecho,  $O$  es el punto medio de  $P''$  y  $Q''$ ). La arista  $[P', Q']$  está en el diagrama de Delaunay porque la  $d_K$ -circunferencia  $C$  que pasa por  $P'$  y  $Q'$  tiene a los demás puntos en su exterior. Las aristas  $[O, P']$  está en el diagrama de Delaunay porque la  $d_K$ -circunferencia que pasa por  $P$ ,  $P'$  y  $O$  tiene a  $O'$  en su exterior estricto y a  $P''$  sobre ella o en su exterior. Por los mismos argumentos está también en el diagrama de Delaunay la arista  $[O, Q']$ . La presencia de estas tres aristas mencionadas es suficiente para completar el diagrama, gracias a la Proposición 3.3.10 en la que dábamos las propiedades estructurales de los diagramas de Delaunay para distancias estrictamente convexas.  $\square$

### 3.5 Matroides orientadas de Delaunay para distancias estrictamente convexas y suaves

En la subsección 3.1.4 vimos cómo la propiedad del levantamiento del diagrama de Delaunay Euclídeo de una nube de puntos  $S$  arbitraria conllevaba la existencia de una cierta matroide orientada “de Delaunay”, que describía de qué manera las diferentes circunferencias y rectas del plano dividían a  $S$ . Sin embargo, los covectores de esa matroide orientada admitían una definición directa a partir de las circunferencias. La propiedad del levantamiento sólo era utilizada para probar que ese conjunto de covectores definía realmente una matroide orientada y que ésta era, además, realizable.

El propósito de esta sección es ver cómo la existencia de la matroide orientada de Delaunay se puede deducir directamente a partir de unas ciertas “buenas propiedades” de las circunferencias Euclídeas. Estas buenas propiedades son compartidas por las distancias estrictamente convexas y suaves en el plano. Por tanto, también ellas permitirán definir matroides orientadas de Delaunay para cualquier nube finita de puntos. Veremos además que éstas matroides orientadas de Delaunay tienen casi todas las propiedades que señalábamos en la Sección 3.1 excepto, quizás, su realizabilidad. En el apartado 3.5.3 veremos que, de hecho, pueden aparecer matroides orientadas de Delaunay no realizables.

#### 3.5.1 Un marco general

Nuestro resultado principal de esta Sección (el Teorema 3.5.1) será enunciado en dimensión arbitraria  $d$ . El resultado nos dice esencialmente que si una cierta colección de esferas  $(d - 1)$ -dimensionales y pseudohiperplanos (i.e., hipersuperficies

topológicamente equivalentes a un hiperplano) en el espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^d$  satisfacen unas ciertas propiedades, entonces para cualquier nube finita  $S$  de puntos en  $\mathbb{R}^d$  los covectores definidos por la manera en que las esferas y pseudohiperplanos dividen a  $S$  satisfarán los axiomas de una matroide orientada. Para unificar los argumentos relativos a esferas y los relativos a pseudohiperplanos será conveniente compactificar el espacio Euclídeo por un punto en el infinito, convirtiéndolo en una esfera  $d$ -dimensional  $S^d$ . Por el Teorema de Jordan-Brouwer, para cualquier esfera  $(d-1)$ -dimensional  $C$  contenida en  $S^d$ , su complementario  $S^d \setminus C$  tiene dos componentes conexas. Estas dos componentes pueden no ser simplemente conexas para  $d \geq 3$ , (véanse [Moise, Antoine]) si  $C$  no es equivalente a una esfera PL en  $S^d$ , es decir, si  $C$  no es *dócil* (*tame*). Agradecemos a Fernando Etayo habernos indicado que la condición de docilidad no es necesaria para nuestra demostración del Teorema 3.5.1.

**Teorema 3.5.1** *Sea  $\mathcal{S}$  una colección de  $(d-1)$ -esferas  $(d-1)$ -dimensionales en la  $d$ -esfera  $S^d$  ( $d \geq 2$ ), a las que llamaremos  $\mathcal{S}$ -esferas. Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones:*

(S1) *Por  $d+1$  puntos cualesquiera de  $S^d$  pasa, al menos, una  $\mathcal{S}$ -esfera.*

(S2) *La intersección de dos  $\mathcal{S}$ -esferas  $C$  y  $D$  es o bien vacía, o un punto, o una esfera  $(d-2)$ -dimensional tanto en  $C$  como en  $D$ . (Diremos que  $C$  y  $D$  son tangentes si su intersección es un punto y que son transversales si es una  $(d-2)$ -esfera.)*

(S3) *Si  $d > 2$ , para toda  $\mathcal{S}$ -esfera  $C$ , la colección de esferas  $(d-2)$ -dimensionales  $\mathcal{S}_C := \{C \cap D \mid D \in \mathcal{S}, C \text{ y } D \text{ son transversales}\}$  satisface a su vez las condiciones (S1)-(S5).*

(S4) *Para todo par de puntos  $P$  y  $Q$  en  $S^d$  y para toda  $\mathcal{S}$ -esfera  $C$  que pasa por  $P$  pero no por  $Q$  existe una y sólo una  $\mathcal{S}$ -esfera  $D$  que pasa por  $Q$  y que corta a  $C$  tangencialmente en  $P$ .*

(S5) *Para todo par de  $\mathcal{S}$ -esferas  $C$  y  $D$  y todo punto  $p$  “entre” ellas (i.e. en la componente de  $S^d \setminus C$  que contiene a  $D$  y en la componente de  $S^d \setminus D$  que contiene a  $C$ ) existe una  $\mathcal{S}$ -esfera  $Z$  que pasa por  $p$  y que separa a  $C$  y  $D$  (i.e. con  $C$  y  $D$  respectivamente contenidas en las dos componentes conexas de  $S^d \setminus Z$ ).*

*Sea  $S$  una nube finita de  $n$  puntos en  $S^d$ . Consideremos la colección  $\mathcal{V}$  de covectores que contiene a  $(\emptyset, S, \emptyset)$  (el covector “cero”) y a los que son de la forma  $(C_1 \cap S, C \cap S, C_2 \cap S)$  para una  $\mathcal{S}$ -esfera  $C$ , siendo  $C_1$  y  $C_2$  las dos componentes conexas de  $S^d \setminus C$ .*

*Entonces,  $\mathcal{V}$  es el conjunto de covectores de una cierta matroide orientada  $\mathcal{M}$ , que es acíclica, politopal. Además (si  $S$  consta de al menos dos puntos), el rango de  $\mathcal{M}$  vale dos más la dimensión de  $\bigcap_{C \in \mathcal{S}, S \subseteq C} C$ , que es una esfera.*

Veamos algunas observaciones.

**Observaciones 3.5.2 :**

- Para  $d = 2$ , las condiciones (S1) y (S2) son equivalentes a “por tres puntos cualesquiera pasa una y sólo una  $\mathcal{S}$ -esfera”. La condición inductiva (S3) se verifica para  $d = 2$  si consideramos en  $S^1$  el sistema de 0-esferas consistente en todos los pares de puntos de  $S^1$ . En este caso diríamos que dos 0-esferas son tangentes si tienen un punto en común, que se cortan transversalmente si una de ellas separa

los dos puntos de la otra y que no se cortan en caso contrario. Este sistema de  $0$ -esferas en  $S^1$  satisface las condiciones (S1), (S2), (S4) y (S5) e incluso la condición (S3) se verificaría para él, ya que  $\mathcal{S}_0 = \{\emptyset\}$  es el único posible sistema de esferas en  $S^0 = \{-1, +1\}$ , con el convenio usual  $S^{-1} = \emptyset$ . En cualquier caso, esta extensión de la condición (S3) al caso  $d = 2$  es redundante.

- Veremos más adelante que el sistema de esferas formado por las rectas del plano y las  $d_K$ -circunferencias de una cierta distancia estrictamente convexa y suave  $d_K$  satisface las condiciones del Teorema. Ésto no será cierto si la distancia no es estrictamente convexa (no satisface (S2)) o no es suave (no satisface (S1)). En cuanto a las distancias estrictamente convexas y suaves en el espacio de dimensión 3, es fácil verificar que satisfacen (S4) y (S5). También satisfacen (S1) (cf. [Makeev]) y (S2). Sin embargo, no satisfacen la condición inductiva (S3) ni la conclusión del Teorema 3.5.1, como se verá al final de la Sección 3.5.2.

Comenzaremos la demostración por la última parte, a saber, el hecho de que la intersección de todas las  $\mathcal{S}$ -esferas que contienen a  $S$  es una esfera, de una cierta dimensión. A ésta esfera la llamaremos la *esfera generada por  $S$*  y diremos que  $k$  puntos están en posición general si la esfera que generan es de dimensión  $k - 2$ .

**Lema 3.5.3** (i) Sea  $\mathcal{S}$  un sistema de esferas en  $S^d$  en las condiciones del Teorema 3.5.1. Entonces, la intersección de cualquier número (posiblemente infinito) de  $\mathcal{S}$ -esferas es o bien un punto, o bien vacía, o bien una esfera de una cierta dimensión entre 0 y  $d - 1$ .

(ii) Cualquier  $\mathcal{S}$ -esfera contiene  $d + 1$  puntos en posición general, i.e.  $d + 1$  puntos no contenidos en ninguna otra  $\mathcal{S}$ -esfera.

*Demostración:* La demostración se hará por inducción sobre  $d$ . Para  $d = 2$  las dos afirmaciones se deducen trivialmente de la condición (S2) del Teorema 3.5.1.

Para  $d > 2$ , Sea  $\mathcal{I}$  el conjunto de  $\mathcal{S}$ -esferas cuya intersección queremos estudiar y sea  $C \in \mathcal{S}$  una de ellas. Entonces, la intersección de las  $\mathcal{S}$ -esferas de  $\mathcal{I}$  es igual a la intersección de las  $\mathcal{S}_C$ -esferas en  $\mathcal{I}_C := \{C \cap D \mid D \in \mathcal{S}, D \neq C\}$ , que es una esfera por hipótesis inductiva y gracias a la condición (S3) del Teorema 3.5.1. Ésto demuestra (i).

Para (ii), sea  $C_1 \subset C$  una  $\mathcal{S}_C$ -esfera cualquiera, y consideremos  $d$  puntos  $p_1, \dots, p_d$  en ella en posición general (que existen por hipótesis inductiva). Sea  $p_{d+1}$  otro punto de  $C$  que no esté en  $C_1$ . Por hipótesis inductiva, la única  $\mathcal{S}_C$ -esfera que pasa por  $p_1, \dots, p_d$  es  $C_1$ , así que ninguna  $\mathcal{S}_C$ -esfera pasa por  $p_1, \dots, p_{d+1}$ . Por la condición (S3) del Teorema 3.5.1, tampoco ninguna  $\mathcal{S}$ -esfera pasa por  $p_1, \dots, p_{d+1}$ , excepto la propia  $C$ .  $\square$

El siguiente Lema hace referencia a cómo se cortan dos  $\mathcal{S}$ -esferas transversales.

**Lema 3.5.4** Sea  $\mathcal{S}$  un sistema de esferas en  $S^d$  en las condiciones del Teorema 3.5.1. Sean  $C$  y  $D$  dos  $\mathcal{S}$ -esferas transversales. Entonces, las dos componentes conexas de  $C \setminus D$  quedan cada una en una de las dos componentes conexas de  $S^d \setminus D$ .

*Demostración:* Supongamos que no es así, es decir, que  $C \setminus D$  está contenido en una de las dos componentes de  $S^d \setminus D$ . Para simplificar la exposición, elijamos

un ‘punto del infinito’ en la otra componente de  $S^d \setminus D$ , de forma que podemos decir que  $C$  está inscrita en  $D$ . Llamemos  $C_+$  y  $C_-$  (resp.  $D_+$  y  $D_-$ ) a las dos componentes conexas de  $S^d \setminus C$  (resp. de  $S^d \setminus D$ ), siendo  $C_+$  (resp.  $D_+$ ) la que contiene al punto del infinito. Por construcción,  $D_+ \subset C_+$  y  $C_- \subset D_-$ .

Tomemos un cierto punto  $P \in C \cap D$  y un punto  $Q$  en  $C_-$ . Sea  $Z$  la  $\mathcal{S}$ -esfera tangente a  $C$  en  $P$  que pasa por  $Q$  (como en la condición (S4)). Entonces,  $Z$  es también la  $\mathcal{S}$ -esfera tangente a  $D$  en  $P$  y que pasa por  $Q$ . La contradicción viene al considerar un cierto punto  $Q' \in C \cap D$  distinto de  $P$ . Tanto  $C$  como  $D$  son  $\mathcal{S}$ -esferas tangentes a  $Z$  en  $P$  y pasan por  $Q'$ , lo cual contradice la condición (S4) del Teorema 3.5.1.  $\square$

La Proposición que viene ahora será la base para las operaciones de *composición* y *eliminación de una coordenada* entre los covectores de la matroide orientada.

**Proposición 3.5.5** *Sea  $\mathcal{S}$  un sistema de esferas en  $S^d$  en las condiciones del Teorema 3.5.1. Sean  $C$  y  $D$  dos  $\mathcal{S}$ -esferas y  $P$  un punto fuera de  $C \cup D$ . Sean  $C_+$  y  $C_-$  (resp.  $D_+$  y  $D_-$ ) las dos componentes conexas de  $S^d \setminus C$  (resp. de  $S^d \setminus D$ ), con los signos de forma que  $P$  esté en  $C_+ \cap D_-$ . Entonces, existe una  $\mathcal{S}$ -esfera  $Z$  tal que*

- (i)  $P \in Z$ .
- (ii)  $Z \cap C = Z \cap D = C \cap D$ .
- (iii) Las dos componentes conexas de  $S^d \setminus Z$  están contenidas respectivamente en  $C_+ \cup D_+$  y  $C_- \cup D_-$ .

*Demostración:* Consideremos por separado las tres posibilidades para  $C \cap D$ :

- Si  $C$  y  $D$  son transversales, entonces  $C \cap D$  es tanto una  $\mathcal{S}_C$ -esfera en  $C$  como una  $\mathcal{S}_D$ -esfera en  $D$ . Tomemos  $d$  puntos en  $C \cap D$  en posición general y sea  $Z$  una  $\mathcal{S}$ -esfera que pasa por ellos y por  $P$  ( $Z$  existe por la condición (S1) del Teorema 3.5.1. Entonces,  $Z \cap C = Z \cap D = C \cap D$  porque  $Z$  contiene  $d$  puntos en posición general de  $C \cap D$ . Por tanto,  $Z$  verifica (i) y (ii).

Del Lema anterior y del hecho de que  $Z$  tiene intersección no vacía con  $C_+ \cap D_-$  se sigue que las dos componentes conexas de  $Z \setminus (C \cap D)$  están contenidas respectivamente en  $C_+ \cap D_-$  y  $C_- \cap D_+$ . Por tanto, las dos componentes conexas de  $S^d \setminus Z$  contienen respectivamente a  $C_+ \cap D_+$  y  $C_- \cap D_-$  lo cual a su vez implica que están contenidas en  $C_- \cup D_-$  y  $C_+ \cup D_+$  respectivamente.

- Si  $C$  y  $D$  son tangentes, sea  $Q$  su único punto de intersección. Sea  $Z$  la  $\mathcal{S}$ -esfera tangente a  $C$  en  $Q$  que pasa por  $P$ , obtenida por la condición (S4) del Teorema 3.5.1. Si  $Z \cap D$  contuviera algún otro punto  $Q'$  aparte de  $Q$ , llegaríamos a la contradicción de que tanto  $Z$  como  $D$  serían  $\mathcal{S}$ -esferas tangentes a  $C$  en  $Q$  que pasan por  $Q'$ . Por tanto,  $Z$  verifica las condiciones (i) y (ii).

Ahora,  $Z \setminus \{Q\}$  es conexo y no interseca a  $C$  ni a  $D$ . Por tanto, ha de estar contenido en uno de  $C_+$  o  $C_-$  y en uno de  $D_+$  o  $D_-$ . Como  $P \in C_+ \cap D_-$  está en  $Z$ ,  $Z \setminus \{Q\}$  está contenido en  $C_+ \cap D_-$ . Ésto implica que una de las componentes conexas de  $S^d$  está contenida en  $C_+$  y una (quizás la misma) en  $D_-$ . Si no es la misma, hemos terminado. If it is not the same component we have finished.

Si es la misma, llamémosla  $Z_+$  y llamemos  $Z_-$  a la otra. Entonces, o bien  $C_+ \subset D_-$  o bien  $D_- \subset C_+$ . Supongamos, que es  $C_+ \subset D_-$  (el otro caso es

análogo). Entonces  $C_+ \cap D_+ = \emptyset$  y  $C_- \cup D_- = S^d \setminus \{P\}$  y contiene a  $Z_-$ . Como  $Z_+$  estaba contenido tanto en  $C_+$  como en  $C_-$ , hemos terminado.

-Si  $C$  y  $D$  son disjuntas, para simplificar la exposición tomemos el punto  $P$  como punto del infinito. Hay tres posibilidades para  $C$  y  $D$ , a saber que sean mutuamente exteriores, que  $C$  sea interior a  $D$  o que  $D$  sea interior a  $C$ . El primer caso se corresponde con que “ $P$  esté entre  $C$  y  $D$ ”, como en la condición (S5) del Teorema 3.5.1, el cual nos asegura la existencia de la  $\mathcal{S}$ -esfera  $Z$  “que separa a  $C$  y  $D$  y pasa por  $P$ ”.

Si se da uno de los otros casos, supongamos que es  $D$  la que es interior a  $C$ . Consideremos una cierta  $\mathcal{S}$ -esfera  $Z$  que pase por  $P$  y no corte ni a  $C$  ni a  $D$ . Para encontrarla, podemos tomar un punto cualquiera  $Q$  en  $C$ , llamar  $Z_0$  a la  $\mathcal{S}$ -esfera tangente a  $C$  en  $Q$  y que pasa por  $P$  y tomar como  $Z$  la  $\mathcal{S}$ -esfera tangente a  $Z_0$  en  $P$  y que pasa por cualquier punto  $Q'$  en la componente de  $S^2 \setminus Z_0$  que no corta a  $C$  (ni, por tanto, a  $D$ ).

Una tal  $\mathcal{S}$ -esfera  $Z$  verifica las condiciones de la Proposición: como  $C_+$  y  $D_-$  son las componentes exteriores de  $S^2 \setminus C$  y  $S^2 \setminus D$ , se tiene que  $C_+$  está contenido en  $D_-$  y que  $C_- \cup D_- = S^d$ . Es decir, las dos componentes conexas de  $S^2 \setminus C$  están contenidas en  $C_- \cup D_-$ . Por otra parte, una de las componentes conexas de  $S^2 \setminus Z$  es exterior a  $C$ , es decir, está contenida en  $C_+ \subseteq C_+ \cup D_+$ .  $\square$

Con ésto podemos ya demostrar el Teorema 3.5.1, como sigue.

*Demostración:* (del Teorema 3.5.1). Que los covectores de  $\mathcal{V}$  satisfacen los axiomas (V0) y (V1) de los covectores de una matroide orientada (Definición 3.1.6, página 130) es inmediato, a partir de la definición de  $\mathcal{V}$ . Tenemos que verificar sólo (V2) y (V3). Si uno de los covectores involucrado es el covector cero los axiomas se verifican de forma trivial. Supongamos, por tanto, que tenemos dos covectores  $V_C$  y  $V_D$  que provienen de dos  $\mathcal{S}$ -esferas  $C$  y  $D$ . Llamemos  $C_+$ ,  $C_-$ ,  $D_+$  y  $D_-$  a las componentes conexas de  $S^d \setminus C$  y  $S^d \setminus D$ , en la manera que concuerde con los signos de  $V_C$  y  $V_D$ .

El axioma (V3) se sigue directamente de la Proposición 3.5.5, sin más que tomar como covector  $V_Z$  el que se obtiene de la  $\mathcal{S}$ -esfera  $Z$  de la Proposición con el signo adecuado para que se tenga  $Z_+ \subset C_+ \cup D_+$  y  $Z_- \subset C_- \cup D_-$ .

Para el axioma de composición (V2), de acuerdo con [Björner-L-S-W-Z] sólo necesitamos demostrarlo en el caso de que no haya ningún punto de  $S$  en  $U = (C_+ \cap D_-) \cup (C_- \cap D_+)$ . Si  $U$  es vacío, entonces  $C = D$  y no hay nada que probar. Si no, supongamos, que  $U_1 = C_+ \cap D_-$  es no vacío. Tomemos un punto  $P$  en  $U_1$  y apliquemos la Proposición 3.5.5 a las  $\mathcal{S}$ -esferas  $C$  y  $D$  y al punto  $P$ . Ésto nos da una  $\mathcal{S}$ -esfera  $Z$  cuyo covector  $V_Z$  es exactamente  $V_C$  o  $V_D$ . Si  $U_1$  es vacío pero  $U$  no, apliquemos el mismo argumento a los covectores reorientados  $-V_C$  y  $-V_D$ , para obtener un covector  $V_Z = -V_C \circ V_D$ . Entonces, trivialmente,  $-V_Z = V_C \circ V_D$ . Ésto termina la demostración de que  $\mathcal{V}$  define una matroide orientada  $\mathcal{M}$ .

Para mostrar que  $\mathcal{M}$  es politopal, sea  $P$  un punto de  $S$  y veamos que hay una cierta  $\mathcal{S}$ -esfera  $C_P$  que pasa por  $P$  y que tiene a  $S \setminus \{P\}$  contenido en una de las dos componentes de  $S^2 \setminus C_P$ .  $C_P$  se obtendrá por inducción sobre el número  $n$  de puntos en  $S$ . El caso  $n = 1$  es trivial. Para  $n$  arbitrario, sea  $Q$  otro punto de  $S$  y, por hipótesis inductiva, sea  $C$  una  $\mathcal{S}$ -esfera que pasa por  $P$  y tiene a  $S \setminus \{P, Q\}$  en una de las componentes conexas  $C_+$  de su complementario. Si  $Q \in C_+$  habremos terminado. Si  $Q \in C$ , bastará tomar  $C_P$  tangente a  $C$  en  $P$  y pasando por un punto

arbitrario de  $C_-$ . Si  $Q \in C_-$ , apliquemos lo anterior a la  $\mathcal{S}$ -esfera tangente a  $C$  en  $P$  que pase por  $Q$ , que seguirá teniendo a  $S \setminus \{P, Q\}$  en una de las componentes conexas  $C_+$  de su complementario. Que la matroide orientada es acíclica se obtiene de componer los covectores  $C_P$  y  $C_Q$  obtenidos en la demostración de politopalidad (de hecho, toda matroide orientada politopal es acíclica).

Para el rango de  $\mathcal{M}$ , sea  $C$  la  $\mathcal{S}$ -esfera generada por  $S$ . y consideremos al sistema de esferas  $\mathcal{S}_C$  inducido en ella. La matroide orientada  $\mathcal{M}$  coincide con la correspondiente matroide orientada  $\mathcal{M}_S$ , lo cual nos permite estudiar únicamente el caso en que  $S$  genera a  $S^d$ , es decir, que no está contenido en ninguna  $\mathcal{S}$ -esfera. Queremos probar que en este caso el rango es  $d + 2$ .

Veamos primero que el rango es a lo más  $d + 2$ . Sean  $V_0, V_1, \dots, V_l$  una cadena de covectores obtenidos cada uno de componer el anterior con algún covector. Entonces, existen  $l$  puntos  $\{P_1, \dots, P_l\} \in S$  tales que  $P_{i+1}, \dots, P_l$  son cero en  $V_i$ , pero  $P_1, \dots, P_i$  no lo son. Para  $i = 1, \dots, l - 1$  Sea  $C_i$  la esfera generada por  $P_i, \dots, P_l$ . Entonces, cada  $S_{i+1}$  está estrictamente contenida en la interior  $S_i$ . Por tanto, como la dimensión de  $S_{l-1}$  es cero, la dimensión de  $S_1 = S^d$  es al menos  $l - 2$ , es decir,  $l < d + 2$ .

Para probar que el rango es al menos  $d + 2$ , consideremos  $d + 2$  puntos de  $S$  en posición general (que existen, gracias al Lema 3.5.3, pues  $S$  genera a la esfera  $S^d$ ). Sea  $S'$  el conjunto de esos  $d + 2$  puntos. La matroide orientada de  $S$  tiene rango mayor o igual que la de  $S'$ . Ésta última contiene, para cada  $P \in S'$ , un covector nulo en  $S' \setminus \{P\}$  y no nulo en  $P$  y, por tanto, su rango es  $d + 2$ .  $\square$

### 3.5.2 El caso de las distancias estrictamente convexas

Consideremos el caso de una distancia convexa  $d_K$  en el plano Euclídeo. Supongamos en primer lugar que  $d_K$  es estrictamente convexa y suave. Vamos a ver que el Teorema 3.5.1 se aplica a ellas.

**Teorema 3.5.6** *Sea  $d_K$  una distancia estrictamente convexa y suave en el plano Euclídeo. Consideremos la compactificación  $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \infty$  del plano por un punto, que es una 2-esfera. Consideremos el sistema de 1-esferas  $\mathcal{S}_K$  en  $S^2$  formado por las  $d_K$ -circunferencias y la compactificación de las rectas. Entonces,  $\mathcal{S}_K$  está en las condiciones del Teorema 3.5.1*

*Demostración:* Las condiciones (S1) y (S2) del Teorema son equivalentes, para  $d = 2$  a “por cada tres puntos pasa una y sólo una  $\mathcal{S}$ -esfera”. Traducido a  $d_K$ -esferas ésto equivale a que tres puntos alineados no son  $d_K$ -cocirculares y por tres puntos no alineados pasa una y sólo una  $d_K$ -circunferencia. Ésto se cumple para una distancia estrictamente convexa y suave, como vimos en las Propositiones 3.2.4 y 3.2.5. La condición (S3) del Teorema no afecta al caso  $d = 2$ , así que sólo nos quedan por ver (S4) y (S5). Para cada una de ellas debemos considerar todos los posibles casos de que  $C$  y  $D$  sean  $d_K$ -circunferencias o sean rectas, y que  $P$  y  $Q$  sean puntos del plano o uno de ellos sea el punto del infinito.

(S4) Si  $Q$  es el punto del infinito,  $C$  es una  $d_K$ -circunferencia y  $D$  una recta. La condición equivale a decir que por cada punto  $P$  de una  $d_K$ -circunferencia  $C$  pasa una recta soporte que sólo corta a  $C$  en  $P$ . Ésto es cierto por convexidad estricta de  $C$ .

Si  $Q$  no es el punto del infinito, y  $P$  sí lo es,  $C$  es una recta. La condición equivale a decir que hay una  $d_K$ -circunferencia  $D$  que pasa por  $Q$  y con recta soporte  $D$  en el punto  $P$ . Para encontrarla, basta comenzar con una  $d_K$ -circunferencia tangente a la recta en  $P$  y muy pequeña, y agrandarla de forma continua hasta que pase por  $Q$ .

Si ni  $P$  ni  $Q$  son puntos del infinito,  $C$  y  $D$  son  $d_K$ -circunferencias. La condición nos pide, dada una  $d_K$ -circunferencia  $C$  que pasa por  $P$  y no pasa por  $Q$ , encontrar otra que pase por  $P$  y  $Q$  y sea “tangente” a ella (esto es, que la corte sólo en  $P$ ). Para encontrarla, consideremos primero una recta soporte de  $C$  en  $P$  y luego la circunferencia con esa misma recta soporte en  $P$  y que pasa por  $Q$ . Si las dos  $d_K$ -circunferencias resultan estar en lados opuestos de la recta soporte es claro que no se cortan. Si están en el mismo, entonces son necesariamente homotéticas por una homotecia con centro en  $P$  y, de nuevo por convexidad estricta, no tienen ningún otro punto de corte.

(S5) Tenemos tres casos, según que  $C$  y  $D$  sean  $d_K$ -circunferencias o rectas.

Si ambas son  $d_K$ -circunferencias y una está dentro de la otra, entonces son homotéticas con centro de homotecia en un punto interior a ambas. Como  $P$  está entre ambas, la  $d_K$ -circunferencia que buscamos se puede encontrar agrandando la interior de forma continua, con el mismo centro de homotecia, hasta que pase por  $P$ .

Si una de ellos es una recta (digamos  $C$ ), el punto  $P$  es exterior a  $D$  y está en el mismo lado de la recta  $C$  que  $D$ . Podemos reducir este caso al anterior cambiando  $C$  por una  $d_K$ -circunferencia con recta soporte  $C$  y suficientemente grande para contener tanto a  $P$  como a  $D$  en su interior.

Si ambas son  $d_K$ -circunferencias y son mutuamente exteriores,  $P$  puede ser el punto del infinito o un punto del plano. Si es el infinito, lo que buscamos es una recta que separe a  $C$  de  $D$ , la cual existe. Si es un punto del plano, encontrar una recta que separe a  $C$  de  $D$  y no pase por  $P$  nos sirve también para reducir este caso al de una  $d_K$ -circunferencia y una recta.  $\square$

**Corolario 3.5.7** *Sea  $d_K$  una distancia estrictamente convexa y suave en el plano Euclídeo. Sea  $S$  una nube finita de puntos. Entonces, los conjuntos de covectores  $\mathcal{V}_S$  y  $\mathcal{V}_{S \cup \{\infty\}}$  obtenidos como las particiones de  $S$  y  $S \cup \{\infty\}$  inducidas por  $d_K$ -circunferencias y rectas definen sendas matroides orientadas acíclicas y politopales  $\text{DOM}_K(S)$  y  $\text{EDOM}_K(S)$ .*

*Sea  $k$  la dimensión del espacio afín generado por  $S$ . Entonces,  $\text{EDOM}_K(S)$  es de rango  $k + 2$  y  $\text{DOM}_K(S)$  es de rango  $k + 1$  si los puntos de  $S$  son  $d_K$ -cocirculares y  $k + 2$  en caso contrario.*

*Demostración:* La única afirmación que requiere ser probada es la que se refiere al rango de las matroides. La de  $\text{EDOM}_K(S)$  se obtiene directamente del Teorema 3.5.1 porque la “ $d_K$ -esfera” generada por  $S \cup \{\infty\}$  es siempre una recta o el plano compactificado. Para el caso de  $\text{DOM}_K(S)$  basta tener en cuenta que la  $d_K$ -esfera generada es o bien el plano, o bien una recta o bien un punto o bien una  $d_K$ -circunferencia. En los dos últimos casos los puntos son  $d_K$ -cocirculares y el rango dado por el Teorema coincide con  $k + 1$  (donde  $k$  es cero o dos respectivamente).  $\square$

El Teorema 3.5.6 y su Corolario 3.5.7 son ciertos para la distancia Euclídea en el espacio  $\mathbb{R}^d$  de dimensión arbitraria (y su demostración es esencialmente la misma que nosotros hemos dado) sin más que cambiar la palabra  $d_K$ -circunferencia por “traslación a escala de la esfera estándar  $S^{d-1}$ ”. La pregunta natural es si también son ciertos para las distancias estrictamente convexas y suaves en dimensión superior. El resto de esta sección está dedicado a mostrar que la respuesta es negativa y a mostrar la necesidad de la convexidad estricta y suavidad para el caso del plano. Para estas últimas es claro que las condiciones del Teorema 3.5.1 no se satisfacen, pero ésto no implica a priori la imposibilidad de definir matroides orientadas de Delaunay.

**Proposición 3.5.8** *Sea  $d_K$  una distancia convexa y supongamos que no es estrictamente convexa o que no es suave. Entonces, existe una cierta nube de puntos  $S$  para la cual la colección de covectores  $\mathcal{V}_{D_K}(S)$  del Teorema 3.5.6 no satisface las condiciones de una matroide orientada. Además,  $S$  puede tomarse con sólo cuatro puntos en el caso no suave y con cinco en el caso no convexo.*

*Demostración:* Para el caso no estrictamente convexo, sean  $C$  y  $D$  dos  $d_K$ -circunferencias que se cortan en tres puntos  $P_1, P_2$  y  $P_3$  alineados ( $C$  y  $D$  en tales condiciones existen, gracias a la Proposición 3.2.4). Sea  $P_4$  otro punto que no esté en la misma recta y tal que ninguna  $d_K$ -circunferencia pase por  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$  (por ejemplo, tómesese  $P_4$  suficientemente cercano al punto intermedio de  $P_1, P_2$  y  $P_3$ , pero fuera de la recta). Consideremos un último punto  $P_5$  que esté en  $C$  pero no en  $D$  y sea  $S = \{P_1, \dots, P_5\}$ . Para ver que  $\mathcal{V}_{D_K}(S)$  no satisface las condiciones de una matroide orientada, sean  $V_C$  y  $V_D$  los covectores obtenidos de  $C$  y  $D$  con signos de forma que  $P_4$  sea negativo en uno y positivo en el otro. El axioma (V3) de los covectores de una matroide orientada debería producir un covector que sea cero en  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$  pero no en  $P_5$ . Ésto implicaría la existencia de una  $d_K$ -circunferencia (o recta) que pase por  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$ , la cual no existe, por construcción.

Para una distancia  $d_K$  que no sea suave, sean  $P_1, P_2$  y  $P_3$  tres puntos no alineados y no  $d_K$ -cocirculares (que existen, por la Proposición 3.2.5). Sean  $C$  y  $D$  dos  $d_K$ -circunferencias arbitrarias que pasen por  $P_1$  y  $P_2$  y sea  $P_4$  un punto en  $C$  pero no en  $D$ . Sea  $S = \{P_1, \dots, P_4\}$ . Considerando de nuevo los covectores  $V_C$  y  $V_D$ , ahora con signos dados de forma que  $P_3$  sea positivo en uno y negativo en el otro, el mismo axioma (V3) debería proporcionar una  $d_K$ -circunferencia (o recta) que pase por  $P_1, P_2$  y  $P_3$ .  $\square$

Pasemos ahora al caso de dimensión superior. Comencemos por una observación de tipo general. Sea  $\mathcal{S}$  un sistema de esferas en  $S^d$  (no necesariamente en las condiciones del Teorema 3.5.1) y sea  $S$  un conjunto finito de  $S^d$ . Sea  $\mathcal{V}$  el conjunto de covectores definido por las particiones que las  $\mathcal{S}$ -esferas inducen en  $S$ . Entonces, una condición necesaria para que  $\mathcal{V}$  defina una matroide orientada es que  $S$  esté contenido o bien en una única  $\mathcal{S}$ -esfera, o bien en ninguna o bien en un número infinito de ellas. Ésto es así porque, si  $S$  está contenido en dos  $\mathcal{S}$ -esferas diferentes  $C$  y  $D$ , cualquier punto adicional  $P \in S^d$  estará contenido en una  $\mathcal{S}$ -esfera que contiene a  $S$ . Dicha  $\mathcal{S}$ -esfera será o bien  $C$ , o bien  $D$ , o bien una que se obtenga de  $C$  y  $D$  haciendo uso del axioma (V3) de los covectores de una matroide orientada, si  $P$  no está ni en  $C$  ni en  $D$ .

Con ésto ya podemos encontrar contraejemplos a la existencia de matroides orientadas de Delaunay para distancias estrictamente convexas y suaves en dimensión 3. En efecto, en [Icking-K-L-M] (véase también [Le]) se muestran ejemplos de distancias estrictamente convexas y suaves  $d_K$  en  $\mathbb{R}^3$  y de conjuntos  $S$  de cuatro puntos no coplanares para los cuales  $S$  está contenido en un número finito pero mayor que uno de  $d_K$ -esferas. De hecho, Le demuestra que tales conjuntos pueden ser encontrados para cualquier distancia convexa en  $\mathbb{R}^3$  cuya bola unidad no sea elipsoidal.

Por ejemplo, es fácil comprobar que para la distancia  $L_4$  los puntos  $P_1 = (0, 0, 2)$ ,  $P_2 = (0, 0, -2)$ ,  $P_3 = (-1, 2, 0)$  y  $P_4 = (2, -1, 0)$  están en exactamente tres  $L_4$ -esferas distintas: las ecuaciones de un punto  $(x, y, z)$  cuya  $L_4$ -distancia a esos cuatro puntos sea la misma se reducen sin mucha dificultad a la forma

$$z = 0, \quad x = y, \quad 2x^4 + 2^4 = (x + 1)^4 + (x - 2)^4.$$

La última de estas ecuaciones tiene tres soluciones reales  $x_1, x_2$  y  $x_3$ , en los intervalos  $[0, 1]$ ,  $[1, 2]$  y  $[6, 7]$ . Por tanto, los puntos  $(x_1, x_1, 0)$ ,  $(x_2, x_2, 0)$  y  $(x_3, x_3, 0)$  son centros de tres  $L_4$ -esferas que se cortan en  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$ . Además, por argumentos de transversalidad de las superficies definidas por las tres ecuaciones, se demuestra que ésto seguirá ocurriendo para cualquier pequeña perturbación de dichos cuatro puntos (es decir, que la configuración no puede considerarse como una degeneración).

### 3.5.3 Realizabilidad y regularidad de las matroides orientadas y los diagramas de Delaunay

Sea  $d_K$  una distancia estrictamente convexa y suave en el plano. Por el Teorema 3.5.6 sabemos que, para cada nube de puntos  $S$  podemos definir una matroide orientada de Delaunay (extendida o no) respecto a la distancia  $d_K$ . Al igual que con los tipos topológicos de diagramas de Delaunay nos interesa saber si las matroides orientadas que pueden aparecer coinciden con las de la distancia Euclídea. En esta sección vamos a ver que ésto no es así. En particular, veremos que las matroides orientadas pueden no ser ni siquiera realizables. Ésto está relacionado con el hecho de que los diagramas de Delaunay pueden no ser regulares y que, por tanto, las distancias estrictamente convexas y suaves no pueden tener una propiedad del levantamiento análoga a la de la distancia Euclídea.

Por supuesto, si la bola unidad de  $d_K$  es una elipse, las matroides orientadas de Delaunay sí coincidirán con las que produce la distancia Euclídea. Por tanto, estas distancias estarán excluidas de nuestro resultado. También, por razones técnicas, estarán excluidas las distancias no simétricas (aquéllas cuya bola unidad no coincide con su opuesta). La razón de ésto es que en la demostración haremos uso de la Proposición 3.4.9, que sólo concierne a objetos simétricos.

Aunque la configuración de puntos obtenida en el Teorema 3.5.9 es degenerada (contiene dos subconjuntos de cuatro puntos alineados) un subconjunto abierto de sus posibles perturbaciones también produce triangulaciones de Delaunay no regulares y matroides orientadas de Delaunay no realizables. Por tanto, se pueden conseguir ejemplos no degenerados.

**Teorema 3.5.9** *Sea  $d_K$  una distancia estrictamente convexa y suave en el plano Euclídeo  $\mathbb{R}^2$ . Supongamos que la  $d_K$ -bola unidad no es una elipse y que es simétrica.*

Entonces, existe una nube  $S$  de ocho puntos  $P_1, \dots, P_8$  tal que su diagrama de Delaunay  $Del_K(S)$  con respecto a distancia  $d_K$  contiene los ocho triángulos de la Figura 3.21 y tal que los puntos  $P_1, P_2, P_5$  y  $P_6$  están alineados, así como los puntos  $P_3, P_4, P_7$  y  $P_8$ . Por tanto,

- (i) La matroide orientada de Delaunay  $DOM_K(S)$  es no realizable.
- (ii) El diagrama de Delaunay de  $S$  con respecto a  $d_K$  no es una división regular de la envolvente convexa de  $S$ .

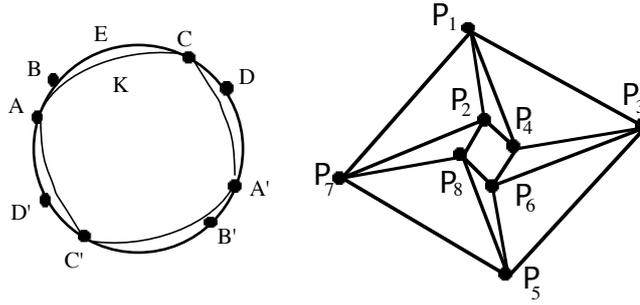


Figura 3.21: Matroide orientada de Delaunay no-realizable.

*Demostración:*

Apliquemos la Proposición 3.4.9 a la  $d_K$ -bola unidd  $K$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que la elipse  $E$  que se obtiene es una circunferencia. Consideremos cuatro pares de puntos opuestos en  $E$  (como en la parte izquierda de la Figura 3.21) tales que  $A, A', C$  y  $C'$  están también en la frontera de  $K$  y  $B, B', D$  y  $D'$  están en el exterior de  $K$ , siendo los segmentos  $[A, B], [C, D], [A', B']$  y  $[C', D']$  de igual longitud. Sea  $S$  el conjunto de ocho puntos de la parte derecha de la Figura, obtenidos como

$$\begin{aligned}
 P_1 &= A, & P_2 &= D', & P_3 &= B', & P_4 &= C', \\
 P_5 &= P_4 + BD', & P_6 &= P_4 + BA, \\
 P_7 &= P_6 + DB = P_2 + A'C', & P_8 &= P_6 + DC = P_2 + A'B'.
 \end{aligned}$$

Por construcción, los puntos  $P_1P_2P_5P_6$  y  $P_3P_4P_7P_8$  están alineados, lo cual implica que  $(0, 0, +, +, 0, 0, -, -)$  y  $(+, +, 0, 0, -, -, 0, 0)$  son covectores de la matroide orientada de Delaunay  $DOM_{D_K}(S)$ . Los puntos  $P_1P_2P_3P_4, P_3P_4P_5P_6, P_5P_6P_7P_8$  y  $P_7P_8P_1P_2$  son cocirculares respecto a la distancia Euclídea pero, respecto a la distancia  $d_K$  su diagrama de Delaunay contiene los ocho triángulos de la Figura. Por ejemplo, los triángulos  $P_1P_2P_4$  y  $P_1P_3P_4$  aparecen porque hay una  $d_K$ -circunferencia que pasa por  $P_1$  y  $P_4$  y tiene a  $P_2$  y  $P_3$  en su exterior. Ésto implica que los siguientes ocho covectores también están en  $DOM_{D_K}(S)$ :

$$\begin{aligned}
 &(0, 0, +, 0, +, +, +, +), & &(0, +, 0, 0, +, +, +, +), \\
 &(+, +, 0, 0, +, 0, +, +), & &(+, +, 0, +, 0, 0, +, +), \\
 &(+, +, +, +, 0, 0, +, 0), & &(+, +, +, +, 0, +, 0, 0), \\
 &(+, 0, +, +, +, +, 0, 0) & \text{ y } &(0, 0, +, +, +, +, 0, +),
 \end{aligned}$$

Vamos a probar que cualquier matroide orientada acíclica de rango (a lo más) cuatro que contenga a esos diez covectores es no realizable.

Si la matroide orientada fuera realizable, existirían ocho puntos  $Q_1, \dots, Q_8$  en  $\mathbb{R}^3$  que la realizarían. Además, las relaciones lineales que conocemos entre los puntos (dadas por los dos primeros covectores) implican que para un cierto sistema de coordenadas los puntos  $Q_1, \dots, Q_8$  son las columnas de la matriz que se da a continuación, donde algunos coeficientes están sin determinar pero los valores de  $x_1, \dots, x_8$  son estrictamente positivos. Los valores de los  $z_i$  pueden ser positivos o negativos. Sus signos en la matriz han sido escogidos por conveniencia.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 & -x_5 & -x_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & -x_7 & -x_8 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & -z_5 & -z_6 & -z_7 & -z_8 \end{pmatrix}$$

De los otros ocho covectores podemos deducir información sobre los determinantes de ciertas cuaternas de los puntos. Recordemos que el determinante  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  de cuatro puntos es el determinante de la matriz  $4 \times 4$  que tiene las tres coordenadas del punto  $P_i$ , con un 1 adicional al final, en la fila  $i$ -ésima. Estos determinantes constituyen el llamado “quirotopo” de la matroide orientada. La información que obtenemos de los covectores es que si un cierto covector es cero en tres puntos  $P_1, P_2$  y  $P_3$  y tiene el mismo signo en dos puntos  $Q_1$  y  $Q_2$ , entonces los determinantes  $(P_1, P_2, P_3, Q_1)$  y  $(P_1, P_2, P_3, Q_2)$  tienen el mismo signo. Ésto es así porque el covector proviene de un plano que contiene a los puntos  $P_1, P_2$  y  $P_3$  y que tiene a  $Q_1$  y  $Q_2$  al mismo lado. Representando por  $sg[ijkl]$  al signo  $(-1, +1$  ó  $0)$  del determinante  $(P_i, P_j, P_k, P_l)$ , de los ocho covectores mencionados podemos deducir que:

$$\begin{aligned} sg[1247] &= sg[1243] = sg[1245] & sg[1342] &= sg[1346] = sg[1347] \\ sg[3461] &= sg[3465] = sg[3467] & sg[3564] &= sg[3568] = sg[3561] \\ sg[5683] &= sg[5687] = sg[5681] & sg[5786] &= sg[5782] = sg[5783] \\ sg[2785] &= sg[2781] = sg[2783] & sg[1278] &= sg[1274] = sg[1275] \end{aligned}$$

En principio, los signos podrían ser cero, en el caso de que los tres puntos que son cero en el covector correspondiente estuvieran alineados. Veamos que ésto no es posible. Si, por ejemplo,  $[1247] = [1243] = [1245]$  fueran cero (es decir, si  $P_1, P_2$  y  $P_4$  estuvieran alineados), entraríamos en contradicción con el covector  $(0, +, 0, 0, +, +, +, +)$  que proviene de un plano que pasa por  $P_1$  y  $P_4$  pero no por  $P_2$ . Por tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los siguientes determinantes son todos estrictamente positivos:

$$\begin{array}{ccc} [1234] & [1274] & [1347] \\ [3456] & [3416] & [3561] \\ [5678] & [5678] & [5783] \\ [7812] & [7812] & [7125] \end{array}$$

De ésto deduciremos las siguientes cuatro afirmaciones, que son mutuamente contradictorias. Ésto terminará la demostración de la parte (i).

- (a)  $x_4 - x_3 < 0 \Rightarrow x_2 - x_1 < 0 \Rightarrow x_8 - x_7 < 0 \Rightarrow x_6 - x_5 < 0 \Rightarrow x_4 - x_3 < 0$ .  
 (b)  $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow x_4 - x_3 > 0 \Rightarrow x_6 - x_5 > 0 \Rightarrow x_8 - x_7 > 0 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$ .  
 (c)  $x_2 - x_1, x_4 - x_3, x_6 - x_5$  y  $x_8 - x_7$  no pueden ser los cuatro estrictamente positivos.  
 (d)  $x_2 - x_1, x_4 - x_3, x_6 - x_5$  y  $x_8 - x_7$  no pueden ser los cuatro estrictamente negativos.

Para la demostración, vamos a introducir la siguiente notación. Llamaremos  $A_{ij}$  a  $x_i z_j - x_j z_i$ . Éstos  $A_{ij}$  verifican que  $A_{ij} = -A_{ji}$  y  $x_i A_{jk} + x_j A_{ki} + x_k A_{ij} = 0$ . Las implicaciones  $x_4 < x_3 \Rightarrow x_2 < x_1$  y  $x_2 > x_1 \Rightarrow x_4 > x_3$  de (a) y (b) se seguirán de la imposibilidad de  $x_4 \leq x_3$  y  $x_2 \geq x_1$ . El resto de (a) y (b) se prueban de manera análoga. Para probar la mencionada imposibilidad usaremos la positividad de los tres determinantes

$$[1234] = (x_4 - x_3)A_{12} - (x_2 - x_1)A_{34} > 0,$$

$$[1274] = (x_7 + x_4)A_{12} + (x_2 - x_1)A_{74} > 0,$$

$$[1347] = x_1(A_{34} - A_{47} - A_{73}) > 0.$$

No podemos tener  $x_2 = x_1$  y  $x_4 = x_3$ , porque ésto contradice a  $(x_4 - x_3)A_{12} - (x_2 - x_1)A_{34} > 0$ .

Si se diera  $x_2 = x_1$  y  $x_4 < x_3$ , ésto implicaría  $(x_4 - x_3)A_{12} > 0$  y  $(x_7 + x_4)A_{12} > 0$ . De aquí, la contradicción  $A_{12} < 0$  y  $A_{12} > 0$ .

Si se diera  $x_2 > x_1$  y  $x_4 = x_3$  entonces  $(x_2 - x_1)A_{34} < 0$ , i.e.  $A_{34} < 0$ . Además  $A_{34} > A_{47} + A_{73}$ . Usando  $x_7 A_{34} + x_3 A_{47} + x_4 A_{73} = 0$  obtenemos que  $x_7 A_{34} = -x_3 A_{47} - x_4 A_{73} = -x_3(A_{47} + A_{73}) > -x_3 A_{34}$ . Ésto implica que  $(x_7 + x_3)A_{34} > 0$ , i.e.  $A_{34} < 0$  que de nuevo da una contradicción.

Si se diera  $x_2 > x_1$  y  $x_4 < x_3$ , entonces  $A_{12}/(x_2 - x_1) < A_{34}/(x_4 - x_3)$  y  $A_{12}/(x_2 - x_1) > -A_{74}/(x_7 + x_4)$ . Por tanto,

$$\frac{-A_{74}}{(x_7 + x_4)} < \frac{A_{12}}{(x_2 - x_1)} < \frac{A_{34}}{(x_4 - x_3)}.$$

Por otra parte,  $x_7 A_{34} + x_3 A_{47} + x_4 A_{73} = 0$  y  $x_4(A_{34} - A_{47} - A_{73}) > 0$  producen  $x_4 A_{34} - x_4 A_{47} + x_7 A_{34} + x_3 A_{47} > 0$ . Ésto se puede reescribir como  $A_{74}(x_4 - x_3) + A_{34}(x_4 + x_7) > 0$  y de aquí

$$\frac{-A_{74}}{(x_4 + x_7)} > \frac{A_{34}}{(x_4 - x_3)}.$$

Si (c) ó (d) no fueran ciertas, la positividad de

$$[1234] = (x_4 - x_3)A_{12} - (x_2 - x_1)A_{34},$$

$$[3456] = (x_4 - x_3)A_{56} + (x_6 - x_5)A_{34},$$

$$[5678] = -(x_8 - x_7)A_{56} + (x_6 - x_5)A_{78},$$

$$[7812] = -(x_8 - x_7)A_{12} - (x_2 - x_1)A_{78}.$$

produce la contradicción

$$\frac{A_{12}}{(x_2 - x_1)} > \frac{A_{34}}{(x_4 - x_3)} > \frac{-A_{56}}{(x_6 - x_5)} > \frac{-A_{78}}{(x_8 - x_7)} > \frac{A_{12}}{(x_2 - x_1)}.$$

El hecho de que el diagrama de Delaunay no es regular podría demostrarse algebraicamente siguiendo exactamente los mismos pasos, pero vamos a esbozar una demostración más geométrica y más corta, similar a la que dimos para el ejemplo de la Figura 3.4. Si el diagrama de Delaunay fuera regular, habría un levantamiento  $\{Q_1, \dots, Q_8\}$  de  $\{P_1, \dots, P_8\}$  cuya envolvente inferior se proyectaría sobre el diagrama. Consideremos el punto  $O$  de intersección de las rectas que pasan por  $P_1P_2P_5P_6$  y por  $P_3P_4P_7P_8$ . Sea  $v$  la línea vertical que pasa por  $O$ . Sean  $A, B, C$  y  $D$  los puntos de intersección de  $v$  con las líneas que pasan, respectivamente, por  $Q_1Q_2, Q_3Q_4, Q_5Q_6$  y  $Q_7Q_8$ . El hecho de que los triángulos  $Q_1Q_2Q_4$  y  $Q_1Q_3Q_4$  estén en la envolvente inferior, implica que  $A$  está por debajo de  $B$  en  $v$ . Los mismos argumentos nos llevan a que  $B$  está debajo de  $C$ ,  $C$  está debajo de  $D$  y  $D$  está debajo de  $A$ . Ésto es una contradicción.  $\square$

El Teorema 3.5.9 (en particular, la no regularidad del diagrama de Delaunay) tiene por consecuencia inmediata la imposibilidad de tener una propiedad del levantamiento para los diagramas de Delaunay producidos por las distancias convexas.