

## Capítulo 2

# Construcción de curvas algebraicas planas reales proyectivas con topología dada

Como hemos visto en el capítulo anterior, las curvas algebraicas (planas, reales, tanto afines como proyectivas) proporcionan un ejemplo fundamental de diagramas. El objeto de este capítulo es estudiar, dado un cierto diagrama  $\mathcal{D}$  en el plano real proyectivo (por ejemplo, a través de un código como los estudiados en el Capítulo 1) la forma de encontrar una curva algebraica  $C$  con su mismo tipo topológico. Diremos en este caso que  $C$  realiza algebraicamente al diagrama  $\mathcal{D}$ . Además queremos que la obtención del polinomio sea lo más algorítmicamente sencilla posible y tener un control sobre la complejidad del polinomio obtenido (en particular, sobre su grado) en función de la complejidad topológica del diagrama.

Este problema está relacionado con dos problemas que han generado un amplio interés en los últimos tiempos en el área de la Geometría Algebraica Real: por una parte el problema de la determinación algorítmica de la topología de una curva algebraica real, ya mencionado en el párrafo 1.4.1 del Capítulo 1 y que se puede considerar inverso del que ahora nos ocupa. Por otra el llamado problema XVI de Hilbert que, entendido de manera amplia, pregunta cuáles son las posibles configuraciones topológicas de curvas proyectivas no singulares de grado dado. Véanse las referencias [Gudkov, Itenberg, Risler, Viro, Wilson] para más información sobre este problema.

En la investigación del Problema XVI de Hilbert hay dos partes metodológicamente diferentes. Por un lado se demuestran ciertas restricciones teóricas (prohibiciones) a la forma en que las componentes de la curva están dispuestos y, por otra, se buscan métodos de construcción para las curvas no prohibidas. Cuando todos los tipos topológicos no prohibidos para un cierto grado han sido construidos el problema estará cerrado. Respecto al método de construcción de la curva, hasta comienzos de los años 80 todas las curvas fueron construidas por métodos de perturbación del tipo de los que veremos en la Sección 2.3. Con estos métodos el problema fue resuelto hasta grado 6 (hasta grado 5 el problema es relativamente sencillo y el grado 6 fue cerrado en los años 60 por Gudkov). En el año 84, Viro [Viro] presentó un nuevo método de construcción, radicalmente diferente y con una gran compo-

nente de Geometría Combinatoria, gracias al cual cerró el problema para grado 7. El grado 8 sigue aún abierto.

Volviendo a la realizabilidad de un diagrama como curva algebraica, lo primero que aparece como obvio es que no todo diagrama puede ser realizado. Debido a que toda semirrama analítica real tiene una prolongación también real, una condición necesaria para la realizabilidad de un diagrama es que todos sus vértices tengan valencia par. Esta condición define un tipo de diagramas al que llamaremos *Eulerianos* en la Sección 2.1 y que tiene otras propiedades interesantes.

El que un diagrama sea Euleriano es condición, además de necesaria, suficiente para que sea realizable. La suficiencia, sin embargo, no se puede calificar de obvia. Por ejemplo, su generalización natural a variedades algebraicas de dimensión superior no es cierta (véase [Bochnak-C-R] o [Akbulut-King]). Hemos de mencionar que las demostraciones clásicas de éste y similares resultados usan aproximación polinómica de funciones  $C^\infty$  y son, por tanto, absolutamente no-constructivas. Nuestros resultados proporcionan una demostración constructiva (y con acotación del grado de la curva algebraica) de este hecho.

Ahora bien, nuestros métodos de construcción, en su estado actual, sólo se adaptan de forma satisfactoria a diagramas con sólo puntos dobles, es decir, a diagramas Eulerianos cuyos puntos singulares son todos de multiplicidad 0 ó 2. (Nota: llamaremos *puntos singulares* de un diagrama Euleriano a aquéllos en los que el diagrama no es localmente liso, es decir, a los vértices de valencia diferente de 2. Llamamos *multiplicidad* de un punto singular a la mitad de su valencia). El caso de puntos de multiplicidad mayor que 2 está aún en fase de estudio y no se incluye en esta memoria. El resultado provisional es que podemos realizar cualquier diagrama *orientable* (i.e. que no corte a una cierta pseudorrecta) con un grado del orden de  $4 \sum m_i + 2k$ , donde  $m_i$  son las multiplicidades de los puntos singulares y  $k$  el número de componentes conexas. Lo que sí veremos es que este grado es del orden del doble del que es necesario, al menos, para algunos ejemplos (ver la Proposición 2.5.1, que se anuncia en esta introducción como Proposición 2.0.2).

La organización de este capítulo es la siguiente:

La Sección 2.1 describe algunas propiedades particulares de los diagramas Eulerianos en el plano proyectivo, los únicos realizables como curvas algebraicas. En particular, se introduce la división en diagramas orientables y no orientables y, para estos últimos, en pares e impares.

Las Secciones 2.2 y 2.3 presentan, respectivamente, las dos técnicas esenciales en las que se basarán nuestras construcciones. La primera es puramente topológico/combinatoria y trata de cómo “desingularizar” un diagrama de forma que después pueda ser “reconstruido por piezas”. La segunda es más algebraica y trata del estudio de cómo cambia la topología de una curva algebraica  $C_f$  cuando modificamos ligeramente sus coeficientes. En particular se estudiarán las perturbaciones del tipo  $f + \varepsilon g$ , que serán las que usaremos en nuestras construcciones. Para terminar la Sección 2.3 se incluye un primer método general de construcción de curvas algebraicas con sólo puntos dobles. Aunque produce peor grado que el que se mostrará en la Sección siguiente, merece la pena incluirlo porque es más sencillo (en particular, sería más fácil de implementar en el ordenador) y porque parte de la construcción se usará de nuevo en segundo método.

La Sección 2.4 presenta nuestros principales resultados de construcción, en los

que se obtiene una curva algebraica que realiza un diagrama con sólo puntos dobles con un grado que es genéricamente óptimo como función del número de puntos dobles y componentes conexas (Teorema 2.4.11).

**Teorema 2.0.1** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano en el plano proyectivo con sólo puntos dobles. Sean  $k$  y  $n$  los números de componentes conexas y puntos dobles de  $\mathcal{D}$ , respectivamente. Entonces  $\mathcal{D}$  tiene el tipo topológico de una cierta curva algebraica de grado menor o igual que  $2n + 2k$ .*

Nuestros resultados de la Sección 2.4 son más precisos que ésto. Para empezar, los diagramas pares sólo pueden ser realizados con grado par y los diagramas impares sólo pueden ser realizados con grado impar (cf. de nuevo la Sección 2.1). Nuestros resultados se enunciarán (y, sobre todo, se demostrarán) por separado para el caso par y el caso impar. En éste último caso el grado necesario queda rebajado a  $2n + 2k - 1$ . En segundo lugar se da más información sobre la curva algebraica que realiza el diagrama. Se demuestra que dicha curva puede ser tomada de la forma  $f + \varepsilon g$ , donde  $\varepsilon$  es un número real (suficientemente pequeño),  $g$  es un producto de rectas y  $f$  un producto de cónicas (y una cúbica, en el caso impar). Las rectas, cónicas y cúbica correspondientes pueden ser obtenidas del diagrama por métodos combinatorios, que tienen que ver con las desingularizaciones de la Sección 2.2. Ésto se ve en los resultados 2.4.3, 2.4.6 y 2.4.9.

En la última Sección veremos, en primer lugar, que el grado obtenido en la construcción anterior no es mejorable, en el sentido de que hay diagramas con  $n$  puntos dobles y  $k$  componentes conexas (para todo  $n$  y todo  $k$ ) que no admiten ser realizados con grado menor. Tales diagramas son relativamente fáciles de encontrar y, además, se pueden generalizar a puntos de multiplicidad superior, obteniéndose (cf la Proposición 2.5.1):

**Proposición 2.0.2** *Sean  $k$ ,  $n$  y  $m_i$ , con  $i = 1, \dots, n$  números enteros tales que  $k > 0$ ,  $n \geq 0$  y  $m_i \geq 2$ . Entonces, existe un cierto diagrama Euleriano  $\mathcal{D}$  en el plano proyectivo con  $k$  componentes conexas y  $n$  puntos singulares de multiplicidades respectivas  $m_1, \dots, m_n$  que no puede ser del mismo tipo topológico que ninguna curva algebraica de grado menor que  $2(\sum(m_i - 1) + k)$ .*

Por supuesto, una gran mayoría de diagramas son realizables con grado menor que  $2n + 2k$ . Los Teoremas de Bezout y de Harnack nos dan cotas, ambas alcanzables, que permiten encontrar diagramas realizables con grado, esencialmente  $\sqrt{2n + 2k}$ . Sin embargo, podemos entender la cota  $2(\sum(m_i - 1) + k)$  como una cota inferior genérica al grado necesario para realizar *todos* los diagramas con  $n$  puntos dobles y  $k$  componentes conexas. En este sentido podemos decir que nuestra construcción de la Sección 2.4 tiene grado genéricamente óptimo.

Por último, de nuevo para el caso de puntos dobles, seremos capaces de caracterizar exactamente qué diagramas necesitan el grado máximo para ser realizados. Ésto supone sólo una pequeña rebaja del grado necesario para realizar el resto de los diagramas, sin ninguna importancia práctica, pero tiene cierta relevancia teórica puesto que, en cierto modo, nos dice que sólo necesitan grado  $2n + 2k$  (ó  $2n + 2k - 1$ ) para ser realizados aquéllos diagramas que, de forma evidente, lo necesitan (como el que aparecerá en la Figura 2.26, página 108). El resultado es el siguiente (cf. 2.5.9).

**Teorema 2.0.3** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano en el plano proyectivo con sólo puntos dobles. Sea  $k$  su número de componentes conexas y  $n$  su número de puntos singulares. Entonces, son equivalentes:*

- (i)  *$\mathcal{D}$  no es topológicamente equivalente a ninguna curva algebraica de grado menor que  $2n + 2k$  si es par ó  $2n + 2k - 1$  si es impar.*
- (ii) *existen dos puntos del plano proyectivo tales que cualquier pseudorrecta que pasa por ellos corta al diagrama al menos  $2n + 2k$  veces ( $2n + 2k - 1$  si es impar), contadas con multiplicidad.*

También en este caso obtenemos información más precisa. El Teorema 2.5.8 nos dice concretamente qué diagramas satisfacen la condición (ii). La expresión “contadas con multiplicidad” hace referencia a que si la pseudorrecta corta al diagrama en un punto doble o en un punto aislado el corte ha de contarse como si fueran dos.

## 2.1 Curvas algebraicas y diagramas Eulerianos en el plano proyectivo

A lo largo de todo el capítulo utilizaremos el término *curva algebraica* para referirnos a una curva algebraica plana proyectiva real entendida como el conjunto de ceros de un cierto polinomio homogéneo  $f \in \mathbb{R}[x, y, z]$  en tres variables y con coeficientes reales. Llamaremos grado de una curva algebraica  $C$  al mínimo grado de un polinomio  $f$  cuyo conjunto de ceros es  $C$ .

Para curvas algebraicas sin puntos aislados (o, más precisamente, cuyos puntos aislados están en la misma componente algebraica que un número infinito de puntos de la curva) el polinomio  $f$  que define la curva está determinado de manera unívoca salvo multiplicación por una constante no nula si le exigimos que no tenga “factores redundantes” (es decir, factores sin ceros reales o cuyos ceros reales ya están contenidos en los de algún otro factor de  $f$ ). Ésto es así porque en este caso el ideal definido por la curva es principal. Para curvas algebraicas con puntos algebraicamente aislados (es decir, puntos aislados no contenidos en ninguna componente algebraica irreducible con un número infinito de puntos) no hay una forma unívoca de elegir el polinomio  $f$ . Sin embargo, la paridad del grado del polinomio sí que está bien definida, si exigimos al polinomio  $f$  que no tenga factores múltiples. Siempre trabajaremos con polinomios sin componentes múltiples.

En muchas ocasiones abusaremos de la notación y daremos nuestros polinomios con sólo dos variables  $x$  e  $y$  y no homogéneas. Ésto significa que hemos especializado la tercera variable  $z$  en el valor 1 y no produce ambigüedad, salvo en el caso en que el polinomio sea un múltiplo de  $z$  (es decir, que la curva algebraica contenga a la recta del infinito). Si ésto ocurriera (de hecho ocurrirá para algunos polinomios en la Sección 2.4) haremos mención explícita de ello. Del mismo modo, también con un cierto abuso, supondremos siempre que tenemos un cierto sistema de coordenadas afín en el plano proyectivo. Ésto significa que podemos decir cosas tales como que una curva (o un diagrama) corta a la recta del infinito (o, para abreviar, “al infinito”) o que una cierta cónica es una circunferencia, o que es una hipérbola.

Como ya hemos mencionado en la introducción, una curva algebraica es siempre un diagrama con valencia par en todos sus vértices. Es bien sabido que, para un

grafo conexo, la propiedad de que todos sus vértices tengan valencia par es condición necesaria y suficiente para que el grafo posea un ciclo Euleriano, es decir, un ciclo que recorre todas sus aristas de forma continua sin pasar dos veces por ninguna de ellas y terminando en el mismo punto donde comenzó. Por esta razón un grafo se dice Euleriano si es conexo y todos sus vértices tienen valencia par. Por conveniencia, nosotros vamos a alterar ligeramente la definición y no pondremos la condición de conexión.

**Definición 2.1.1** Diremos que un cierto diagrama  $\mathcal{D}$  es Euleriano si sus vértices tienen todos valencia par. Llamaremos multiplicidad de cada vértice  $P$  a la mitad de la valencia de  $P$ . Llamaremos puntos singulares de un diagrama Euleriano a los vértices de multiplicidad mayor que uno. Si el diagrama no posee puntos singulares diremos que es regular y si sólo posee puntos singulares de multiplicidad 2 diremos que es un diagrama con sólo puntos dobles. Llamaremos puntos aislados a los vértices de multiplicidad 0.

Es decir, un diagrama Euleriano es aquél para el cual cada una de sus componentes conexas posee un ciclo Euleriano. Nótese que hay una cierta relación entre multiplicidad topológica y multiplicidad algebraica: dada una curva algebraica definida por un polinomio  $f$  y un punto  $P$  de la misma, su multiplicidad algebraica es siempre mayor o igual que su multiplicidad topológica. Los puntos aislados son un poco particulares a éste respecto, puesto que su multiplicidad algebraica es siempre, como poco, igual a dos.

### 2.1.1 Paridad y orientabilidad de diagramas

Por razones técnicas, la demostración de nuestros principales resultados en la Sección 2.4 se hará por separado para distintos grupos de diagramas, dependiendo de su *orientabilidad* y su *paridad*. Este apartado está dedicado a definir estos conceptos.

Consideremos una cierta curva cerrada simple  $l$  en el plano proyectivo, homeomorfa a una circunferencia. Entonces,  $l$  puede no dividir al plano proyectivo o dividirlo en dos partes. En el primer caso el complementario  $\mathbb{R}P^2 \setminus l$  de  $l$  es homeomorfo al plano afín y diremos que  $l$  es una *pseudorrecta*. En el segundo, una de las dos componentes conexas de  $\mathbb{R}P^2 \setminus l$  es homeomorfa al plano afín y la otra a una banda de Möbius sin su borde. Diremos que en este caso  $l$  es un *óvalo* y llamaremos parte interior a la componente homeomorfa al plano afín y parte exterior a la otra. También es bien sabido que una pseudorrecta es isotópica a una recta y un óvalo lo es a una circunferencia.

Como ya hemos mencionado, la paridad del grado de los posibles polinomios que definen una cierta curva algebraica está bien definida (aunque no el grado en sí) sin más que exigir que el polinomio no tenga factores múltiples. En realidad, esta paridad es un invariante topológico del diagrama subyacente a la curva, dado por el número de cortes con una pseudorrecta transversal al diagrama. Dos diagramas se dirán *transversales*, si el número de puntos de intersección es finito y en un pequeño entorno de cada uno de ellos cada una de las curvas separa a la otra. En cortes de dos diagramas con puntos singulares, para que un corte sea transversal se exigirá, además, que se produzca en un punto que es no-singular para ambos.

**Definición 2.1.2** Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano en el plano proyectivo. Diremos que  $\mathcal{D}$  es par si cualquier pseudorrecta transversal a  $\mathcal{D}$  lo corta en un número par de puntos y que es impar si cualquier pseudorrecta transversal a  $\mathcal{D}$  lo corta en un número impar de puntos.

Por ejemplo, los óvalos son pares y las pseudorrectas son impares. En diagramas no conexos, los diagramas pares tienen todas sus componentes pares y los diagramas impares tienen una componente impar y el resto pares.

Para que la definición de paridad tenga sentido es necesario probar que la paridad del número de cortes con una pseudorrecta transversal es independiente de la elección de ésta, lo cual se hace en la Proposición 2.1.4. Además, la Proposición da otras caracterizaciones equivalentes de los diagramas pares. Obsérvese también que de la definición se deduce fácilmente que una curva algebraica, entendida como diagrama, es par si y sólo si el polinomio que la define es de grado par (basta considerar como pseudorrecta transversal una recta en posición general).

**Lema 2.1.3** Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano en el plano proyectivo y sea  $C$  un óvalo que lo corta transversalmente. Entonces,  $C$  y  $\mathcal{D}$  tienen un número par de puntos de corte.

*Demostración:* Un óvalo es isotópico a una pequeña circunferencia situada completamente en una de las caras del diagrama y que, por tanto, no lo corta. Además, la isotopía puede hacerse en un número finito de pasos en los cuales el único cambio, a efectos topológicos, es que una parte del óvalo atraviesa un cierto vértice o una arista (como en la Figura 2.1). Cualquiera de los dos procesos cambia el número de cortes del óvalo con el diagrama en un número par, lo cual demuestra el Lema.  $\square$

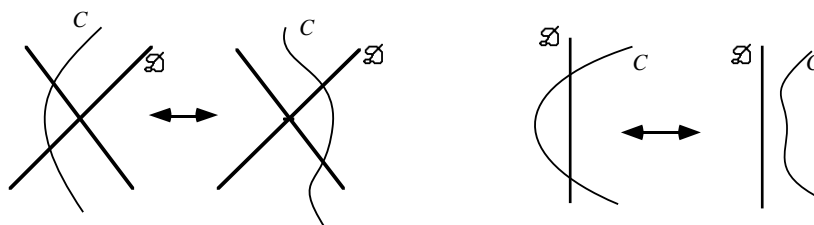


Figura 2.1: El óvalo atraviesa una arista o un vértice de  $\mathcal{D}$ .

**Proposición 2.1.4** Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano en el plano proyectivo. Entonces, son equivalentes:

- (i) Existe una cierta pseudorrecta de  $\mathbb{R}P^2$  y transversal a  $\mathcal{D}$  que lo corta en un número par de puntos.
- (ii) Cualquier camino cerrado (en particular, cualquier pseudorrecta) de  $\mathbb{R}P^2$  y transversal a  $\mathcal{D}$  lo corta en un número par de puntos.
- (iii) Las caras de  $\mathcal{D}$  se pueden dividir en dos clases de forma que dos caras que comparten una arista están en distinta clase. Podemos decir que el diagrama es “coloreable” con dos colores o que podemos “ajedrezarlo”.

(iv) El pseudografo dual de  $\mathcal{D}$  es bipartito. (El pseudografo dual se construye tomando como vértices las caras del diagrama y uniéndolo dos de ellos por cada arista que las dos caras compartan. Siempre existe, es único y se puede sumergir en la misma superficie que el diagrama, produciendo un “diagrama dual”. Sin embargo, su inmersión es única si y solo si el diagrama es celular).

*Demostración:*

La equivalencia entre (iii) y (iv) es inmediata (en realidad, (iv) es una reescritura de (iii) en términos del pseudografo dual). También son obvias las implicaciones (iii)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (i).

Para demostrar (i)  $\Rightarrow$  (ii), supongamos en primer lugar que el camino cerrado  $c$  a considerar no se corta a sí mismo. Entonces,  $c$  es una pseudorrecta o un óvalo. El Lema anterior resuelve el caso de un óvalo y el de una pseudorrecta lo podemos resolver con el mismo argumento: sea  $l$  una pseudorrecta que corte a  $\mathcal{D}$  en un número par de puntos, siendo todos los cortes de  $l$  y  $c$  con  $\mathcal{D}$  transversales. Igual que en la demostración del Lema existe una isotopía que transforma  $c$  en  $l$  por medio de un número finito de pasos elementales en los cuales no cambia la paridad del número de cortes, lo cual termina la demostración. Si el camino  $c$  se corta a sí mismo, sabemos al menos que no lo hace en puntos de  $\mathcal{D}$  (si no no sería transversal). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $c$  sólo se corta a sí mismo en un número finito de puntos, perturbándolo ligeramente, si es necesario, fuera de un cierto entorno de  $\mathcal{D}$ . Una vez hecho esto, podemos “desingularizar”  $c$ , lo cual lo convierte en un número finito de caminos cerrados que no se cortan a sí mismos. Véase el comienzo de la Sección 2.2 para una explicación de lo que entendemos por desingularización. La desingularización se hace afectando sólo a un cierto entorno de cada punto de autointersección de  $c$  y, por tanto, el número de cortes de  $c$  con  $\mathcal{D}$  es el mismo que el de cortes de  $\mathcal{D}$  con todos los caminos cerrados que resultan de la desingularización, que es par.

Para demostrar (ii)  $\Rightarrow$  (iii) elijamos una cierta cara  $F_0$  de  $\mathcal{D}$  a la que tomaremos como base y digamos que una cierta cara  $F$  de  $\mathcal{D}$  está en el mismo grupo que  $F_0$  si y solo si un camino transversal que vaya de  $F_0$  a  $F$  corta a  $\mathcal{D}$  en un número par de puntos. La paridad del número de cortes es independiente del camino elegido gracias al Lema y a la propiedad (ii), ya que dados dos caminos  $c_1$  y  $c_2$  que vayan de  $F_0$  a  $F$  la composición  $c_1 c_2^{-1}$  es un camino cerrado. Por tanto, la 2-coloración de las caras está bien definida. Es obvio que verifica la propiedad (iii).  $\square$

Aparte de la paridad, otra distinción esencial entre un óvalo y una pseudorrecta es que el óvalo posee una cara que es no-orientable o, equivalentemente, que posee un entorno orientable. A los diagramas que posean ésta propiedad los llamaremos *orientables*.

**Definición 2.1.5** Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano en el plano proyectivo. Diremos que  $\mathcal{D}$  es orientable si posee un entorno orientable.

**Lema 2.1.6** Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano en el plano proyectivo. Son equivalentes:

- (i) El diagrama posee un cierto entorno orientable.
- (ii) El diagrama posee una cierta cara no-orientable.

(iii) El diagrama no contiene ninguna pseudorrecta.

(iv) Existe una pseudorrecta que no corta al diagrama.

*Demostración:* La demostración se basa en un sólo hecho fundamental: que un abierto conexo del plano proyectivo es orientable si y sólo si no contiene ninguna pseudorrecta, y que en este caso, además, es una celda. En particular, ésto demuestra (ii)  $\Leftrightarrow$  (iv). Para las demás implicaciones:

(i)  $\Leftrightarrow$  (iv) Si existe una pseudorrecta  $l$  que no corta al diagrama  $\mathcal{D}$ , entonces  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \setminus l$  es un entorno orientable del mismo (el complementario de una pseudorrecta es homeomorfo al complementario de una recta, i.e., al plano afín). Recíprocamente, si  $\mathcal{D}$  posee un entorno  $U$  orientable, que podemos suponer abierto,  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \setminus U$  es un compacto no orientable y, por tanto, contiene una pseudorrecta.

(i)  $\Leftrightarrow$  (iii) Si el diagrama contiene una pseudorrecta, entonces no puede tener un entorno orientable. Si el diagrama no contiene ninguna pseudorrecta, entonces no hay ninguna obstrucción a que una orientación local en uno de sus puntos se propague a un cierto entorno del diagrama.  $\square$

## 2.2 Desingularización de diagramas Eulerianos

Dado un cierto diagrama Euleriano  $\mathcal{D}$  y uno de sus puntos singulares  $P$ , de multiplicidad  $m$ , una *desingularización de  $\mathcal{D}$  en  $P$*  consistirá en tomar un pequeño entorno abierto  $U$  de  $P$  y sustituir  $\mathcal{D} \cap U$  por la unión disjunta de  $m$  segmentos, a las que llamaremos ‘ramas’. Ésta operación aparece en [G.Corbalán] y [G.C.-Santos] con el nombre de ‘flip’. Es posible establecer una correspondencia biyectiva entre las maneras posibles de desingularizar un punto de multiplicidad  $m$  y las formas de distribuir paréntesis en una expresión de longitud  $m + 1$ , así que el número de diferentes desingularizaciones posibles para un vértice de multiplicidad  $m$  es el bien conocido número de Catalán [Aigner].

$$C_{m+1} = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}$$

Siempre que hagamos una desingularización de un punto singular en un diagrama, marcaremos el lugar donde se ha hecho la desingularización con lo que llamaremos *enlaces*. En el caso más sencillo de un punto de multiplicidad 2 el enlace será simplemente una línea que une las dos ramas obtenidas en el entorno  $U$  de  $P$  después de la singularización. En el caso más general, el enlace será un árbol con un vértice en cada una de las  $m + 1$  caras obtenidas en  $U$  por la desingularización, de forma que cada arista del árbol corte a una de las ramas. En otras palabras, el enlace no será otra cosa que el grafo dual de  $\mathcal{D}_P \cap U$ . Para ser consecuentes con la definición dada para multiplicidad 2, las “hojas” de dicho árbol deben ser “recortadas” hasta su punto de intersección con el diagrama.

En algunas ocasiones nos interesará no desingularizar el punto  $P$  totalmente, sino sólo separar entre sí grupos de aristas que inciden en él, manteniendo cada grupo unido a un punto singular. Llamaremos a ésto una *desingularización parcial* de  $\mathcal{D}$  en el punto  $P$ . En la Figura 2.2 se muestran dos ejemplos de desingularización. En ella y en todas las Figuras de este capítulo los enlaces de una desingularización



se representarán con trazo gris. La única condición que exigiremos a una desingularización parcial es que todos los grupos de aristas que permanecen unidos consten de un número par de ellas. Ésto nos asegura que el diagrama resultante sigue siendo Euleriano.

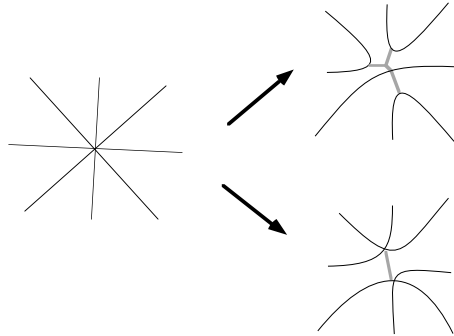


Figura 2.2: Desingularización total y parcial de un punto  $P$ .

Cuando trabajemos con desingularizaciones de diagramas usaremos normalmente la siguiente notación y nomenclatura. Llamaremos *núcleo de la desingularización* (y denotaremos  $\mathcal{D}^0$ ) al diagrama resultante de la misma, sin los enlaces correspondientes, y *esquema de la desingularización* (denotado  $\mathcal{D}^*$ ) a la unión del diagrama  $\mathcal{D}^0$  con los enlaces que marcan la desingularización. Normalmente, tanto  $\mathcal{D}^*$  como  $\mathcal{D}^0$  serán considerados módulo equivalencia topológica.

El núcleo  $\mathcal{D}^0$  de una desingularización total en todos los vértices de un cierto diagrama euleriano  $\mathcal{D}$  es un diagrama regular cuyas componentes conexas serán, por tanto, óvalos, pseudorrectas o puntos aislados. Un diagrama en estas condiciones es fácil de realizar por una curva algebraica (como producto de círculos, rectas y círculos degenerados en un punto). Éste será nuestro punto de partida para la realización algebraica de diagramas. Si queremos, después de realizar algebraicamente el núcleo desingularizado  $\mathcal{D}^0$ , ser capaces de obtener a partir de él una curva que realice al diagrama  $\mathcal{D}$  nos será necesario conocer qué partes de  $\mathcal{D}^0$  provienen de cada punto singular de  $\mathcal{D}$ , esto es, conocer los enlaces de la desingularización. Nuestra técnica de construcción de una curva algebraica que realice a un cierto diagrama Euleriano  $\mathcal{D}$  tendrá los siguientes pasos:

- En primer lugar obtendremos de forma combinatoria un esquema de desingularización  $\mathcal{D}^*$  de  $\mathcal{D}$ . Eligiendo de forma adecuada el esquema de desingularización, tanto las componentes conexas regulares como los enlaces se podrán colocar en una disposición geométrica sencilla, sin alterar su tipo topológico (como en la Figura 2.3).
- Gracias a esta disposición sencilla nos será fácil realizar el núcleo  $\mathcal{D}^0$  con una curva algebraica  $C_0$  de polinomio  $f_0$  e insertar curvas algebraicas  $C_1, \dots, C_n$  de polinomios  $f_1, \dots, f_n$  a lo largo de los enlaces, de forma que una perturbación adecuada del producto  $f_0 \cdots f_n$  produzca una curva con el tipo topológico del diagrama  $\mathcal{D}$ . Véase la Figura 2.4.

En la Sección 2.3 estudiaremos las técnicas de perturbación de curvas algebraicas que posibilitarán el último paso. En ésta sección vamos a estudiar dos maneras

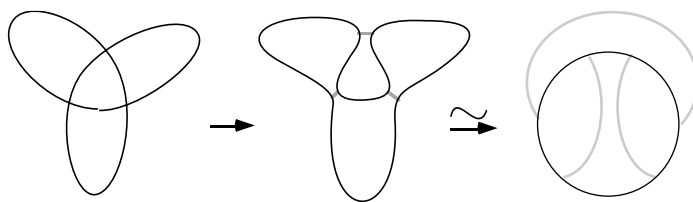


Figura 2.3: Obtención de un esquema de desingularización.

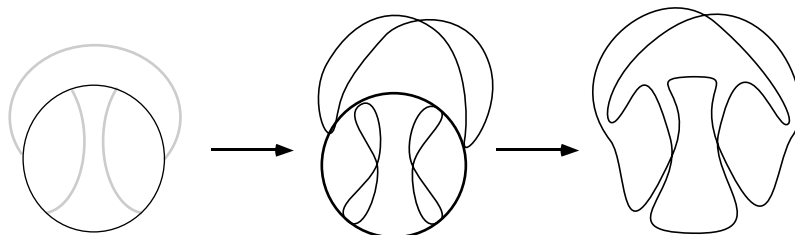


Figura 2.4: Inserción y perturbación de curvas algebraicas en el esquema de desingularización.

de obtener desingularizaciones que nos serán útiles. La primera se basará en la utilización de *ciclos Eulerianos* y la segunda en lo que llamaremos *funciones de profundidad*.

### 2.2.1 Desingularización por ciclos Eulerianos

Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano y conexo. Entonces, como sabemos,  $\mathcal{D}$  posee un ciclo Euleriano. Sea  $E = (v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_k v_1)$  un ciclo Euleriano de  $\mathcal{D}$ , donde  $e_i$  y  $v_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) son los vértices y aristas de  $\mathcal{D}$ , en el orden en que aparecen en el ciclo. Sean  $(e_{i-1}, e_i)$  y  $(e_{j-1}, e_j)$  ( $i, j \in \{1, \dots, k\}$ ) dos pares de aristas consecutivas del ciclo que atraviesan un mismo vértice  $v_i = v_j$  (donde  $e_0$  se toma como  $e_k$ , si  $i$  o  $j$  es igual a 1). Diremos que los pares de aristas consituyen una *autointersección propiamente dicha* del ciclo  $E$  (o que *se cortan propiamente*) si  $e_{i-1}$  y  $e_i$  separan a las aristas  $e_{j-1}$  y  $e_j$  en el orden cíclico de las aristas alrededor del vértice  $v_i$ . Si el ciclo Euleriano no posee autointersecciones propiamente dichas, diremos que no se corta a sí mismo.

Por ejemplo, en el diagrama de la parte (a) de la Figura 2.5 el ciclo Euleriano  $AaBcCbAdBeCf$  no se corta propiamente (parte (b) de la Figura). En cambio el ciclo  $AbCcBaAdBeCf$  sí se corta propiamente, puesto que los pares de aristas  $(f, b)$  y  $(a, d)$ , consecutivas en el ciclo y con vértice común  $A$ , se separan entre sí. Es claro que un ciclo Euleriano que no se corta a sí mismo induce una desingularización del diagrama  $\mathcal{D}$  con núcleo conexo y en la cual las ramas que quedan unidas entre sí en cada punto desingularizado son precisamente aquéllas que corresponden a aristas consecutivas del ciclo, como se ve en la parte (b) de la Figura 2.5 para el mencionado ciclo Euleriano  $AaBcCbAdBeCf$ , que no se corta a sí mismo.

**Lema 2.2.1** *Todo diagrama Euleriano conexo posee un ciclo Euleriano que no se corta propiamente a sí mismo.*

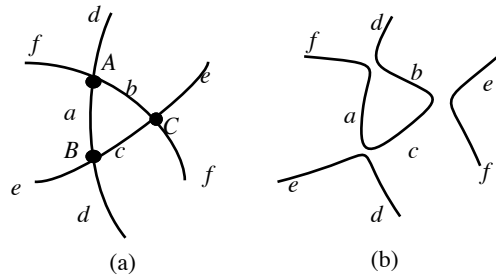


Figura 2.5: Un ciclo Euleriano que no se corta propiamente.

*Demostración:* Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama conexo Euleriano. Demostraremos que para todo ciclo Euleriano que se corta a sí mismo existe otro con un número menor de autointersecciones propias, lo cual implica el enunciado.

Sea  $E = (v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_k v_1)$  un ciclo Euleriano que se corta a sí mismo y sean  $(e_{i-1}, e_i)$  y  $(e_{j-1}, e_j)$  ( $i, j \in \{1, \dots, k\}$ ) dos pares de aristas que constituyen una autointersección propia en un vértice  $v$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $i = 1$  y reescribamos el ciclo como  $E = (v e_1 \delta e_{j-1} v e_j \gamma e_k v)$ , donde  $\delta = (v_2 e_2 \dots v_{j-1})$  y  $\gamma = (v_{j+1} e_{j+1} \dots v_k)$ . Entonces el ciclo  $E' = (v e_{j-1} \delta^{-1} e_1 v e_j \gamma e_k v)$  posee menos autointersecciones propiamente dichas que  $E$ , por las siguientes razones:

- El corte propiamente dicho  $(e_k, e_1)$  y  $(e_{j-1}, e_j)$  desaparece.
- El cambio de  $E$  a  $E'$  no crea ni destruye cortes propiamente dichos que no se produzcan en el vértice  $v$ .
- Para todo par de aristas  $(e_{l-1}, e_l)$  de  $E'$  que atraviesa el vértice  $v$ , diferente de los pares  $(e_k, e_{j-1})$  y  $(e_1, e_j)$ , si el par  $(e_{l-1}, e_l)$  corta propiamente a uno (respectivamente a ambos) de los pares  $(e_k, e_{j-1})$  y  $(e_1, e_j)$ , entonces el par  $(e_{l-1}, e_l)$  (o  $(e_l, e_{l-1})$ ) de  $E$  cortaba a uno (respectivamente a ambos) de los pares  $(e_k, e_1)$  y  $(e_{j-1}, e_j)$ . El recíproco a esto no es cierto. Por tanto, en el cambio de  $E$  a  $E'$  puede desaparecer más de una autointersección propia.  $\square$

Sea entonces  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano conexo y sea  $\mathcal{D}^*$  una desingularización total de  $\mathcal{D}$  obtenida por medio de un ciclo Euleriano que no se corta propiamente. Es claro que, en estas condiciones, el núcleo  $\mathcal{D}^0$  de la desingularización es conexo y no posee puntos singulares. Por tanto,  $\mathcal{D}^0$  es una pseudorrecta o un óvalo. Supongamos además que todos los puntos singulares de  $\mathcal{D}$  eran dobles. Entonces, los enlaces del esquema de desingularización son, simplemente, curvas que unen dos puntos diferentes de  $\mathcal{D}^0$  sin cortarse entre sí. La siguiente Proposición nos dice que el esquema de desingularización  $\mathcal{D}^*$  puede disponerse, sin cambiar su tipo topológico, en una cierta manera que llamaremos *estándar*. En la figura 2.7 se ven dos ejemplos de esquemas de desingularización de diagramas (respectivamente par e impar) en su forma estándar. La definición del tipo topológico de un esquema de desingularización es la que cabe esperar. Dos esquemas  $\mathcal{D}_1^*$  y  $\mathcal{D}_2^*$  tienen el mismo *tipo topológico* si hay un homeomorfismo global del plano proyectivo en sí mismo que envía el uno sobre el otro, enviando enlaces a enlaces y núcleo a núcleo.

**Proposición 2.2.2** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano y conexo con sólo puntos dobles. Entonces, cualquier esquema de desingularización de  $\mathcal{D}$  con núcleo conexo tiene el mismo tipo topológico que un cierto esquema  $\mathcal{D}^*$  (al que llamaremos estándar) cuyo núcleo  $\mathcal{D}^0$  es la recta  $\{y = 0\}$  o la circunferencia unidad (dependiendo de la paridad de  $\mathcal{D}$ ) y tal que:*

- (i) *si  $\mathcal{D}$  es par, cada enlace de  $\mathcal{D}^*$  es o bien un segmento de recta que une dos puntos opuestos de la circunferencia unidad a través del infinito o bien un arco de circunferencia con sus dos extremos en la circunferencia unidad y que incide perpendicularmente sobre ella (ya sea por el interior o por el exterior).*
- (ii) *si  $\mathcal{D}$  es impar, cada enlace de  $\mathcal{D}^*$  es o bien una semicircunferencia o un arco de una hipérbola simétrica respecto a a recta  $\{y = 0\}$  y que une dos puntos de ella.*

*Demostración:*

Claramente el proceso de desingularización no afecta a la paridad del diagrama, puesto que se puede hacer de forma que no afecte a la intersección del diagrama con una cierta pseudorrecta. Por tanto, el diagrama desingularizado  $\mathcal{D}^0$  resultante (el núcleo del esquema de desingularización) será un óvalo si el diagrama  $\mathcal{D}$  era par y una pseudorrecta si  $\mathcal{D}$  era impar. Esto implica que un cierto homeomorfismo global del plano proyectivo lo transforma en la circunferencia unidad o en la recta  $\{y = 0\}$ , respectivamente.

En segundo lugar, es fácil ver que otro homeomorfismo global del plano proyectivo puede mover los enlaces de forma que cada uno de ellos corte a la recta del infinito a lo sumo una vez. En efecto, supongamos sin pérdida de generalidad que todos los enlaces cortan al infinito solo de manera transversal y que, en total, tienen un número de cortes con la línea del infinito mínimo entre todos los posibles para esquemas de desingularización con el mismo tipo topológico que  $\mathcal{D}^*$ . En estas condiciones, si alguno de los enlaces atravesara a la recta del infinito en dos puntos diferentes  $a$  y  $b$ , una cierta isotopía de  $\mathbb{R}P^2$  puede hacer que el arco  $ab$  del enlace atravesase por completo la recta del infinito, lo cual hará decrecer el número de cortes. Ésto contradice la hipótesis.

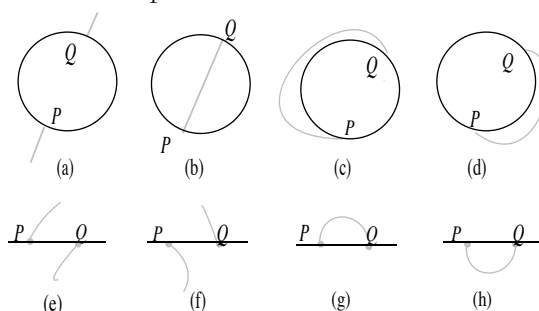


Figura 2.6: Posibles disposiciones de un enlace “estándar”.

En estas condiciones, dados dos puntos  $P$  y  $Q$  de la circunferencia unidad (en el caso par) o de la recta  $\{y = 0\}$  (en el caso impar), sólo hay cuatro posibles disposiciones, salvo equivalencia topológica, para el enlace que los une. Estas cuatro posibilidades se muestran en la parte superior de la Figura 2.6 para el caso par y en la inferior para el caso impar.

Veamos, por separado para el caso par y el impar, cómo mover los enlaces de forma que estén como se pide en el enunciado.

En el caso par, en primer lugar consigamos que cada par de puntos unido por un enlace a través del infinito esté formado por puntos opuestos de la circunferencia (moviendo algunos otros puntos y enlaces si es necesario). Después, sustituyamos cada uno de los enlaces restantes por el correspondiente arco de circunferencia o segmento perpendicular al círculo unidad. Estos arcos o segmentos están unívocamente determinados por sus dos extremos y la sustitución de los enlaces originales por ellos no cambia el tipo topológico. Además, automáticamente se tendrá que ningún par de enlaces se cortan entre sí. Véase un ejemplo en la Figura 2.7[a].

Una pequeña observación: si no hay ningún enlace a través del infinito posiblemente sea necesario mover los puntos extremos de los enlaces para que en los que se hacen por el exterior de la circunferencia, el nuevo enlace se corresponda de hecho con el que queremos, que puede ser o bien el (c) o el (d) de la Figura 2.6. Si hay algún enlace por el infinito esta precaución es innecesaria. Sólo uno de los dos tipos será compatible con el hecho de que los enlaces no se cortan unos a otros.

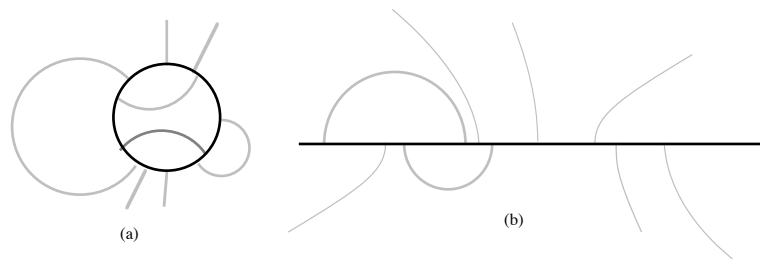


Figura 2.7: Esquemas de desingularización por ciclo Euleriano en su forma estándar.

En el caso impar, primero sustituiremos los enlaces de los tipos (g) y (h) por semicircunferencias y luego cada uno de los de los tipos (e) y (f) por arcos de hipérbola, de uno en uno y comenzando por los más interiores. Eligiendo las rectas asintóticas de estos enlaces cada vez más alejadas de la horizontal conseguiremos que no se corten entre sí ni a ninguno de los enlaces semicirculares que colocamos primero (como en la Figura 2.7(b)).  $\square$

### 2.2.2 Desingularización por funciones de profundidad

El segundo método de desingularización de diagramas, que será el que finalmente nos permita obtener realizaciones con grado genéricamente óptimo de diagramas con sólo puntos dobles, está basado en la idea de *profundidad* de las caras de un diagrama. Ésta idea será una generalización de lo siguiente: si  $\mathcal{D}$  es un diagrama Euleriano y orientable, podemos asignar a su única cara no orientable  $F_0$  profundidad 0 y a cualquier otra cara  $F$  profundidad igual al mínimo número de veces que hay que atravesar el diagrama para llegar de  $F_0$  a  $F$  (véase la Figura 2.8).

Vamos a generalizar esta noción de profundidad de la forma siguiente.

**Definición 2.2.3** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano y par en el plano proyectivo. Una función de profundidad sobre  $\mathcal{D}$  será la asignación de un entero no negativo  $p_F$  a cada cara  $F$  de  $\mathcal{D}$  (al que llamaremos la profundidad de  $F$ ) con la propiedad*

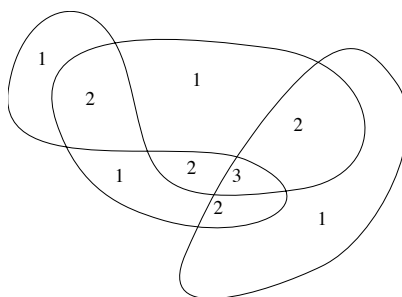


Figura 2.8: Profundidad en un diagrama orientable.

de que dos caras  $F_1$  y  $F_2$  que inciden en una arista común tengan profundidades consecutivas.

Es claro que una función de profundidad divide a las caras del diagrama  $\mathcal{D}$  en dos clases de equivalencia (de profundidades par e impar) que coinciden con las dos clases de equivalencia en la 2-coloración que aparece en el Lema 2.1.4. Es por esta razón que la noción de profundidad solo va a poder ser aplicada directamente a los diagramas pares. Para la construcción de diagramas impares en la Sección 2.4 utilizaremos también la idea de profundidad pero de una manera un poco particular.

Recíprocamente, para todo diagrama par existe una función de profundidad “trivial” que asigna profundidad 0 a las caras de un color y 1 a las del otro color según la 2-coloración mencionada. Otra forma un poco más general de conseguir funciones de profundidad es asignar profundidad 0 a un cierto subconjunto de las caras del diagrama de un color y “extender” la función de profundidad de forma que exprese el mínimo número de cortes con el diagrama necesarios para llegar a una cara de profundidad 0.

Nos interesará ahora estudiar desingularizaciones de diagramas pares que sean compatibles con una función de profundidad dada.

**Definición 2.2.4** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama par y Euleriano en el plano proyectivo, cuyas caras están dotadas de una cierta función de profundidad. Consideremos una desingularización total de  $\mathcal{D}$  con esquema de desingularización  $\mathcal{D}^*$  y núcleo  $\mathcal{D}^0$ . Diremos que la desingularización realizada es compatible con la función de profundidad si las caras del diagrama que se unen en cada desingularización tienen asignada la misma profundidad.*

Vamos a ver esta definición desde otro punto de vista. Las caras diferentes de  $\mathcal{D}$  que pasan a quedar unidas en el diagrama desingularizado  $\mathcal{D}^0$ , siguen estando separadas en el esquema de desingularización por su correspondiente enlace. Ésto significa que las caras del diagrama original  $\mathcal{D}$  están en correspondencia biunívoca con las del esquema de desingularización  $\mathcal{D}^*$ , considerado como un diagrama del cual forman parte los enlaces. Por otra parte, las caras de  $\mathcal{D}^*$  que están únicamente separadas por enlaces se corresponden con la misma cara en el diagrama desingularizado  $\mathcal{D}^0$ . Por tanto, decir que la desingularización es compatible con la función de profundidad definida en  $\mathcal{D}$  es tanto como decir que las caras de  $\mathcal{D}^*$  que están únicamente separadas por enlaces tienen la misma profundidad asignada en  $\mathcal{D}$  o que la función de profundidad de  $\mathcal{D}$  se hereda en  $\mathcal{D}^0$  de forma coherente.

La Figura 2.9 muestra una desingularización del diagrama de la Figura 2.8 compatible con su función de profundidad. La figura nos sugiere ya el hecho de que un esquema de desingularización compatible con una función de profundidad puede colocarse de forma que los óvalos de su núcleo sean elipses y sus enlaces sean segmentos de recta. Este hecho no va a ser cierto para cualquier diagrama y cualquier función de profundidad, pero conseguir desingularizaciones para las cuales sí lo sea será fundamental para nuestros propósitos.

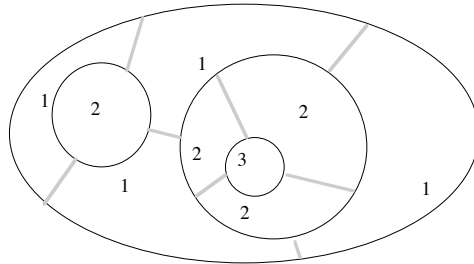


Figura 2.9: Una desingularización compatible con la función de profundidad de la Figura 2.8.

**Proposición 2.2.5** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano par con una cierta función de profundidad asignada a sus caras. Entonces, existe una desingularización total  $\mathcal{D}^0$  de  $\mathcal{D}$  compatible con la función de profundidad.*

*Demostración:* En general, la forma de obtener la desingularización compatible no es única. Mostraremos aquí una forma particular de hacerlo, comenzando por las caras más profundas.

Es claro que nuestro problema es local, en el sentido de que afecta a la desingularización de cada vértice por separado. Podemos suponer, por tanto, que únicamente queremos desingularizar un cierto vértice  $V$ . Sea  $p$  la máxima profundidad de las caras que inciden en  $V$  y hágase una desingularización parcial de  $V$  uniendo entre sí las caras de profundidad  $p$ . El resultado es que el vértice  $V$  da lugar a varios vértices  $V_1, \dots$  en cada uno de los cuales incide una sola cara de profundidad  $p$ . Es importante observar que cada uno de los vértices tiene valencia par (es decir, el diagrama sigue siendo Euleriano) y que la función de profundidad sigue estando bien definida.

Una vez hecho ésto, desingularizaremos cada nuevo vértice uniendo las caras de profundidad  $p - 1$ . Ésto da lugar a algunas ramas no singulares que separan caras de profundidad  $p$  y  $p + 1$ , y a nuevos vértices  $V'_1, \dots$  que siguen siendo de valencia par y tales que la máxima profundidad a su alrededor es  $p - 1$ . Recursivamente desingularizaremos dichos vértices uniéndolos las caras de profundidad  $p - 2$ .  $\square$

## 2.3 El método de perturbar ligeramente una curva singular

Cuando uno quiere encontrar una curva algebraica con unas ciertas propiedades topológicas y está interesado en mantener un control sobre el grado de la curva, el

método más utilizado es el de buscar otra curva “fácil” de construir (por ejemplo, un producto de cónicas u otras curvas sencillas) y después perturbarla ligeramente (cambiar ligeramente los coeficientes del polinomio que la define) de forma que (a) los únicos cambios en su topología se produzcan en los lugares donde la curva original posea un punto singular y (b) dichos cambios conduzcan a la curva que se desea obtener. Éste método, también llamado “de variación continua de los coeficientes”, es el que utilizó, por ejemplo, Harnack [Harnack] para demostrar que su cota sobre el número de componentes conexas de una curva algebraica era alcanzada para cualquier grado y ha sido utilizado también profusamente en la investigación del llamado Problema XVI de Hilbert, ya mencionado en la introducción de este Capítulo.

### 2.3.1 Disipación de algunos puntos singulares

Para describir el método de perturbación de curvas, comencemos por algunas definiciones.

**Definición 2.3.1** Sean  $f$  y  $g$  dos polinomios que definen sendas curvas algebraicas (reales planas proyectivas)  $C_f$  y  $C_g$  del mismo grado. Una perturbación de  $f$  por  $g$  será un polinomio de la forma  $f + \varepsilon g$ , con  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ . Diremos que una propiedad es cierta para pequeñas perturbaciones de  $f$  por  $g$  si existe un  $\varepsilon_0$  tal que la propiedad es cierta para cualquier perturbación de  $f$  por  $g$  con  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ . En ocasiones, por abuso del lenguaje, diremos que la curva algebraica definida por  $f + \varepsilon g$  es una perturbación de la curva  $C_f$  por la curva  $C_g$ .

Es bien sabido (véase, por ejemplo, [Gudkov] o [Viro]) que la topología de una curva  $C_\varepsilon$  obtenida por pequeña perturbación de  $C$  coincide con la de  $C$  fuera de un cierto entorno de cada punto singular de  $C$ . Los cambios que se producen en el entorno del punto singular se conocen como *disipación* del mismo y las posibles formas en que un punto singular puede disiparse dependen del tipo de punto singular, pero son un número finito para cada tipo. Aquí la palabra “perturbación” tiene un significado más amplio que el de nuestras perturbaciones de la forma  $f + \varepsilon g$ . Una perturbación es, simplemente, una curva definida por un polinomio muy cercano al polinomio  $f$  que define a la curva  $C$ , en la topología natural del espacio de polinomios de un cierto grado.

Vamos a ver las posibles disipaciones de algunos puntos singulares para perturbaciones de la forma  $f + \varepsilon g$ . En la discusión aparecerá un invariante de un punto singular que Gudkov [Gudkov] llama su “clase”. Si tomamos coordenadas afines con centro en un punto singular  $P$  de una curva  $C_f$  de forma que uno de los ejes de coordenadas (digamos, el eje  $Y$ ) no sea tangente a la curva en el origen, la *clase* de  $P$  se define como el número de intersección en  $P$  de  $f$  con la derivada parcial  $f_Y$  en la dirección  $Y$ . De otra manera, la clase de un punto singular es igual a  $\mu + m - 1$  (cf. [Benedetti-Risler, Lema D.3.4]) donde  $m$  es la multiplicidad del punto singular y  $\mu$  es su número de Milnor. El número de Milnor es un invariante más habitual de un punto singular y coincide con el número de intersección de las dos derivadas de  $f$ , es decir, con la multiplicidad del punto  $P$  como punto crítico de la aplicación  $(f_X, f_Y) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  (cf. [Fulton]).



Gudkov demuestra dos resultados sobre las posibles disipaciones de un punto singular  $P$ . Sea  $U$  un entorno suficientemente pequeño de  $P$ . El Lema de isotopía [Gudkov, pag. 8] dice que si la curva perturbada posee un punto singular en  $U$  de la misma clase que el punto singular  $P$  de la curva no perturbada, entonces las dos curvas son isotópicas en  $U$  (es decir, no se produce disipación alguna). El Lema sobre la clase de un punto [Gudkov, pag. 7] dice que la suma de las clases de los puntos singulares de la curva perturbada (en el entorno  $U$ ) más el número de tangencias de la curva perturbada en una cierta dirección suficientemente alejada de las tangentes del punto singular de la curva no perturbada no puede superar a la clase de dicho punto singular. Por supuesto, ambos Lemas son sólo válidos para perturbaciones suficientemente pequeñas.

A estos dos resultados nosotros añadimos dos observaciones particulares para el caso de perturbaciones del tipo  $f + \varepsilon g$ . Supondremos siempre que  $f$  no tiene componentes dobles (esto es, tiene un número finito de puntos singulares) y que  $g$  no tiene componentes comunes con  $f$  (esto es, tiene un número finito de intersecciones con  $f$ ).

La primera observación es que, en estas condiciones, dos perturbaciones  $f + \varepsilon_1 g$  y  $f + \varepsilon_2 g$  de  $f$  por  $g$ , para distintos valores  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  del parámetro no se cortan más que en puntos comunes de  $f$  y  $g$ . Ésto implica que en una disipación de este tipo no puede producirse la aparición de nuevos óvalos (lo cual si ocurre, por ejemplo, en la perturbación  $y^2 - (x^2 - \varepsilon^2)(x^2 - 2\varepsilon^2)$  de  $y^2 - x^4$ ). Ésto es así porque un tal óvalo debería colapsarse en  $P$  para  $\varepsilon$  tendiendo a cero. Si el óvalo no contiene a  $P$  es imposible que se colapse sin autointersecarse para diferentes valores de  $\varepsilon$  y si contiene a  $P$  entonces es imposible que esté contenido en la región donde  $f$  y  $\varepsilon g$  tengan diferente signo, lo cual debe también ocurrir.

La segunda observación implica que la disipación de un punto singular no puede hacer aparecer nuevos puntos singulares sino sólo conservar el que ya existía y, además, sin moverlo. Ésto se deduce del siguiente Lema.

**Lema 2.3.2** *Sean  $f$  y  $g$  dos polinomios homogéneos reales del mismo grado en tres variables. entonces, para todo  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  excepto posiblemente una cantidad finita de ellos, los únicos puntos singulares de  $f + \varepsilon g$  en  $\mathbb{R}P^2$  son los puntos singulares comunes de  $f$  y  $g$ .*

*Demostración:* Consideremos primero los puntos en los que  $g$  se anula. Si  $f$  no se anula en ellos, tampoco  $f + \varepsilon g$ . Aquéllos en los que  $f$  se anula y es singular, sólo son singulares de  $f + \varepsilon g$ , para  $\varepsilon \neq 0$ , si también son puntos singulares de  $g$ . Aquéllos en los que  $f$  se anula, pero es no-singular, son una cantidad finita. Cada uno de ellos sólo puede ser singular de  $f + \varepsilon g$  para, a lo más, un valor de  $\varepsilon$  (aquél que anula los términos de primer grado de  $f + \varepsilon g$  en un sistema afín de coordenadas centrado en él).

En el abierto de  $\mathbb{R}^2$  en el que  $g$  no se anula, los puntos singulares de  $f + \varepsilon g$  son a su vez puntos críticos de la función racional  $-g/f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con valor crítico  $\varepsilon$ . El Lema de Sard nos asegura que el conjunto de valores críticos es discreto y, puesto que es claramente semialgebraico, finito. Cubriendo  $\mathbb{R}P^2$  por tres cartas afines obtenemos nuestra afirmación.  $\square$

**Disipación de un punto doble ordinario:** Un punto doble *ordinario* (o *no degenerado*) es un punto singular  $P$  de orden dos con dos ramas analíticas (que

supondremos reales) con tangentes diferentes. Es la singularidad más sencilla posible. Su número de Milnor vale 1 y su clase vale 2. Por tanto, si se conserva como punto singular en  $f + \varepsilon g$  lo hará como punto doble ordinario y la topología no cambia (por el Lema de isotopía). Ésto ocurre si y solo si  $P$  es un punto singular de  $g$ . En caso contrario, el efecto topológico de la disipación es uno de los dos mostrados en la Figura 2.10, con desaparición del punto singular. El signo de  $\varepsilon g$  en un entorno de  $P$  nos dice cuál de las dos disipaciones se produce. (En particular, cambiando  $g$  por  $-g$  la disipación producida cambia).

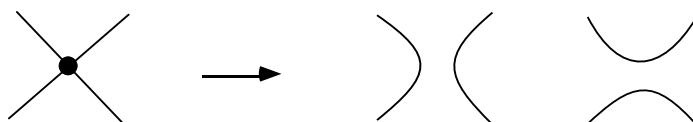


Figura 2.10: Disipación de un punto doble ordinario.

**Disipación de un punto ordinario no doble:** Un punto singular de orden  $r$  se dice *ordinario* (o *no degenerado*) si tiene  $r$  ramas analíticas (que nosotros supondremos reales) con tangentes diferentes. Es la singularidad de orden  $r$  más sencilla posible. Su número de Milnor vale  $(r - 1)^2$  y su clase vale  $(r - 1)r$ . Puede dar lugar a varias disipaciones, de las cuales nos interesan dos casos.

Si  $P$  es también punto singular de  $g$  de orden al menos  $r$  (no necesariamente ordinario) entonces  $P$  sigue siendo punto singular ordinario de orden  $r$  en  $f + \varepsilon g$ , para  $\varepsilon$  pequeño. El Lema de isotopía implica que la topología no cambia.

Si  $g$  no pasa por  $P$ , entonces el punto singular desaparece. Como ya sabemos, no pueden aparecer nuevos óvalos. Por tanto, la topología de la curva perturbada se obtiene simplemente uniendo las  $2r$  semirramas de la curva alrededor de  $P$  de dos en dos, de forma que no se corten unas a otras. Ésto se puede hacer a priori de muchas maneras (es lo que llamábamos una “desingularización” en la Sección 2.2) pero en el caso que ahora nos ocupa la disipación sólo puede unir semirramas consecutivas, porque la curva, en un pequeño entorno de  $P$ , ha de quedar en una de las regiones  $f > 0$  ó  $f < 0$  (puesto que el signo de  $g$  es localmente constante). Por tanto, las dos disipaciones posibles son las de la Figura 2.11 y de nuevo el signo de  $\varepsilon g$  nos dice cuál se produce.

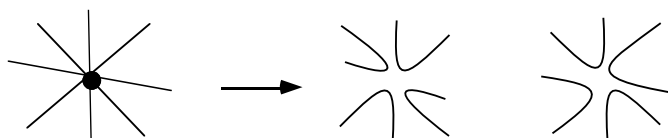


Figura 2.11: Disipación de un punto múltiple ordinario.

**Disipación de un punto de tangencia:** Llamaremos punto de tangencia a un punto singular  $P$  con dos ramas analíticas reales tangentes entre sí. Su número de Milnor  $\mu$  puede tomar cualquier valor impar a partir de 3 y su clase vale  $\mu + 1$ . En perturbaciones más generales que las nuestras, las posibles disipaciones dependen del número de Milnor (por ejemplo, pueden aparecer  $(\mu - 1)/2$  óvalos, lo cual concuerda con el Lema sobre la clase de los puntos, antes mencionado). Sin embargo, para perturbaciones de la forma  $f + \varepsilon g$  ésto no es así. Si el punto  $P$  no es un punto

singular de  $g$ , entonces las dos disipaciones posibles son las que ya conocemos para un punto doble ordinario.

Si  $P$  es un punto doble ordinario de  $g$ , entonces también lo es de  $f + \varepsilon g$ , para  $\varepsilon$  pequeño. Las únicas disipaciones compatibles con la no aparición de óvalos, no aparición de nuevos puntos singulares y el hecho de que la curva tiende continuamente a la curva no perturbada (al hacer tender  $\varepsilon$  a cero) sin pasar dos veces por ningún punto, son las tres de la Figura 2.12. En las dos primeras el punto  $P$  es un punto singular doble ordinario con dos ramas complejas conjugadas. Sin embargo, la primera posibilidad no puede ocurrir porque el número de intersecciones reales de la curva con una cierta recta en un entorno de  $P$  no puede aumentar tras la perturbación. La doble tangencia tiene dos intersecciones con una recta vertical que pase por  $P$  y en la primera posibilidad de la Figura el número de intersecciones con una tal recta es, al menos, cuatro. Por tanto, las dos disipaciones que se producen son la segunda y la tercera de la Figura 2.12, de nuevo dependiendo del signo de  $\varepsilon g$ .

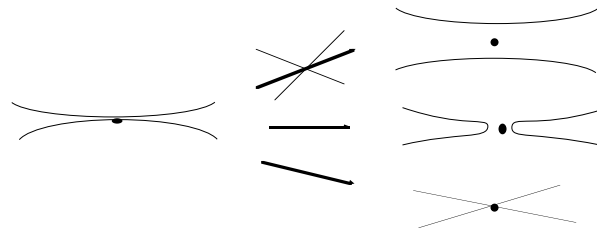


Figura 2.12: Disipación de un punto de tangencia por uno doble ordinario.

Veamos dos ejemplos de perturbación de una curva algebraica, que serán utilizados en una demostración al final de la Sección 2.5.2. Supongamos que queremos encontrar dos curvas algebraicas de grado cinco que realicen, respectivamente, a los dos diagramas de la Figura 2.13. Este grado es el mínimo posible puesto que una curva algebraica de grado menor o igual a 3 tiene, a lo más, dos puntos singulares y una de grado 4 es par.

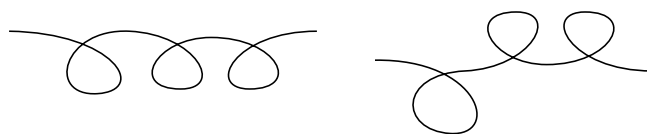


Figura 2.13: Dos diagramas que queremos realizar con grado 5.

Para ello consideremos, respectivamente, los dos productos de una recta y dos elipses de la Figura 2.14. Se deja al lector la comprobación de que una perturbación que mantenga los tres puntos dobles ordinarios marcados con  $A$ ,  $B$  y  $C$  y haga desaparecer al  $D$  y al  $E$  en una de las dos maneras de las Figuras 2.10 y 2.11 sirve a nuestros propósitos. Por tanto, nos basta con encontrar una curva  $g$  de grado cinco que tenga un punto doble en  $A$ ,  $B$  y  $C$ , que no pase por  $D$  y  $E$  y que tenga el “signo adecuado” en  $D$  y  $E$ . Para ello, tomaremos  $g$  como un producto de dos cónicas que pasen por  $A$ ,  $B$  y  $C$  pero no pasen por  $D$  y  $E$  y una recta que haga cambiar el signo del producto de las cónicas en  $D$  y en  $E$  si y sólo si es necesario.

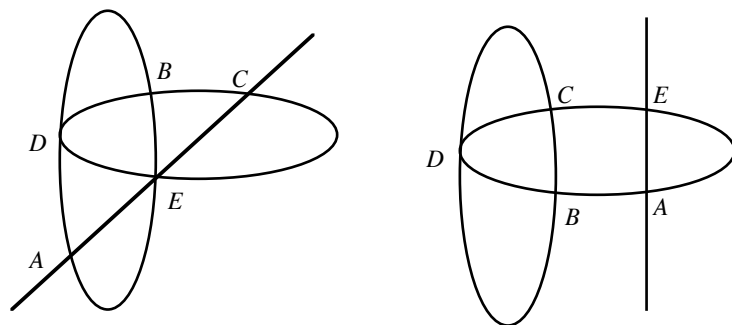


Figura 2.14: Curvas algebraicas que, perturbadas, realizan a las de la Figura 2.13.

### 2.3.2 Un primer método de realización de diagramas

Como primera aplicación de lo expuesto en el apartado anterior, vamos a ver en este apartado algunos ejemplos sencillos de técnicas de perturbación de curvas algebraicas que darán pie a un primer método de realización de diagramas con sólo puntos dobles, que aparece descrito en [Santos2].

**Proposición 2.3.3** *Sea  $C$  una circunferencia y sea  $l$  una recta que pasa por su centro. Sea  $C_1$  una de las dos mitades en que  $l$  divide a  $C$ . Entonces, existe una curva algebraica  $C_\varepsilon$  definida por un polinomio  $f_\varepsilon$  de grado 4 tal que:*

- (i)  $C_\varepsilon$  es tan cercana a  $C_1$  como se quiera (es decir, está contenida en un entorno abierto de  $C_1$  arbitrario).
- (ii)  $C_\varepsilon$  tiene el tipo topológico de una lemniscata (i.e. un ‘8’) y un único punto singular que es doble no-degenerado.
- (iii)  $C_\varepsilon$  es tangente a la recta  $l$  en dos puntos y no la corta en ningún otro punto.

*Demostración:* Sin pérdida de generalidad supongamos que  $l$  es el eje  $\{y = 0\}$ ,  $C$  es la circunferencia unidad  $\{x^2 + y^2 = 1\}$  y  $C_1$  su mitad superior  $\{x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ .

Sea  $a > 0$  una constante positiva y pequeña. Consideremos la curva  $C_0$  definida por

$$f_0(x, y) = (x^2 + y^2 - 2ax - 1)(x^2 + y^2 + 2ax - 1).$$

$C_0$  es el producto de dos circunferencias con centros en  $(a, 0)$  y  $(-a, 0)$  y que se cortan en los puntos  $(0, -1)$  y  $(0, 1)$  (como en la Figura 2.15[a]). Si perturbamos  $f_0$  en la forma

$$f_\varepsilon(x, y) = f_0(x, y) + \varepsilon(y - 1)^2 = (x^2 + y^2 - 1)^2 - 4a^2x^2 + \varepsilon(y - 1)^2,$$

con  $\varepsilon > 0$ , la curva resultante  $C_\varepsilon$  tiene un único punto singular en  $(0, 1)$  que, además, es no-degenerado y de orden 2, para cualquier valor (no nulo) de  $\varepsilon$ . Además,  $C_\varepsilon$  ha de estar contenida (salvo por el punto singular) en la región donde  $f_0$  es negativo, o sea en las dos pequeñas ‘medias lunas’ entre las dos circunferencias de que se compone  $C_0$ . Gracias a lo expuesto en la Sección 2.3, para  $\varepsilon$  pequeño y positivo la curva  $C_\varepsilon$  es como se muestra en la Figura 2.15[b].

Además, en este caso, todas las curvas  $C_\varepsilon$  con  $\varepsilon > 0$  son isotópicas entre sí, gracias al ‘lema de isotopía’ utilizado en la sección 2.3 (pag. 88). Si el parámetro  $a$

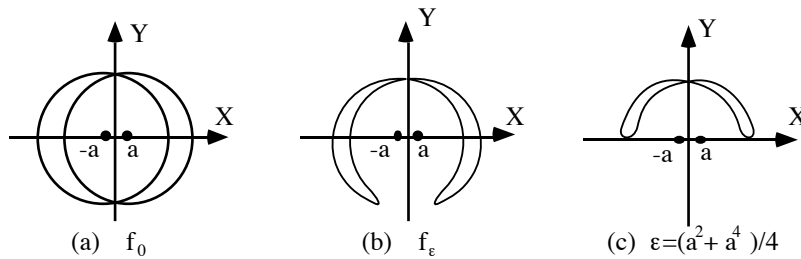


Figura 2.15: Ilustración de la Proposición 2.3.3.

se escoge suficientemente pequeño, las dos medias lunas son a su vez suficientemente pequeñas y  $C_\epsilon$  es tan cercana a la circunferencia unidad  $C$  como se quiera. Lo único que necesitamos es encontrar un valor de  $\epsilon$  para el cual  $C_\epsilon$  sea tangente al eje  $l$  en sendos puntos de ambos lados y no lo corte en ningún otro punto (como en la Figura 2.15[c]). Ésto se consigue haciendo que  $f_\epsilon(x, 0)$  tenga dos raíces dobles, lo cual ocurre para  $\epsilon = (a^2 + a^4)/4$ .  $\square$

**Proposición 2.3.4** Sean  $C$  y  $l$  dos circunferencias que se cortan perpendicularmente en dos puntos. Sea  $C_1$  uno de los dos arcos de circunferencia en que  $l$  divide a  $C$ . Entonces, existe una curva algebraica  $C_\epsilon$  definida por un polinomio  $f_\epsilon$  de grado 4 tal que:

- (i)  $C_\epsilon$  es tan cercana a  $C_1$  como se quiera (es decir, está contenida en un entorno abierto de  $C_1$  arbitrario).
- (ii)  $C_\epsilon$  tiene el tipo topológico de una lemniscata (i.e. un ‘8’) y un único punto singular que es doble no-degenerado.
- (iii)  $C_\epsilon$  es tangente a la circunferencia  $l$  en dos puntos y no la corta en ningún otro punto.

Mediante una transformación afín podemos de nuevo suponer que  $C$  es la circunferencia unidad, que  $l$  tiene su centro en el eje  $\{x = 0\}$  y que  $C_1$  es la parte superior de la circunferencia unidad, como en alguno de los dos dibujos de la Figura 2.16. La ecuación de  $l$  es entonces  $l(X, Y) = x^2 + y^2 - 2yc + y^2$ , donde  $(0, c)$  es su centro, y  $\sqrt{c^2 - 1}$  su radio.

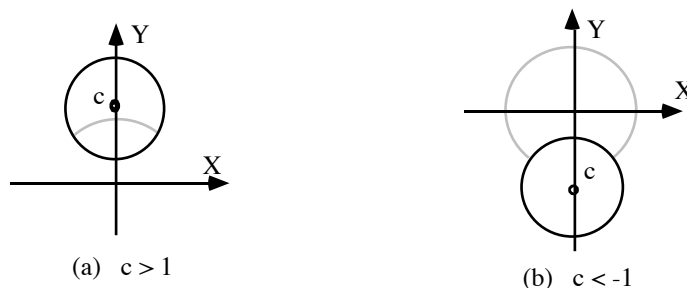


Figura 2.16: Ilustración de la Proposición 2.3.4.

La situación es parecida a la de la Proposición anterior y podemos utilizar las mismas curvas  $C_\epsilon$  que usamos allí, salvo que ahora queremos que  $C_\epsilon$  sea tangente

a la circunferencia  $l$ . Fijando de nuevo el parámetro  $a$  suficientemente pequeño en la ecuación de  $f_\varepsilon$ , es fácil comprobar que tomando

$$\varepsilon = (a^2 + a^4)(c - 1)/(c + 2 + a^2 + 1).$$

la curva  $C_\varepsilon$  es tangente a la circunferencia  $l$  en sus dos extremos y no lo corta en ningún otro punto. Satisface, por tanto, todas las exigencias de la Proposición.  $\square$

Recordemos que en la Sección 2.2 habíamos conseguido colocar un cierto esquema de desingularización de un diagrama Euleriano, conexo y con sólo puntos dobles  $\mathcal{D}$  en una forma especialmente sencilla a la que llamábamos estándar (cf. la Proposición 2.2.2 en la página 84). Gracias a las Proposiciones 2.3.3 y 2.3.4 que acabamos de demostrar seremos capaces de incluir, a lo largo de cada uno de los enlaces de un esquema de desingularización estándar, una curva lemniscata de grado 4, de forma que perturbando el producto de todas ellas y la circunferencia unidad (caso par) o la recta  $\{y = 0\}$  (caso impar) recuperemos la topología del diagrama  $\mathcal{D}$ .

**Proposición 2.3.5** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano conexo con  $n$  puntos dobles en el plano proyectivo y sea  $\mathcal{D}^*$  un esquema de desingularización de  $\mathcal{D}$  por un ciclo Euleriano puesto en la forma “estándar” descrita en la Proposición 2.2.2. Entonces, para cada uno de los  $n$  enlaces de  $\mathcal{D}^*$  podemos construir una curva algebraica  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  de grado 4 con el tipo topológico de una lemniscata y en las condiciones que siguen:*

- i)  $l_i$  es tangente al núcleo (circunferencia unidad o recta  $\{y = 0\}$ ) de  $\mathcal{D}^*$  en sus dos extremos.*
- ii)  $l_i$  es tan cercano al correspondiente enlace como se quiera. En particular, dos lemniscatas  $l_i$  y  $l_j$  diferentes no se cortan.*
- iii) el punto singular de  $l_i$  es doble no-degenerado.*

*Demostración:*

Para los enlaces que son arcos de circunferencia (es decir, los de los tipos (b), (c), (d), (g) y (h) de la Figura 2.6), remitimos al lector directamente a las Proposiciones 2.3.3 (para el caso impar) y 2.3.4 (para el caso par). Las condiciones requeridas a las curvas  $l_i$  son exactamente las mismas que allí se requerían para la curva  $C_\varepsilon$ . Para los otros dos tipos el procedimiento de obtención es parecido, y se detalla a continuación.

Para los enlaces de tipo (a) del caso par, sin pérdida de generalidad supongamos que  $P$  y  $Q$  son los puntos de la circunferencia unidad en el eje  $X$  y que por tanto el enlace que los une es la parte del eje  $X$  exterior a la circunferencia. En estas condiciones la curva algebraica definida por  $(1 + y^2/a^2)^2 - x^2 + y^2x^2/a^2$ , para un cierto parámetro  $a > 0$  suficientemente pequeño satisface las condiciones. Nótese que, aunque damos el polinomio de la curva en dos variables  $x$  e  $y$ , la curva debe considerarse en el plano proyectivo, para lo cual basta homogeneizarla con una tercera variable  $z$ . En este sentido, la curva anterior posee su punto singular doble no degenerado en el infinito (en el punto de coordenadas proyectivas  $(1, 0, 0)$ ).

Para los enlaces de tipos (e) y (f) del caso impar, sin pérdida de generalidad podemos suponer que la hipérbola de la que forma parte el enlace es la de ecuación  $x^2 - y^2 - 1 = 0$ . Intercambiando las variables  $x$  y  $z$  (siendo  $z$  la variable de

homogeneización) la hipérbola se convierte en la circunferencia unidad, con lo que este caso se reduce al de los tipos (c) y (d), ya estudiado en la Proposición 2.3.3.  $\square$

Sea  $\mathcal{D}$  un cierto diagrama Euleriano conexo con  $n$  puntos dobles, sea  $\mathcal{D}^*$  un esquema de desingularización estándar de  $\mathcal{D}$  y sea  $C_f$  la curva algebraica definida por el producto  $f$  de las  $n$  lemniscatas obtenidas en la Proposición 2.3.5 y la circunferencia unidad (caso par) o la recta  $\{y = 0\}$  (caso impar). El grado de  $f$  es  $4n + 1$  ó  $4n + 2$  según la paridad de  $\mathcal{D}$ . El último paso de nuestra construcción será encontrar una cierta curva algebraica  $C_g$  con polinomio  $g$  del mismo grado que  $f$  con la cual perturbar a  $f$  de forma que el tipo topológico de  $f + \varepsilon g$  coincida con el del diagrama  $\mathcal{D}$ .

Claramente, el cambio que necesitamos provocar en la topología de  $C_f$  es que cada tangencia de las lemniscatas con la circunferencia unidad o el eje  $X$  sea disipada de la forma mostrada en la Figura 2.4. Si tomamos  $\varepsilon > 0$ , la condición necesaria para que la perturbación se dé en ese sentido es que  $g$  no se anule en el punto de tangencia y su signo coincida con el que tiene  $f$  dentro de la lemniscata. Del mismo modo —y de acuerdo con lo dicho al estudiar las perturbaciones de puntos sencillos— las condiciones necesarias para que la topología de la curva perturbada (para una perturbación suficientemente pequeña) no cambie fuera de los mencionados puntos de tangencia son que  $g$  sea del mismo grado que  $f$  y posea un punto singular en cada uno de los  $n$  puntos singulares dobles no-degenerados de las  $n$  lemniscatas. Veamos cómo obtener  $g$  en esas condiciones.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que las coordenadas  $X$  de los  $2n$  puntos de tangencia son diferentes. Ésto ocurre automáticamente en el caso impar y es fácil de conseguir en el caso par, girando todo el esquema de desingularización un cierto ángulo si es necesario. Sean  $x_1 < \dots < x_{2n}$  los valores de dichas coordenadas y sea  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{2n}$  la sucesión de signos que deseamos que  $g$  tome en los distintos puntos de tangencia. Para cada intervalo  $(x_i, x_{i+1})$  en el que el signo cambia consideremos la recta vertical  $X = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ . El producto  $g_1$  de dichas rectas (que son a lo sumo  $2n + 1$ ) tiene el signo adecuado en cada punto de tangencia. Para conseguir que  $g$  tenga un punto singular en cada uno de los  $n$  puntos singulares no-degenerados  $P_i = (a_i, b_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  de las lemniscatas multipliquemos  $g_1$  por el producto  $g_2 = \prod \left( (X - a_i)^2 + (Y - b_i)^2 \right)$ . La curva resultante  $g = g_1 g_2$  cumple todas las condiciones que necesitamos y tiene grado a lo sumo  $4n + 1$ . Para que tenga el mismo grado que  $f$ , sin perder ninguna de dichas condiciones, podemos multiplicarla por una cierta potencia de la recta del infinito.

En conclusión:

**Teorema 2.3.6** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano conexo en el plano proyectivo con sólo puntos singulares dobles. Sea  $n$  el número de tales puntos. Sea  $d = 4n + 1$  si  $\mathcal{D}$  es impar y  $d = 4n + 2$  si  $\mathcal{D}$  es par. Entonces, existe un polinomio  $f$  de grado  $d$ , producto de  $n$  lemniscatas y la circunferencia unidad o la recta  $\{y = 0\}$  (como en la Proposición 2.2.2) y existe un polinomio  $g$  también de grado  $d$ , producto de  $n$  cónicas con un solo punto real y  $d - 2n$  rectas, tales que la curva algebraica definida por una perturbación  $f_\varepsilon = f + \varepsilon g$  de  $f$  por  $g$  con  $\varepsilon$  positivo y suficientemente pequeño tiene el mismo tipo topológico que  $\mathcal{D}$ .  $\square$*

## 2.4 Realización algebraica con grado genéricamente óptimo de diagramas Eulerianos con sólo puntos dobles

En esta sección presentamos otro método de construcción de curvas algebraicas en el plano proyectivo con tipo topológico dado a priori. El método está basado en los mismos principios que el presentado en la sección anterior: primero construiremos una cierta curva algebraica cuyo polinomio  $f$  se obtiene multiplicando los de ciertas curvas sencillas (casi siempre cónicas) y después perturbaremos  $f$  en la forma  $f + \varepsilon g$ , para un  $g$  adecuado, de forma que la curva perturbada tenga el tipo topológico que deseamos.

Nuestro objetivo ahora es rebajar el grado de la construcción de  $4n + 2$  (que es el obtenido en la sección anterior) a  $2n + 2$ , para una curva conexa con  $n$  puntos dobles. Ésto proporcionará grado  $2n + 2k$  para una curva no conexa (donde  $k$  es el número de componentes conexas), lo cual es genéricamente óptimo como se mostrará en la Sección 2.5. La idea esencial para ello es conseguir que los enlaces del esquema de desingularización sean todos segmentos de recta, de forma que en vez de introducir una lemniscata a lo largo de cada uno de ellos como paso previo a la perturbación algebraica, podamos introducir una elipse suficientemente estrecha (ver Figura 2.17).

Ésto no será siempre posible para una desingularización por medio de un ciclo Euleriano. Por ejemplo, en el caso de un diagrama orientable y par, los enlaces de los tipos (c) y (d) de la Figura 2.6 (página 84) no pueden, obviamente, ser colocados como segmentos de recta. Además, si la cara no orientable del diagrama no es incidente sobre un cierto vértice  $V$ , en cualquier desingularización por ciclo Euleriano habrá enlaces de los tipos (c) y (d) (que separan la cara no orientable del enlace proveniente de  $V$ ).

Por estas razones, las desingularizaciones que haremos estarán basadas en la noción de *profundidad* de las caras de un diagrama, introducida en la Sección 2.2, en vez de en la de ciclo Euleriano. Además, deberemos tratar de forma diferente los diagramas orientables, los no-orientables pares y los no-orientables impares. En principio supondremos el diagrama conexo. El Lema 2.4.10 al final de la Sección justificará que cada componente conexa sea tratada por separado.

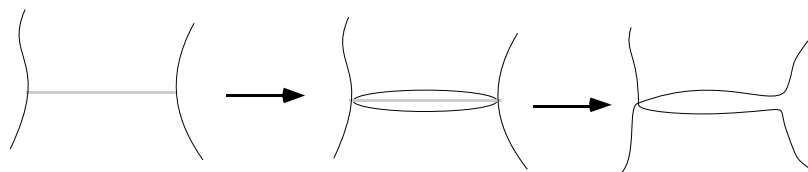


Figura 2.17: Inserción de una elipse y perturbación.

### 2.4.1 El caso orientable

Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama orientable, conexo, con sólo puntos dobles. Dejaremos a un lado el caso en que  $\mathcal{D}$  sea un punto aislado, que es trivialmente realizable como la “curva” definida por el polinomio  $x^2 + y^2$  de grado dos.



Sea  $F_0$  la cara no orientable de  $\mathcal{D}$  y consideremos en las caras de  $\mathcal{D}$  la función de profundidad que a cada cara  $F$  le asigna el mínimo número de cortes con  $\mathcal{D}$  de un camino que vaya de  $F_0$  a  $F$ . Ésta es la función de profundidad más “natural” para un diagrama orientable y ya fue mencionada en la Sección 2.2 (véase la Figura 2.8 de la página 86).

Se trata ahora de desingularizar  $\mathcal{D}$  de forma compatible con la función de profundidad. En algunos vértices de  $\mathcal{D}$  las dos desingularizaciones posibles son compatibles con la misma, mientras que en otros sólo una lo es (ver la Figura 2.18). En el primer caso elijeremos hacer la desingularización que conecta las dos caras más profundas alrededor del vértice (es decir, las dos caras de profundidad  $p + 1$  para el vértice de la izquierda en la Figura 2.18). La ventaja de hacer ésto es que de esta manera el esquema de desingularización resultante tendrá una forma especialmente sencilla, a saber: sólo habrá enlaces que unan óvalos de diferente profundidad o bien un óvalo a sí mismo por su cara interior (tipos (a) y (b) de la Figura 2.19). Nunca se producirán enlaces entre dos óvalos de la misma profundidad ni de un óvalo a sí mismo por su cara exterior (tipos (c) y (d) de la Figura 2.19). Ésto nos permitirá demostrar el siguiente Lema:



Figura 2.18: Posibles funciones de profundidad en torno a un punto doble.

**Proposición 2.4.1** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano, conexo, orientable y con sólo puntos dobles. Consideremos la desingularización compatible con la función de profundidad “natural” de  $\mathcal{D}$  en la que se unen, en los vértices en que sea posible elegir, las dos caras de mayor profundidad. Entonces, el esquema de desingularización resultante tiene el mismo tipo topológico que un cierto esquema de desingularización  $\mathcal{D}^*$  con las siguientes propiedades:*

- (i) *El núcleo del esquema de desingularización está formado por circunferencias que no se cortan, una de las cuales contiene a todas las demás en su cara interior.*
- (ii) *Los enlaces son segmentos de recta que unen dos circunferencias anidadas o bien dos puntos de una misma circunferencia por la cara interior de ésta.*

*Además, los puntos de contacto de los enlaces con la circunferencia más exterior pueden ser elegidos de forma arbitraria, siempre que se mantenga el orden circular de los mismos.*

*Demostración:* Recordemos en primer lugar que, en una desingularización compatible con una función de profundidad, las regiones del esquema de desingularización que quedan separadas únicamente por un enlace corresponden a caras del diagrama original  $\mathcal{D}$  que tenían la misma profundidad. Además, en nuestro caso, la función de profundidad que de esta manera se “hereda” sobre el diagrama desingularizado  $\mathcal{D}^0$  coincide de hecho con la función de profundidad “natural” del diagrama, es decir,

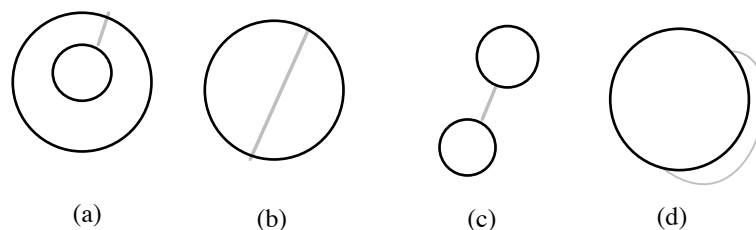


Figura 2.19: Posibles enlaces en una desingularización por función de profundidad.

con el número mínimo de óvalos del diagrama que es necesario atravesar para llegar a la cara no orientable.

Dado un cierto óvalo del diagrama desingularizado, llamaremos profundidad del óvalo a la profundidad de su cara interior. Dado que nuestra desingularización se ha hecho uniendo siempre las dos caras de mayor profundidad posible, la observación del párrafo anterior implica que dado un cierto enlace del esquema de desingularización situado en una cara de profundidad  $p$ , al menos uno de los óvalos en sus dos extremos es también de profundidad  $p$ : si los dos fueran de profundidad  $p + 1$  la desingularización del correspondiente vértice habría unido las dos caras de profundidad menor,  $p$ . Por tanto, ningún enlace conecta un óvalo consigo mismo a través de su cara exterior ni conecta dos óvalos no anidados. También como consecuencia se tiene que sólo puede haber un óvalo de profundidad 1, puesto que si hubiera dos el esquema de desingularización resultaría disconexo.

Con ésto hemos probado las afirmaciones (i) y (ii) del enunciado, salvo por el hecho de que los óvalos puedan ser transformados en circunferencias y los enlaces en segmentos. Ésto se demostrará por inducción sobre la máxima profundidad de una cara del diagrama, suponiendo además que los puntos de contacto de la circunferencia de profundidad 1 con los enlaces nos han sido fijados a priori, como se exige en la última parte del enunciado.

Si la máxima profundidad de las caras de  $\mathcal{D}$  es 1, entonces el diagrama desingularizado consta tan sólo del óvalo de profundidad 1, y los enlaces son segmentos de recta que unen dos puntos del óvalo a través de la cara interior. En estas condiciones es posible, mediante una isotopía global del plano proyectivo, convertir el óvalo en una circunferencia. Ésto se puede hacer incluso si la imagen en la circunferencia de cada punto de contacto del óvalo con un enlace nos ha sido fijada. Una vez hecho, mediante otra isotopía del interior de la circunferencia, podemos fácilmente convertir los enlaces (que originalmente son líneas arbitrarias que unen dos puntos de la circunferencia sin cortarse las unas a las otras) en segmentos de recta, sin mover sus extremos.

En el caso general de máxima profundidad igual a  $p$ , la hipótesis inductiva para los diagramas con máxima profundidad  $p - 1$  nos permite suponer que los óvalos de profundidad 1 están “vacíos”, es decir, que no hay óvalos de profundidad mayor que 1 y que los de profundidad 1 no tienen enlaces interiores. Ésto es así porque para un cierto óvalo  $C$  de profundidad 1 de nuestro esquema de desingularización, el óvalo  $C$ , junto con todo lo que haya en su interior, constituye en sí mismo el esquema de desingularización de un cierto diagrama en las mismas condiciones que las de nuestro enunciado y con profundidad máxima menor o igual que  $p - 1$ . Si somos capaces de colocar  $C$ , junto con todos los demás óvalos de profundidad 1,

en las condiciones del enunciado, entonces lo que haya en el interior de  $C$  se podrá colocar también aplicando inducción.

Nótese que el hecho de que haya uno o más enlaces que unen  $C$  con la circunferencia exterior implicará unas ciertas restricciones a la colocación de los puntos de contacto de los enlaces interiores de  $C$ , pero estas restricciones no suponen ningún obstáculo a la aplicación inductiva del Lema, gracias a la condición final en el enunciado.

Para colocar cada uno de los óvalos de profundidad 1 en forma de circunferencia y con sus enlaces en forma de segmentos, colapsaremos primero cada uno de ellos a un punto (como en la parte izquierda de la Figura 2.20) y después “agrandaremos” cada punto para convertirlo en una pequeña circunferencia, como en la parte de la derecha. Sólo será necesario que este agrandamiento sea suficientemente pequeño para que las circunferencias que resultan no se corten unas a otras ni a la circunferencia exterior.

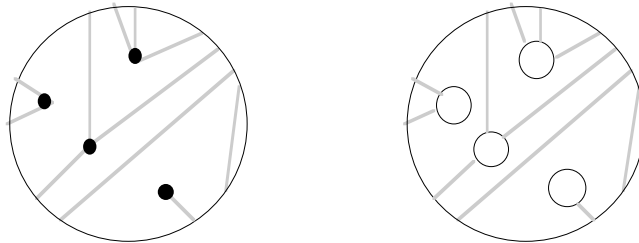


Figura 2.20: Colocación del esquema de desingularización en forma de círculos.

Lo único que nos queda por ver es que realmente es posible colocar los “óvalos colapsados” de forma que uniendo cada uno de ellos con los puntos correspondientes de la circunferencia (que se suponen elegidos a priori) mediante segmentos de recta, los segmentos de recta resultantes no se corten unos a otros ni a los segmentos que resultan de autoenlaces de la circunferencia exterior.

Para ésto nos bastará añadir los puntos (con sus correspondientes enlaces) uno a uno teniendo la precaución de que en cada paso las regiones en que queda dividido el interior de la circunferencia sean *estrelladas*. (Una región se dice estrellada si existe un punto dentro de ella desde el cual toda la frontera de la región es “visible”. El conjunto de puntos que ven a todo el borde forman el “núcleo” de la región). Si nuestras regiones son estrelladas, podemos añadir cada punto adicional en el núcleo de la correspondiente región. Ésto, además de asegurarnos que desde ese punto podremos trazar los segmentos a los puntos que queramos de la circunferencia, nos asegura que las subregiones que se producen son, a su vez, estrelladas.  $\square$

Como corolario de este resultado podemos ya inferir una forma de realizar el diagrama original  $\mathcal{D}$ . Se trataría simplemente de, una vez obtenido un esquema de desingularización en las condiciones del enunciado, sustituir cada enlace por una elipse suficientemente estrecha y perturbar el producto de todas las elipses y circunferencias. Ésto haría que el grado necesario para cada enlace sea 2 en vez de 4 como en la construcción de la Sección anterior, pero no nos ayudaría mucho porque en el peor de los casos el diagrama desingularizado tendrá  $n + 1$  circunferencias y por tanto el grado total vuelve a ser  $4n + 2$ . Sin embargo, podemos hacer las

cosas un poco mejor si, para cada óvalo interior, uno de los enlaces con el óvalo inmediatamente más exterior lo realizamos sustituyendo el óvalo por una elipse, en vez de añadir una elipse. Ésto se muestra en la Figura 2.21, y se detalla en la demostración del siguiente resultado.

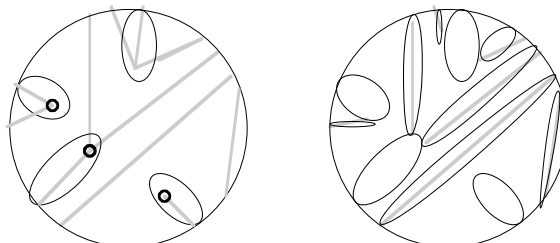


Figura 2.21: Colocación de elipses a lo largo de los enlaces.

**Proposición 2.4.2** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano, conexo, orientable y con sólo puntos dobles. Sea  $n$  el número de puntos dobles. Entonces,  $\mathcal{D}$  puede ser realizado como una desingularización parcial de un cierto diagrama  $\mathcal{D}'$  que es la unión de  $n+1$  cónicas no degeneradas (concretamente, circunferencias o elipses) en las siguientes condiciones:*

- *Los cónicas sólo se tocan unas a otras tangencialmente, y en a lo sumo  $2n$  puntos en total (de ellos,  $n$  no deberán ser desingularizados).*
- *El contorno exterior de  $\mathcal{D}'$  está formado por una sola de las cónicas, que podemos suponer la circunferencia unidad. Los puntos de tangencia de ésta con todas las demás pueden ser fijados arbitrariamente en la circunferencia unidad al principio de la construcción, siempre que se respete su orden circular.*

*Demostración:* La demostración está basada en el proceso detallado en la demostración de la Proposición 2.4.1 y se hace por tanto por inducción sobre la máxima profundidad  $p$  de las caras de  $\mathcal{D}$ . Para el caso  $p = 1$  no hay nada que añadir al Lema, salvo, claro está, que después de realizar los enlaces como segmentos de recta cada uno de ellos es sustituido por una elipse suficientemente estrecha y tangente a la circunferencia exterior en los dos puntos extremos del enlace.

Para el caso  $p > 1$  el único cambio es que en el último paso (el agrandamiento de los “óvalos colapsados”), en vez de sustituir cada punto por una pequeña circunferencia lo sustitiremos por una elipse a lo largo de uno de los enlaces que unen el punto a la circunferencia exterior. La elipse se tomará suficientemente estrecha, tangente a la circunferencia exterior en el extremo del enlace y conteniendo al punto del otro extremo del enlace (de forma que todos los demás enlaces del punto la corten). Después sustituiremos cada enlace restante por una elipse suficientemente estrecha, tangente a la circunferencia exterior y a la elipse que acabamos de introducir.  $\square$

**Teorema 2.4.3** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano, conexo, orientable, con sólo puntos dobles. Sea  $n$  el número de puntos dobles. Entonces  $\mathcal{D}$  puede ser realizado como una pequeña perturbación  $f + \varepsilon g$ , donde  $f$  es un producto de  $n+1$  cónicas no degeneradas, como las de la Proposición 2.4.2 y  $g$  es un producto de  $2n+2$  rectas.*

*Demostración:* La forma de recuperar el tipo topológico del diagrama  $\mathcal{D}$  a partir de la unión de cónicas de la Proposición 2.4.2 es conservar  $n$  de los puntos de tangencia como puntos singulares y disipar los demás de manera que las dos cónicas que se tocan en él queden ‘unidas’. Más concretamente, los puntos a disipar son uno de los dos de cada elipse introducida a lo largo de un enlace, los cuales son, a lo sumo,  $n$ .

De acuerdo con lo estudiado en la Sección 2.3 las condiciones para que la perturbación  $f + \varepsilon g$  (con  $\varepsilon$  suficientemente pequeño y positivo) produzca las disipaciones que necesitamos son:

- Para los  $n$  puntos de tangencia a conservar, que  $g$  tenga un punto singular no-degenerado en cada uno de ellos y “el signo adecuado” en un entorno.
- Para los a lo sumo  $n$  puntos de tangencia a desingularizar, que  $g$  no pase por ellos y tenga “el signo adecuado” en ellos.

Sea  $f$  el producto de las  $n + 1$  cónicas de la Proposición 2.4.2. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los  $2n$  puntos de tangencia de las  $n + 1$  cónicas no contienen tres puntos alineados. También supondremos que  $n > 1$  (el caso  $n = 0$  es trivial y en el caso  $n = 1$  sólo hay dos posibilidades, ambas de fácil tratamiento).

Sean  $P_1, \dots, P_n$  los puntos de tangencia que queremos conservar como puntos singulares de  $f + \varepsilon g$  y sean  $Q_1, \dots, Q_l$  ( $l \leq n$ ) los que queremos desingularizar. Sea  $r_i$  para  $i = 1, \dots, n - 1$  la recta que pasa por  $P_i$  y  $P_{i+1}$ , y sea  $r_n$  la que pasa por  $P_n$  y  $P_1$ . Entonces, el producto de estas  $n$  rectas tiene un punto singular doble no degenerado en cada uno de los  $n$  puntos  $P_i$ . Llamemos  $g_1$  al producto de estas  $n$  rectas.

Nuestro problema ahora se reduce a encontrar otras  $n + 2$  rectas cuyo producto  $g_2$  tenga un signo prefijado en cada uno de los puntos  $P_i$  y  $Q_i$  (el adecuado para conseguir que la perturbación  $f + \varepsilon g_1 g_2$  con  $\varepsilon$  positivo produzca la disipación adecuada, de entre las dos posibles en cada punto  $P_i$  o  $Q_i$ ).

Para conseguirlo, consideramos en primer lugar las rectas  $s_i$  que pasan por  $P_i$  y  $Q_i$  para  $i = 1, \dots, l$  y rectas arbitrarias que pasan por  $P_i$  y no pasan por ningún otro punto de tangencia de las cónicas para  $i = l + 1, \dots, n$ . Consideremos otras dos rectas arbitrarias  $s_{n+1}$  y  $s_{n+2}$ . Estas dos últimas no juegan ningún papel en la construcción, salvo el de dar al producto  $g_1 \prod s_i$  el grado de  $f$ .

Como los puntos  $P_i$  y  $Q_i$  están en posición general, mover ligeramente una de las rectas  $s_i$  sólo afecta al signo de  $\prod s_i$  en  $P_i$  y  $Q_i$ , pero no al resto de los puntos. La Figura 2.22 muestra que las cuatro posibles distribuciones de signos para  $P_i$  y  $Q_i$  pueden conseguirse moviendo la recta  $s_i$ , independientemente del signo que el producto de las demás tome en dichos puntos.

Por tanto, moviendo ligeramente de una forma adecuada cada una de las rectas  $s_i$  obtendremos otras  $n + 2$  rectas  $s'_1, \dots, s'_{n+2}$  cuyo producto  $g_2$  tiene el signo que deseamos en cada uno de los puntos  $P_i$  y  $Q_i$ . De esta forma, conseguiremos que la perturbación  $f + \varepsilon g$  de  $f$  por  $g = g_1 g_2$  con  $\varepsilon > 0$  produzca en  $f$  las disipaciones que deseamos.  $\square$

### 2.4.2 El caso no orientable, par

Para un diagrama orientable, par no hay una forma tan “natural” como en el caso de los diagramas impares de definir una función de profundidad, puesto que no

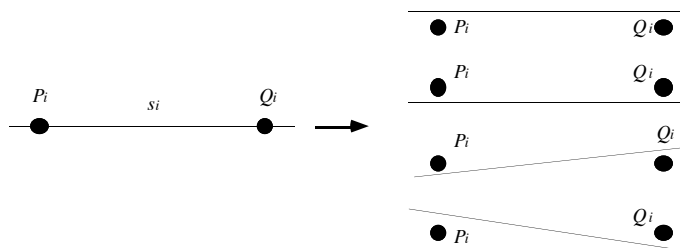


Figura 2.22: Obtención del signo adecuado en  $P_i$  y  $Q_i$ , moviendo  $s_i$ .

hay una cara especial a partir de la cual extender la función de profundidad. En este caso, la función de profundidad aparecerá de una manera un tanto indirecta, pasando primero por una desingularización por medio de un ciclo Euleriano, como las de la sección 2.1.

**Proposición 2.4.4** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano, conexo, no-orientable, par y con sólo puntos dobles. Entonces, existe una función de profundidad en  $\mathcal{D}$  y una desingularización compatible con ella para la cual el esquema de desingularización resultante tiene el mismo tipo topológico que un cierto esquema de desingularización  $\mathcal{D}^*$  con las siguientes propiedades:*

- (i) *El núcleo del esquema de desingularización está formado por circunferencias que no se cortan, una de las cuales contiene a todas las demás en su cara interior.*
- (ii) *Los enlaces son segmentos de recta que unen dos circunferencias anidadas o bien dos puntos de una misma circunferencia por la cara interior de ésta o bien dos puntos opuestos de la circunferencia más exterior, a través del infinito.*

*Demostración:* Consideremos en primer lugar una desingularización de  $\mathcal{D}$  por ciclo Euleriano, como las de la Sección 2.1 y coloquemos el esquema de desingularización en la forma estándar, allí definida. La parte (a) de la Figura 2.23 muestra un ejemplo del resultado de este proceso. Utilizaremos la desingularización por ciclo Euleriano para asignar profundidades a las caras del diagrama, de la siguiente manera.

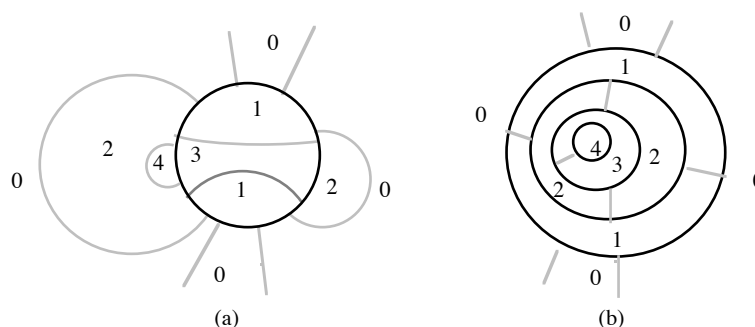


Figura 2.23: Esquema de desingularización por profundidad para el caso par, no orientable.

A las caras que atraviesen el infinito en el esquema de desingularización estándar les asignaremos profundidad 0. A las demás, les asignaremos la profundidad que

expresa el número de cortes necesarios para llegar desde ellas a una de profundidad 0. Esta asignación de profundidades es la que se muestra en la Figura 2.23(a). Su propiedad fundamental es que si en el diagrama  $\mathcal{D}$  sólo desingularizamos los vértices correspondientes a enlaces del esquema de desingularización que atraviesan el infinito y lo hacemos de forma que se unan las dos caras de profundidad cero (es decir, de la misma forma en que están desingularizados en la desingularización Euleriana) obtendremos un diagrama  $\mathcal{D}'$  que sigue siendo conexo (porque el ciclo Euleriano no se ha roto), es orientable y tal que todos los enlaces de esta desingularización, parcial, atraviesan el infinito (y se corresponden, de hecho, con los enlaces de tipo (a) del esquema de desingularización por ciclo Euleriano). Además, las profundidades asignadas a las caras de  $\mathcal{D}'$  por el método anterior coinciden con las profundidades naturales de las caras de  $\mathcal{D}'$ .

A este diagrama conexo y orientable podemos aplicarle el proceso de la Proposición 2.4.1, obteniendo un esquema de desingularización que verifica las condiciones (i) y (ii) del enunciado. Por ejemplo, para el esquema (a) de la Figura 2.23 lo que se obtiene es el esquema (b) de la misma Figura.  $\square$

**Proposición 2.4.5** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano, conexo, no-orientable, par y con sólo puntos dobles. Sea  $n$  el número de puntos dobles. Entonces,  $\mathcal{D}$  puede ser realizado como una desingularización parcial de un cierto diagrama  $\mathcal{D}'$  que es la unión de  $n + 1$  cónicas no degeneradas (concretamente, circunferencias, elipses e hipérbolas) de forma que las cónicas sólo se tocan unas a otras tangencialmente, y en a lo sumo  $2n$  puntos en total (de ellos,  $n$  no deberán ser desingularizados).*

*Demostración:* La construcción es exactamente la misma que la de la Proposición 2.4.2, salvo para los enlaces que atraviesan el infinito. Para estos últimos introduciremos una hipérbola tangente al círculo unidad en los dos puntos extremos del enlace y suficientemente estrecha. Ésto produce un producto de  $n + 1$  cónicas (el círculo unidad más una por cada enlace) en las condiciones que queremos.  $\square$

**Corolario 2.4.6** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano, conexo, no-orientable, par y con sólo puntos dobles. Sea  $n$  el número de puntos dobles. Entonces  $\mathcal{D}$  puede ser realizado como una pequeña perturbación  $f + \varepsilon g$ , donde  $f$  es un producto de  $n + 1$  cónicas no degeneradas, como las de la Proposición 2.4.5 y  $g$  es un producto de  $2n + 2$  rectas.*

*Demostración:* Sea  $f$  el producto de las  $n + 1$  cónicas obtenidas en la Proposición 2.4.5, las cuales tienen  $n$  puntos de tangencia que queremos conservar y  $l < n$  puntos de tangencia que queremos disipar para recuperar el tipo topológico de  $\mathcal{D}$ . Es decir,  $f$  tiene exactamente las mismas condiciones descritas en la demostración del Teorema 2.4.3 y una repetición prácticamente literal de lo allí expuesto valdría aquí.  $\square$

### 2.4.3 El caso no orientable, impar

El caso impar requiere una modificación un poco más grande de nuestro método para el caso orientable. Para empezar, ya los enunciados de 2.4.3 y 2.4.6 no pueden valerlos, puesto que necesitamos obligatoriamente un polinomio  $f$  de grado impar para realizar una curva impar. Además, sabemos que la existencia de una función

de profundidad en un diagrama Euleriano es equivalente a que el mismo sea par, con lo cual tampoco podemos utilizar una función de profundidad, estrictamente hablando, para la desingularización. La base del método será encontrar un ciclo (no Euleriano) en el diagrama con unas buenas propiedades, enunciadas en el siguiente Lema.

**Lema 2.4.7** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano, impar, conexo, con sólo puntos dobles. Entonces existe un ciclo  $C$  de aristas de  $\mathcal{D}$  en las siguientes condiciones:*

- (i) *No pasa más de una vez por ningún vértice.*
- (ii) *Es impar.*
- (iii) *En cada vértice por el que pasa, el ciclo entra y sale por aristas consecutivas (podríamos decir que el ciclo no “corta propiamente” al resto del diagrama).*

*Demostración:* En primer lugar observemos que un ciclo Euleriano que no se corte propiamente (como los mencionados en la Sección 2.1, páginas 76 y siguientes) ya cumple las condiciones (ii) y (iii). Sea  $C$  un ciclo que verifica (ii) y (iii) y que no verifica (i). Demostraremos que, entonces, existe otro ciclo  $C'$  de longitud menor que también verifica (ii) y (iii). Por tanto, un ciclo de longitud mínima entre todos los que las verifican (ii) y (iii) necesariamente verifica también (i). De hecho, el proceso que sigue nos permite, comenzando con un ciclo cualquiera que verifique (ii) y (iii) (por ejemplo, uno Euleriano que no se corte propiamente) encontrar uno que verifique también (i).

Sea  $P$  un vértice por el cual el ciclo  $C$  pasa dos veces. Sean  $a, b, c$  y  $d$  las cuatro semiaristas que inciden en  $P$ , en ese orden. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el ciclo comienza en  $a$  y termina en  $d$ . Afirmamos que en esas condiciones  $b$  aparece delante de  $c$  en el ciclo o, dicho de otra forma, que las dos pasadas de  $C$  por el vértice  $P$  son “antiparalelas” (como en la Figura 2.24(a)) en vez de “paralelas”, como las de la Figura 2.24(b)). La razón de ésto es que desingularizando los vértices por los que pasa el ciclo  $C$  de forma que el ciclo no se desconecte obtenemos una pseudorrecta (por la condición (ii)). El sentido de recorrido del ciclo induce una orientación global en el complementario de ésta pseudorrecta, lo cual sólo es posible en el caso antiparalelo.

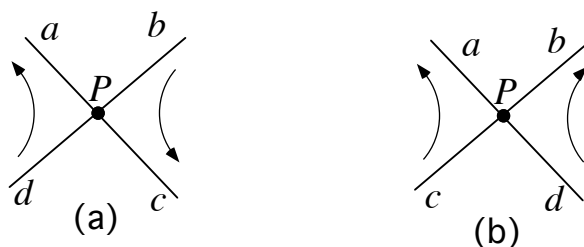


Figura 2.24: Significado de ‘antiparalelo’ y ‘paralelo’ en la demostración del Lema 2.4.7.

Entonces, podemos dividir el ciclo  $C$  en dos subciclos disjuntos: uno que comienza en  $a$  y acaba en  $b$  y otro que comienza en  $c$  y acaba en  $d$ . Puesto que  $C$  era impar, uno de los dos subciclos es también impar. Dicho subciclo satisface las condiciones (ii) y (iii) del Lema y es de longitud menor que  $C$ .  $\square$



Con la ayuda de un ciclo en estas condiciones podemos obtener lo siguiente:

**Proposición 2.4.8** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano, conexo, impar y con sólo puntos dobles. Sea  $n$  el número de puntos dobles. Entonces,  $\mathcal{D}$  puede ser realizado como una desingularización parcial de un cierto diagrama  $\mathcal{D}'$  que es la unión de  $n$  cónicas no degeneradas (concretamente, circunferencias, elipses y parábolas) y una recta (la del infinito) de forma que las cónicas y la recta sólo se tocan unas a otras tangencialmente, y en a lo sumo  $2n$  puntos en total (de ellos,  $n$  no deberán ser desingularizados).*

*Demostración:* Sea  $C$  un ciclo de aristas de  $\mathcal{D}$  como el del Lema 2.4.7. Asignemos a todas las caras adyacentes al ciclo profundidad 0 y asignemos como profundidad a cada una de las demás el mínimo número de cortes con el diagrama necesarios para llegar a una cara de profundidad 0. Ésto no produce una función de profundidad como las definidas en la Sección 2.2.2, puesto que hay caras adyacentes —por ejemplo, las adyacentes al ciclo  $C$ — que tienen la misma profundidad.

Sin embargo, si desingularizamos los vértices por los que pasa  $C$  de forma que el ciclo no se desconecte, obtendremos como resultado un diagrama Euleriano no conexo una de cuyas componentes es una pseudorrecta (la que proviene del ciclo  $C$  que ya es una pseudorrecta en sí) y una o varias componentes conexas orientables. Esta desingularización es compatible con la asignación de profundidades, en el sentido de que todas las caras de profundidad 0 (las adyacentes al ciclo) quedan unidas, formando la cara exterior de las componentes orientables. Las caras interiores de las componentes orientables quedan asignadas con su profundidad “natural”. Además, los enlaces que aparecen en el diagrama de desingularización van todos de la pseudorrecta a una de las componentes orientables, puesto que los únicos vértices que hemos desingularizado son aquéllos por los que pasaba el ciclo  $C$  y  $C$  pasaba una sólo vez por cada uno de ellos.

Gracias a una isotopía global del plano proyectivo podemos suponer que la pseudorrecta que proviene del ciclo  $C$  es de hecho la recta del infinito. Una vez hecho ésto, el resto de la construcción es muy similar al de la Proposición 2.4.2. Supongamos en principio que las componentes conexas orientables son, simplemente, óvalos (sin ninguna estructura interior). Colapsémoslos a puntos y coloquémoslos en el plano afín de forma que los enlaces que los unen a la recta del infinito puedan ser realizados como segmentos de recta (que, vistos en el plano afín, serán semirrectas). Ésto puede hacerse usando las mismas ideas de “regiones estrelladas” de la Proposición 2.4.2. Como hicimos allí, “engordemos” uno de los enlaces de cada componente conexa, hasta convertirlo en una parábola, y añadamos nuevas parábolas que lo unan a la recta del infinito, una a lo largo de cada uno de los demás enlaces. Ésto termina la construcción, para este caso particular. En el caso general de que las componentes orientables tengan “estructura”, las desingularizaremos como en la Proposición 2.4.1 y las realizaremos como en la Proposición 2.4.2, de forma que su contorno (que allí tomábamos como una circunferencia) coincida con la parábola que colocamos en el primer enlace de la componente, y de forma que los puntos de tangencia de ésta parábola con las elipses interiores estén situados de la forma adecuada respecto a los enlaces exteriores (lo cual puede hacerse gracias a la última condición de la Proposición 2.4.2). Ésto termina la construcción.  $\square$

A priori podría pensarse que a partir del resultado 2.4.8 es fácil obtener un Corolario análogo al Teorema 2.4.3 o al Corolario 2.4.6. Sin embargo, en la demostración de estos dos últimos había una condición que aquí no se verifica. Hablamos de la condición de que los puntos de tangencia entre diferentes cónicas podían elegirse sin que haya tres puntos no alineados. En el caso impar ésto no va a ocurrir, puesto que todos los puntos de tangencia con la recta del infinito (que, en el peor caso, son  $n$ ) están alineados. Esta condición es realmente necesaria para nuestros métodos, como veremos por medio de un ejemplo.

Considérese el diagrama de la derecha de la Figura 2.25 y supongamos que queremos obtenerlo como una pequeña perturbación de la curva de la izquierda, que es el producto de tres elipses y una recta. Ésto es imposible, si queremos que la perturbación sea del tipo  $f + \varepsilon g$ .

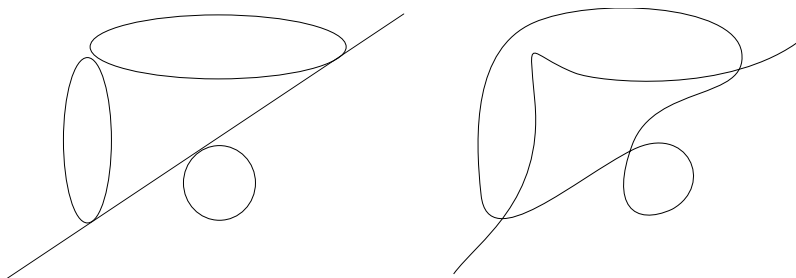


Figura 2.25: Perturbación imposible de producir en la forma  $f + \varepsilon g$ .

En efecto, para que una perturbación del tipo  $f + \varepsilon g$  produzca el tipo topológico de la derecha es necesario que  $g$  tenga un punto singular en cada uno de los tres puntos de tangencia a lo largo de la recta y que tenga un cambio de signo en cada uno de los dos segmentos de la recta entre puntos de tangencia. Ésto implica que  $g$  tenga, al menos, grado 8, puesto que tiene 8 intersecciones (contadas con multiplicidad) con la recta. No queremos decir con ésto que el diagrama de la derecha sea especialmente difícil de realizar. De hecho, puede ser realizado con grado 5 como producto de una recta y una lemniscata. Lo que queremos decir es que no puede ser obtenido de esta manera precisa y que, por tanto, la Proposición 2.4.8 no puede proporcionar un método de construcción tan directo como el que teníamos en el caso par.

Es por ésto por lo que en la construcción de la curva para el caso impar vamos a hacer un pequeño truco preliminar, consistente en perturbar primero el producto de la recta con una de las elipses.

**Corolario 2.4.9** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano, conexo, impar y con sólo puntos dobles. Sea  $n$  el número de puntos dobles. Entonces  $\mathcal{D}$  puede ser realizado como una pequeña perturbación  $f + \varepsilon g$ , donde  $f$  es un producto de  $n - 1$  cónicas no degeneradas y una cúbica con un punto doble ordinario y  $g$  es un producto de  $2n + 1$  rectas.*

*Demostración:* Sean  $C_1, \dots, C_n$  las  $n$  cónicas de la Proposición 2.4.5 y llamemos  $l$  a la recta del infinito. Supongamos que  $C_n$  es una de las cónicas tangentes a  $l$ . Consideremos el producto  $C_n l$  y perturbémoslo ligeramente de forma que no cambie su topología, pero el punto de tangencia se convierta en un punto doble no degenerado. Ésta perturbación, a la que denotaremos por  $c'_n$ , será la cúbica que

aparece en el enunciado. Movamos ligeramente el resto de las cónicas  $C_1, \dots, C_{n-1}$  para que vuelvan a ser tangentes a  $C'_n$ , de la misma forma que lo eran a  $C_n$  o a  $l$ . Ésto puede siempre hacerse de forma que entre los nuevos puntos de tangencia no haya tres alineados, ni dos alineados con el punto doble de la cónica. Sea  $f$  el producto de las  $n - 1$  cónicas y la cúbica.

El resultado es que  $f$  tiene  $n - 1$  puntos de tangencia  $P_1, \dots, P_{n-1}$  que deseamos conservar y  $l$  ( $l \leq n$ ) puntos de tangencia  $Q_1, \dots, Q_l$  que deseamos eliminar. Para que ésto ocurra con una perturbación del tipo  $f + \varepsilon g$  es suficiente que  $g$  tenga un punto doble ordinario en cada uno de los  $P_i$  y que tenga el signo adecuado en sus alrededores y en los  $Q_i$ . Un producto  $g$  de  $2n + 1$  rectas con estas características puede obtenerse de la misma manera que lo hicimos en la demostración del Corolario 2.4.3. Nótese que allí aparecían dos rectas  $s_{n+1}$  y  $s_{n+2}$  que no jugaban ningún papel salvo el de aumentar el grado de  $g$ . Ésto significa que no tendremos ningún problema en conseguir que el grado de  $g$  sea  $2n + 1$  en vez de  $2n + 2$ .  $\square$

#### 2.4.4 El caso no conexo

En todo lo anterior hemos supuesto que el diagrama  $\mathcal{D}$  era conexo. Terminamos esta sección viendo que, en realidad, la generalización a diagramas no conexos es muy sencilla.

**Lema 2.4.10** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano con sólo puntos dobles y  $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k$  sus componentes conexas. Sean  $C_1, \dots, C_k$  curvas algebraicas que realizan a cada una de ellas, definidas por polinomios  $f_1, \dots, f_k$ . Supongamos, además, que para las componentes orientables la correspondiente curva algebraica no corta a una cierta recta. Entonces,  $\mathcal{D}$  se puede realizar algebraicamente como un producto  $f'_1 \dots f'_k$ , donde cada  $f'_i$  es una transformación proyectiva del correspondiente  $f_i$ .*

*Demostración:* En primer lugar, observemos que a lo sumo una de la componentes conexas de  $\mathcal{D}$  es no-orientable. Supongamos que es  $\mathcal{D}_1$  (o que no hay ninguna) y realicémosla por  $C_1$ . Elijamos un sistema de coordenadas afines en el plano proyectivo. El hecho de que el resto de las curvas  $C_2 \dots C_k$  no corten a una cierta recta significa que, mediante una transformación proyectiva, podemos hacer que no corten a la recta del infinito. Una vez hecho ésto, bastará ir trasladándolas, suficientemente reducidas y quizá invertidas a la cara de  $C_1$  en la que deben estar para obtener el tipo topológico adecuado.  $\square$

**Teorema 2.4.11** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano, conexo, orientable, con sólo puntos dobles. Sea  $n$  el número de puntos dobles y  $k$  el de componentes conexas. Entonces  $\mathcal{D}$  puede ser realizado como una pequeña perturbación  $f + \varepsilon g$ , donde:*

- Si  $\mathcal{D}$  es par,  $f$  es un producto de  $n + k$  cónicas no degeneradas y  $g$  es un producto de  $2n + 2k$  rectas.
- Si  $\mathcal{D}$  es impar,  $f$  es un producto de  $n + k - 2$  cónicas no degeneradas y una cúbica con un punto doble ordinario y  $g$  es un producto de  $2n + 2k - 1$  rectas.

*Demostración:* La demostración es inmediata a la luz del Lema 2.4.10 y de los resultados 2.4.3, 2.4.6 y 2.4.9:

Sean  $f_i$ , para  $i = 1, \dots, k$  los polinomios a perturbar para realizar la componente  $i$ -ésima, obtenidos a partir de los resultados 2.4.3, 2.4.6 y 2.4.9, según la paridad y la orientabilidad de la componente. Como en el Lema 2.4.10 hagamos una transformación proyectiva a cada uno de ellos que lo sitúe en el lugar adecuado, convirtiendo cada polinomio  $f_i$  en un cierto polinomio  $f'_i$ . Además, podemos conseguir que entre los puntos de tangencia entra las cónicas (y quizá la cúbica) que forman parte de los  $f'_i$  no haya tres alineados, ni dos alineados con el punto singular de la cúbica. Sea  $f$  el producto de los  $f'_i$ . En estas condiciones, del mismo modo que en los resultados 2.4.3, 2.4.6 y 2.4.9, es fácil obtener un producto de rectas  $g$  del mismo grado que  $f$  que produzca las disipaciones adecuadas en cada uno de los puntos singulares de  $g$ .  $\square$

## 2.5 En qué casos exactamente la construcción anterior es de grado óptimo

La primera pregunta que surge a la luz del método de realización de curvas algebraicas de la Sección 2.4 es cómo de bueno es el grado obtenido. Nótese que, para curvas no singulares, los grados se traducen en  $2k$  ó  $2k - 1$ , siendo  $k$  el número de componentes conexas. Ésta cota es trivial porque toda curva algebraica proyectiva no singular es topológicamente equivalente a un cierto producto de  $k$  cónicas (o de  $k - 1$  cónicas y una recta, si es impar). Sin embargo, también es genéricamente óptima, puesto que si todos los óvalos de la curva están anidados uno dentro de otro, una recta que corte al más interior de ellos cortará a la curva en  $2k$  puntos ( $2k - 1$  para el caso impar).

Para curvas singulares, ocurre algo semejante. La Figura 2.26 muestra un diagrama Euleriano conexo con 3 puntos dobles que no puede ser realizado algebraicamente con grado menor que 8. El ejemplo es fácil de generalizar a cualquier número de puntos dobles y a diagramas no conexos o con puntos de multiplicidad mayor que dos.

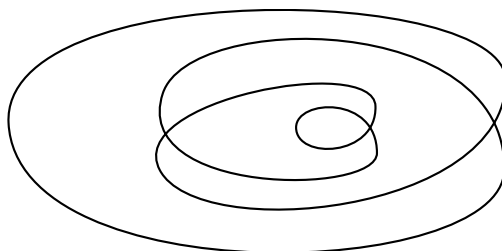


Figura 2.26: Un diagrama que no puede ser realizado con grado menor que 8.

**Proposición 2.5.1** Sean  $k$ ,  $n$  y  $m_i$ , con  $i = 1, \dots, n$  números enteros tales que  $k > 0$ ,  $n \geq 0$  y  $m_i \geq 2$ . Entonces, podemos construir un cierto diagrama Euleriano y orientable  $\mathcal{D}$  en el plano proyectivo con  $k$  componentes conexas y  $n$  puntos singulares de multiplicidades respectivas  $m_1, \dots, m_n$  que posee una cara de profundidad  $\sum(m_i - 1) + k$  respecto a la cara no orientable. Por tanto,  $\mathcal{D}$  no puede ser del mismo tipo topológico que ninguna curva algebraica de grado menor que  $2(\sum(m_i - 1) + k)$ .

*Demostración:* En primer lugar, podemos restringirnos al caso conexo. Si somos capaces de construir un diagrama conexo que posee una cara de profundidad  $\sum(m_i - 1) + 1$ , bastará añadir  $k - 1$  óvalos anidados en dicha cara para conseguir una cara de profundidad  $\sum(m_i - 1) + k$ . En el caso conexo procederemos por inducción. Sea  $\mathcal{D}_0$  un diagrama Euleriano, conexo y orientable con  $n - 1$  puntos singulares de multiplicidades  $m_1, \dots, m_{n-1}$  que posee una cara de profundidad  $\sum_{i=1}^{n-1}(m_i - 1) + 1$  respecto a la cara no orientable. Entonces el diagrama que resulta de pegar en un punto de dicha cara  $m_n - 1$  pequeñas circunferencias tangentes tendrá  $n$  puntos singulares de multiplicidades  $m_1, \dots, m_n$  y posee una cara de profundidad  $\sum_{i=1}^n(m_i - 1) + 1$  respecto a la cara no orientable.

La última afirmación de la Proposición es trivial. Sea  $C$  una curva algebraica que realiza al diagrama  $\mathcal{D}$ . Sea  $P$  un punto de la cara no orientable y sea  $Q$  un punto de la cara de profundidad  $\sum(m_i - 1) + k$ . Sea  $r$  una recta que pasa por ambos y supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $r$  no pasa por ningún punto singular de  $C$ . Entonces, cada uno de los dos intervalos de recta  $[P, Q]$  de la recta  $r$  corta a  $C$  en al menos  $\sum(m_i - 1) + k$  puntos. Por tanto,  $C$  tiene grado al menos  $2(\sum(m_i - 1) + k)$ .  $\square$

Volvamos ahora al caso de diagramas con sólo puntos dobles. Nuestro propósito es estudiar exactamente qué diagramas necesitan el grado máximo ( $2n + 2k$  para los diagramas pares y  $2n + 2k - 1$  para los impares) para ser realizados. El diagrama mostrado en la Figura 2.26, así como los obtenidos en la demostración de la Proposición 2.5.1, tienen una peculiaridad que vamos a relacionar con el hecho de que necesiten tan alto grado para ser realizados. A saber, que para cualquiera de sus vértices existe una desingularización del mismo que desconecta al diagrama. Cuando un vértice de un diagrama tenga dicha propiedad diremos que tal vértice *desconecta al diagrama*.

### 2.5.1 Diagramas con algún vértice que no los desconecta

Nuestro objetivo en esta Sección es ver que si un diagrama Euleriano con sólo puntos dobles posee un vértice que no lo desconecta, entonces puede ser realizado como curva algebraica con grado estrictamente menor al obtenido en el Teorema 2.4.11, es decir, con grado menor o igual que  $2n + 2k - 2$  para el caso par y  $2n + 2k - 3$  para el caso impar. Gracias al Lema 2.4.10 bastará estudiar el caso conexo y ver que un diagrama Euleriano, conexo y con sólo puntos dobles con algún vértice que no lo desconecta puede ser realizado con grado  $2n$  si es par y  $2n - 1$  si es impar. Comencemos por el caso orientable.

**Lema 2.5.2** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano, conexo, orientable y con sólo puntos dobles. Sea  $n$  el número de puntos dobles y supongamos que alguno de ellos no desconecta a  $\mathcal{D}$ . Entonces  $\mathcal{D}$  puede ser realizado con grado  $2n$ . Además, su realización se puede hacer sin cortar a la recta del infinito y como pequeña perturbación de una curva cuyo contorno es una circunferencia.*

*Demostración:* Para un diagrama conexo y orientable la existencia de un vértice que no desconecta al diagrama equivale a la existencia de dos círculos  $c_p$  y  $c_{p+1}$  de profundidades consecutivas  $p$  y  $p + 1$  unidos por al menos dos enlaces en el esquema de desingularización de la Proposición 2.4.1. Es fácil observar que, en

estas condiciones, el proceso allí realizado para disponer los círculos y los enlaces se puede llevar a cabo de manera que los dos enlaces que unen a  $c_p$  y  $c_{p+1}$  sean prolongaciones de un diámetro de  $c_{p+1}$ . (Una forma de hacer esto es considerar los dos enlaces como si fueran uno sólo que une dos puntos interiores de  $c_p$  y después añadir  $c_{p+1}$  suficientemente pequeño, y todo lo que haya en su interior).

En estas condiciones, en el paso de la Proposición 2.4.1 a la Proposición 2.4.2, en vez de introducir dos elipses diferentes para los dos enlaces podemos introducir una sólo, lo cual nos ahorra dos unidades de grado en el polinomio  $f$  a perturbar en el Teorema 2.4.3. Ésto no impide la obtención del polinomio  $g$  para la perturbación, porque había en él dos rectas ( $s_{n+1}$  y  $s_{n+2}$ ) cuya única finalidad era, de hecho, elevar el grado de  $g$ .  $\square$

Para el caso no orientable, descompondremos el diagrama en partes, cada una de las cuales no contiene vértices que lo desconectan. Ésto se hará gracias al siguiente Lema:

**Lema 2.5.3** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama conexo y orientable con sólo puntos dobles y sea  $P$  un punto doble de  $\mathcal{D}$  tal que una de las desingularizaciones en  $P$  desconecta a  $\mathcal{D}$ . Sean  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  los dos subdiagramas que se obtienen después de la desingularización. Supongamos que  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  pueden realizarse algebraicamente con grados  $d_1$  y  $d_2$  y que, si son orientables, su realización puede hacerse como pequeña perturbación de una curva cuyo contorno exterior es una circunferencia. Entonces,  $\mathcal{D}$  puede realizarse algebraicamente con grado  $d_1 + d_2$ .*

*Demostración:* En primer lugar, al menos uno de los dos diagramas  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  ha de ser orientable, puesto que dos diagramas no orientables se cortarían necesariamente. Supongamos que  $\mathcal{D}_1$  es orientable y que, por tanto, se puede realizar con grado  $d_1$  como pequeña perturbación de una curva con contorno circular. En estas condiciones, el contorno de  $\mathcal{D}_1$  sigue siendo convexo, excepto quizás en un pequeño entorno de cada punto singular. Por tanto, para realizar  $\mathcal{D}$  nos bastará llevar la realización de  $\mathcal{D}_1$ , suficientemente reducida, hasta que las partes de  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  unidas por el enlace resultante de la desingularización sean tangentes y  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  no se corten en ningún otro punto. Esto produce la curva de grado  $d_1 + d_2$  que buscamos.  $\square$

Con el Lema 2.5.3, será fácil (cf. 2.5.6) reducir la rebaja del grado para los diagramas con un vértice que no los desconecta a la de los diagramas en los que *ningún* vértice los desconecta. Para este caso particular la rebaja se hace por separado para diagramas pares e impares, en los Lemas 2.5.4 y 2.5.5.

**Lema 2.5.4** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano, conexo, no orientable, par y con sólo puntos dobles. Sea  $n$  el número de puntos dobles y supongamos que ninguno de ellos desconecta a  $\mathcal{D}$ . Entonces,  $\mathcal{D}$  puede ser realizado con grado  $2n$ .*

*Demostración:* Consideremos el esquema de desingularización de  $\mathcal{D}$  por una función de profundidad descrito en la Proposición 2.4.4. Si dicho esquema tiene algún círculo además del más exterior, entonces dicho círculo ha de estar unido por dos enlaces al que lo contiene inmediatamente (si sólo estuviera unido por un enlace, el vértice correspondiente a dicho enlace desconectaría al diagrama). Por tanto, en este caso

podemos usar el mismo procedimiento del Lema 2.5.2 para rebajar el grado de la construcción en dos unidades.

En caso contrario, lo que tenemos como esquema de desingularización es una única circunferencia con enlaces que unen pares de puntos de ella (bien a través del infinito o a través del interior). Además, podemos suponer que los enlaces son segmentos de recta, bien por el interior o por el infinito y que los exteriores están contenidos en rectas que pasan por el origen. Los dos puntos unidos por cada enlace interior no son consecutivos en la circunferencia, porque si lo fueran el correspondiente vértice desconectaría el diagrama. Sea  $e$  el número de enlaces exteriores e  $i$  el de interiores (de forma que  $e + i = n$ ). En la parte (a) de la Figura 2.27 se tiene  $e = 3$  e  $i = 4$ .

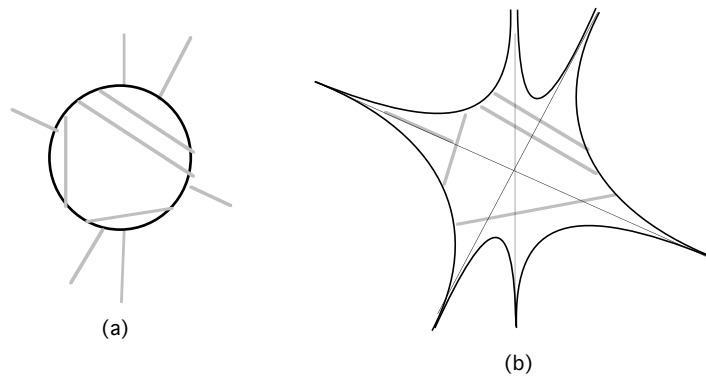


Figura 2.27: Rebaja del grado utilizando hipérbolas, en el caso orientable-par.

Consideremos las  $e$  rectas  $l_1, \dots, l_e$  que contienen a los enlaces exteriores y las hipérbolas  $h_1, \dots, h_e$  donde  $h_i$  es tangente dos veces al círculo unidad y tiene a  $l_i$  y  $l_{i+1}$  por asíntotas. Si no hubiera enlaces interiores, el diagrama  $\mathcal{D}$  sería equivalente al producto de las  $e$  hipérbolas, (véase la parte (b) de la Figura 2.27) y habremos terminado. Si hay enlaces interiores, en cualquier caso éstos unirán hipérbolas diferentes o dos ramas diferentes de la misma hipérbola (si no fuera así el correspondiente vértice desconectaría a  $\mathcal{D}$ ), como en la parte (b) de la Figura 2.27. Por la elección de las hipérbolas, los enlaces interiores siempre se pueden disponer como segmentos de recta, aunque para ello puede ser necesario mover sus extremos. Además, podemos suponer que sus extremos están en posición general, es decir, que no hay tres alineados. Podríamos ahora introducir una elipse a lo largo de cada enlace y después perturbar el producto de las hipérbolas y las elipses como de costumbre, si no fuera porque los  $e$  puntos de tangencia de las hipérbolas están alineados, en la recta del infinito. Por esta razón vamos a hacer la perturbación en dos etapas.

Llamemos  $f_e$  al producto de las hipérbolas y perturbémoslo por medio del polinomio  $g_e = z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{e-1}$ . Obsérvese que  $g_e$  contiene dos veces como factor a la recta del infinito y, por tanto, tiene un punto doble en cada uno de los puntos de contacto de las hipérbolas, que son tangencias en el infinito. Recordemos, de la Sección 2.3 que al perturbar una doble tangencia por un polinomio que tenga un punto singular en la misma (como es  $g_e$ ), sólo hay dos posibles disipaciones, una que produce un punto doble ordinario, sin cambio en la topología de la curva, y otra que produce un punto doble con dos ramas complejas conjugadas (es decir, un punto aislado de la curva real). Además, el hecho de que se produzca una u otra

depende únicamente de la distribución de los signos de  $f_\varepsilon$  y  $g_\varepsilon$ . Como la distribución de signos de  $g_\varepsilon$  y  $f_\varepsilon$  es la misma en el entorno de cada punto de tangencia de las hipérbolas, una perturbación  $f_\varepsilon = f_\varepsilon + \varepsilon g_\varepsilon$  produce el mismo tipo de disipación en todos ellos. Por tanto, una elección adecuada del signo de  $\varepsilon$  hace que los puntos de tangencia se conviertan en puntos dobles ordinarios, sin ningún cambio en la topología de la curva. Sea  $C_\varepsilon$  la curva que se obtiene de esta manera.

Si, después de la pequeña perturbación del producto  $f_\varepsilon$  de las hipérbolas, introducimos una elipse a lo largo de cada enlace de forma que sea tangente a la curva  $C_\varepsilon$  en los dos extremos del enlace, el producto de  $f_\varepsilon$  y las elipses podrá ser perturbado con los mismos métodos del Teorema 2.4.3.  $\square$

**Lema 2.5.5** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano, conexo, impar y con sólo puntos dobles. Sea  $n$  el número de puntos dobles y supongamos que ninguno de ellos desconecta a  $\mathcal{D}$ . Entonces,  $\mathcal{D}$  puede ser realizado con grado  $2n - 1$ .*

*Demostración:* Consideremos el ciclo Euleriano del Lema 2.4.7, utilizado en la Proposición 2.4.8 para la construcción de la curva que realiza a un diagrama impar. Si  $\mathcal{D}$  tiene algún vértice fuera de dicho ciclo (es decir en la parte orientable de la construcción) entonces el mismo tipo de argumentos que hemos usado en el caso orientable (cf. 2.5.2) nos sirve para rebajar el grado. En caso contrario, la desingularización a lo largo del ciclo produce un esquema como el de la Figura 2.28(a), donde la circunferencia más exterior (con cada par de puntos opuestos identificados) representa a la recta del infinito del plano proyectivo, la cual forma parte del diagrama. Cada uno de los demás óvalos está unido a la recta del infinito por al menos dos enlaces, puesto que si no algún vértice desconectaría al diagrama. Óvalos diferentes no están unidos entre sí.

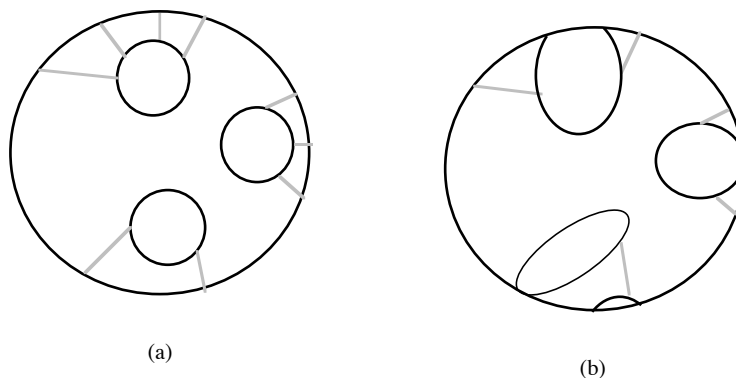


Figura 2.28: Rebaja del grado en el caso impar.

Si sólo hubiera un óvalo, con sólo dos enlaces, entonces el diagrama quedaría realizado por el producto de la recta del infinito con una cónica que la corta dos veces (una hipérbola), como en la Figura 2.28(b).

Si hay más enlaces y/o óvalos los óvalos adicionales pueden ser siempre añadidos de forma que sean tangentes a la recta del infinito (o quizás a la hipérbola) en el lugar donde uno de sus enlaces incidía, y el resto de los enlaces ser colocados en forma de segmentos de recta (como en la Figura 2.28(b)). En estas condiciones, las mismas técnicas de la construcción general del caso impar permiten rebajar el grado en dos unidades.  $\square$



**Corolario 2.5.6** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano, conexo, no orientable y con sólo puntos dobles. Sea  $n$  el número de puntos dobles.*

- (i) *Si  $\mathcal{D}$  es par, entonces posee algún vértice que no lo desconecta y puede ser realizado con grado  $2n$ .*
- (ii) *Si  $\mathcal{D}$  es impar y posee algún vértice que no lo desconecta, entonces puede ser realizado con grado  $2n - 1$ .*

*Demostración:* Primero obtendremos la realización con el grado que se pide, suponiendo que el diagrama tiene un vértice que no lo desconecta, y después veremos que todo diagrama par lo tiene. Para conseguir la rebaja en el grado de la construcción, procederemos por inducción sobre el número de vértices que desconectan al diagrama. El caso de que ningún vértice lo desconecte ha sido tratado en los Lemas 2.5.5 y 2.5.4.

Si  $P$  es un vértice que desconecta a  $\mathcal{D}$ , sean  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  los dos diagramas que se obtienen al desingularizar  $P$  de forma que se desconecte  $\mathcal{D}$ . Uno de ellos (digamos  $\mathcal{D}_1$ ) ha de ser no orientable (contener a alguna pseudorrecta contenida en  $\mathcal{D}$ ) y el otro ( $\mathcal{D}_2$ ) ha de ser orientable, porque dos diagramas no orientables siempre se cortan. Además,  $\mathcal{D}_1$  tiene la misma paridad que  $\mathcal{D}$ , por ser  $\mathcal{D}_2$  par. Sean  $n_1$  y  $n_2$  sus números de vértices respectivos,  $n_1 + n_2 = n - 1$ . Alguno de los dos diagramas  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$  tiene un vértice que no lo desconecta. Por tanto, pueden ser realizados con grados  $d_1$  y  $d_2$ , donde  $d_1 + d_2 = 2n_1 + 2n_2 + 2 = 2n$  en el caso par y  $d_1 + d_2 = 2n_1 + 2n_2 + 1 = 2n - 1$  en el impar (usando la hipótesis inductiva para  $\mathcal{D}_1$  y el Lema 2.5.2 para  $\mathcal{D}_2$ ). Por último, el Lema 2.5.3 nos dice como realizar  $\mathcal{D}$  con grado  $d_1 + d_2$ , que es el que buscamos.

El hecho de que todo diagrama no orientable par contiene puntos que no lo desconectan se sigue de las consideraciones anteriores: desconectando  $\mathcal{D}$  en todos los vértices que lo desconectan y eliminando las componentes orientables, podremos obtener un diagrama que sigue siendo conexo, no orientable y par y que no posee vértices que lo desconecten. Como todo diagrama no orientable y par posee al menos un vértice, dicho diagrama (y, por tanto, también  $\mathcal{D}$ ) posee al menos un vértice que no lo desconecta.  $\square$

## 2.5.2 El caso de que todos los vértices desconectan al diagrama

La condición de que todos los vértices desconecten a un diagrama es necesaria para que un diagrama par con sólo puntos dobles no pueda ser realizado con grado menor que  $2n + 2k$ , y uno impar con grado menor que  $2n + 2k - 1$  (cf. el Lema 2.5.2 y el Corolario 2.5.6). Sin embargo, no es una condición suficiente. Por ejemplo, el producto de dos elipses que se corten en cuatro puntos puede ser perturbado para producir una curva algebraica con tres puntos singulares, cada uno de los cuales la desconecta. En este apartado veremos qué condición adicional es necesario considerar.

Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano con sólo puntos dobles, todos los cuales lo desconectan. Sea  $n$  el número de puntos dobles y  $k$  el de componentes conexas. En particular, sabemos que  $\mathcal{D}$  no puede ser no orientable y par. Sea  $\mathcal{D}_0$  el diagrama sin puntos dobles que se obtiene de desingularizar cada vértice de  $\mathcal{D}$  en la forma en que

lo desconecte. La estructura de las componentes conexas de  $\mathcal{D}_0$  es la de un bosque (grafo cada una de cuyas componentes conexas es un árbol). Ésto es así porque cada componente que sea un óvalo tiene una cara exterior (no orientable) y una interior (orientable) y podemos considerar las componentes de su interior como sus “descendientes” en el grafo. En el caso impar, el bosque es conexo (i.e., un árbol) y tiene como raíz a la única pseudorrecta de  $\mathcal{D}_0$ . En el caso par, cada componente conexas tiene como raíz a un óvalo maximal, ésto es, no contenido en el interior de ningún otro. Por simplicidad, en el caso par supondremos la existencia de una raíz común, ficticia, para todos los árboles del bosque, la cual no tiene ningún significado geométrico. Ésto convierte al bosque en un árbol. Obsérvese que en esta estructura de árbol no interviene para nada el hecho de que dos componentes estén unidas por un enlace o no.

Para esta clase de diagramas, hay una manera más sencilla que la de la Sección 2.4 de realizarlos como curvas algebraicas de grado  $2n + 2k$  en el caso par y  $2n + 2k - 1$  en el caso impar. Basta numerar las componentes conexas de  $\mathcal{D}_0$  (que son exactamente  $n + k$ , puesto que cada desingularización de un vértice de  $\mathcal{D}$  ha añadido una componente conexas) en un orden compatible con el árbol, es decir, de forma que la componente  $i$ -ésima no esté dentro de ninguna que la precede en número. Una vez hecho ésto, cada componente puede ser añadida al digrama  $\mathcal{D}$  como una elipse (quizá tangente a alguna de las ya colocadas, si hay un enlace que las conecta) o como un punto de aislado. Es decir, cada componente será añadida con grado dos (excepto la primera del caso impar, que se tomará como una recta) y por tanto el grado total resultante será  $2n + 2k$  ( $2n + 2k - 1$  en el caso impar).

La rebaja del grado se hará con el siguiente Lema:

**Lema 2.5.7** *En las condiciones anteriores, si  $n + k \geq 3$  y las tres últimas componentes a añadir no están mutuamente anidadas, entonces se pueden añadir a la vez aumentando el grado en 4 en vez de 6, excepto si están las tres enlazadas a la pseudorrecta del caso impar.*

*Demostración:* Las hojas del árbol son o bien puntos aislados, o bien óvalos sin componentes en su interior.

Si las tres componentes están conectadas entre sí por enlaces, al ser reenlazadas tienen la estructura del ejemplo de la izquierda de la Figura 2.29. Una curva así puede ser conseguida con grado cuatro como perturbación de dos elipses tangentes y, después, trasladada a la cara adecuada del diagrama formado por el resto de las componentes o a ser tangente a la componente adecuada.

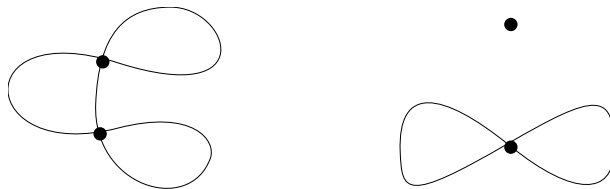


Figura 2.29: Curvas de grado 4 utilizadas en la demostración del Lema 2.5.7.

Si dos de ellas están conectadas y la tercera no, al reenlazarlas obtenemos un “ocho” y un punto aislado o, quizás, un ocho y un óvalo. La curva de la derecha de la Figura 2.29, de ecuación  $z^2y^2 = z^2x^2 + x^4$ , es un ocho con un punto aislado en el

infinito. El punto aislado puede moverse a cualquier posición del plano proyectivo, excepto los del eje  $X$ , mediante una transformación proyectiva que deje invariante a dicho eje y el ocho se puede hacer tan próximo al eje como se quiera, escalando la variable  $y$ . Si fuera necesario, la curva se puede perturbar para que el punto aislado se convierta en un óvalo. Por tanto, en el caso de que ninguna de las dos partes (óvalo o punto aislado y ocho) deba ser enlazada a las demás componentes es fácil añadirlas en el lugar apropiado. También es fácil conseguir que el ocho sea tangente a la componente apropiada, en el caso de que sólo él deba ser enlazado.

En el caso de que los dos deban ser enlazados, no podemos conseguir fácilmente que ambos sean tangentes a la componente apropiada, pero sí podemos conseguir que el ocho sea tangente y el óvalo corte en dos puntos a la componente que queremos. Perturbando la curva algebraica así obtenida, podemos conseguir que uno de los dos puntos de intersección del óvalo se disipe y una de las dos disipaciones hace que la topología resulte la que queremos. La perturbación puede hacerse de forma similar a las descritas en 2.4.3 y 2.4.9 y no entraremos a detallarlas.

Supongamos por último que las tres componentes a añadir no están enlazadas entre sí. Sean  $P$ ,  $Q$  y  $R$  los puntos de las demás componentes a los cuales debemos enlazarlas (o puntos arbitrarios en la cara adecuada, para las que no necesiten ser enlazadas). Con la única excepción del caso en que el diagrama sea orientable y las tres componentes estén enlazadas a la pseudorrecta, podemos suponer que  $P$ ,  $Q$  y  $R$  no están alineados. Consideremos dos cónicas diferentes que se cortan exactamente en  $P$ ,  $Q$  y  $R$  (uno de los cortes deberá ser tangencial) y sumemos sus cuadrados. Ésto produce un polinomio cuya curva algebraica consta exactamente de los tres puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$ , lo cual termina la construcción si las tres componentes a añadir son puntos aislados.

Si no fuera así, perturbando ligeramente el polinomio es fácil conseguir que uno, dos o los tres puntos se conviertan en pequeños óvalos. Cada óvalo correspondiente a una componente no enlazada estará ya colocado en su lugar. Cada óvalo correspondiente a una componente enlazada cortará dos veces a la componente a la que debería ser tangente. Perturbando de nuevo, igual que en el caso de un ocho y un óvalo, obtendremos la curva que queremos.  $\square$

Como Corolario de ésto obtenemos:

**Teorema 2.5.8** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano, con sólo puntos dobles y tal que todos sus puntos dobles lo desconectan. Sea  $\mathcal{D}_0$  el diagrama que se obtiene de  $\mathcal{D}$  desingularizando cada vértice de  $\mathcal{D}$  en la manera en que se desconecte. Entonces,*

- (i) *Si el árbol de componentes conexas de  $\mathcal{D}_0$  tiene a lo más dos hojas, entonces  $\mathcal{D}$  no se puede realizar con grado menor que  $2n + 2k$  ( $2n + 2k - 1$ , si  $\mathcal{D}$  es impar).*
- (ii) *Si el árbol de componentes conexas de  $\mathcal{D}_0$  tiene al menos tres hojas, entonces  $\mathcal{D}$  se puede realizar con grado  $2n + 2k - 2$  ( $2n + 2k - 3$ , si  $\mathcal{D}$  es impar).*

*Demostración:* (i) Las hojas del árbol corresponden a los óvalos vacíos y a los puntos aislados. Cualquier pseudorrecta que pase por un punto interior de cada óvalo vacío y por todos los puntos aislados corta a cada componente conexa de  $\mathcal{D}_0$  al menos dos veces (excepto a la pseudorrecta del caso impar, a la cual corta al menos una

vez), contadas con multiplicidad (los cortes con puntos aislados cuentan dos veces). Como el número de componentes conexas de  $\mathcal{D}_0$  es exactamente  $n + k$ , si el árbol de componentes conexas de  $\mathcal{D}_0$  tiene a lo más dos hojas, existen dos puntos tales que cualquier pseudorrecta que pase por ellos corta a  $\mathcal{D}_0$  en al menos dos puntos.

Sea entonces  $C$  una realización algebraica de  $\mathcal{D}_0$  y sea  $C_0$  una perturbación (topológica) de  $C$  que produce el tipo topológico de  $\mathcal{D}_0$ . Por las consideraciones anteriores existe una recta que corta a  $C_0$  en al menos  $2n + 2k$  puntos, contados con multiplicidad. Si la recta se coge suficientemente genérica (lo cual se puede hacer porque podemos mover ligeramente los dos puntos que la definen, que son o bien puntos aislados o bien puntos de una cierta cara) su número de cortes con  $C_0$  iguala al de cortes con  $C$ .

(ii) El caso par (y, por tanto, orientable) se sigue directamente del Lema 2.5.7. El caso impar también, si es posible elegir la numeración de las componentes de  $\mathcal{D}_0$  de forma que la última de ellas no esté enlazada a la pseudorrecta. Si ésto no es posible, quiere decir que todos los óvalos de  $\mathcal{D}_0$  están enlazados a la pseudorrecta. En éste caso el número de hojas del árbol coincide con el número de óvalos y con el de puntos singulares. Además, sólo necesitamos preocuparnos en realizar con grado 5 aquéllos diagramas para los que dicho número sea tres, porque si es mayor cada óvalo adicional puede ser añadido como una elipse, aumentando en dos el grado. Cualquier diagrama en estas condiciones es equivalente a uno de los dos de la Figura 2.13 de la Sección 2.3.1 (página 91), los cuales fueron realizados allí con grado 5.  $\square$

Por último, a partir del Teorema 2.5.8 es fácil obtener el siguiente Corolario, anunciado en la introducción. El interés de este reenunciado es que significa que los únicos diagramas Eulerianos con puntos dobles a los cuales no se les puede rebajar el grado de la construcción del Teorema 2.4.11 son aquéllos a los que ‘es evidente’ que no se les puede rebajar.

**Corolario 2.5.9** *Sea  $\mathcal{D}$  un diagrama Euleriano en el plano proyectivo con sólo puntos dobles. Sea  $k$  su número de componentes conexas y  $n$  su número de puntos singulares. Entonces, son equivalentes:*

- (i)  $\mathcal{D}$  no es topológicamente equivalente a ninguna curva algebraica de grado menor que  $2n + 2k$  si es par ó  $2n + 2k - 1$  si es impar.
- (ii) existen dos puntos del plano proyectivo tales que cualquier pseudorrecta que pasa por ellos corta al diagrama al menos  $2n + 2k$  veces ( $2n + 2k - 1$  si es impar), contadas con multiplicidad.

Una vez que sabemos exactamente para qué diagramas el grado de la construcción del Teorema 2.4.11 es óptimo, parece natural pensar que sería posible decidir exactamente cuáles necesitarán grado  $2n + 2k - 2$  ( $2n + 2k - 3$  para el caso impar), cuáles  $2n + 2k - 4$  y así sucesivamente, para rebajar el grado de realización de cada diagrama tanto como sea posible.

Sin embargo, la solución completa de este problema (decidir qué grado es necesario y suficiente para realizar cada diagrama Euleriano con sólo puntos dobles) está fuera de nuestro alcance incluso para diagramas sin puntos singulares, porque éste caso es exactamente una reformulación del problema XVI de Hilbert (decidir exactamente qué diagramas no singulares se pueden realizar con un cierto grado).

En particular, nuestro resultado “la única obstrucción a que el grado pueda ser rebajado puede encontrarse contando cortes con una cierta recta” va a dejar de ser cierto, aunque no sabemos a partir de qué grado.

Por tanto, dado que una solución total es inviable y en una solución parcial sería difícil decidir dónde pararse, no hemos intentado ni siquiera delimitar el caso de grado inmediatamente inferior al máximo. Nótese, de todas formas, que en “muchos casos” los métodos exhibidos en esta Sección permitirían rebajar el grado más de lo que lo hemos hecho.

