— Universidad de Cantabria —

T E S I S   D O C T O R A L

Geometría Combinatoria de Curvas Algebraicas y Diagramas de Delaunay en el Plano

Francisco Santos Leal

Dirigida por: Tomás Recio Muñiz
Dpto. de Matemáticas, Estadística y Computación

19 de Junio de 1995

Agradecimientos[1]

Muchas personas e instituciones han contribuído de manera directa o indirecta a la consecución de este trabajo.

Entre ellas, merece especial mención el profesor Bernd Sturmfels, que cofinanció mi estancia de cuatro meses en la Universidad de Cornell en otoño de 1993, a través de la Fundación David and Lucile Packard. Además, fue él quién me introdujo en el campo de las matroides orientadas, fruto de lo cual es parte del material del Capítulo 3. Los profesores de esta misma Universidad Lou Billera, Eric Babson y Jesús de Loera contribuyeron también con comentarios sobre este tema. (A Jesús agradezco, por otra parte, su estupenda acogida). El resto de este Capítulo tiene su origen último en la Tesis Doctoral de Marisa Mazón, leída en la Universidad de Cantabria en el año 1992, y en la colaboración con los profesores Rolf Klein y Ngoc̣-Minh Le, de la Universidad de Hagen.

Por su colaboración en la implementación de los códigos de curvas algebraicas del Capítulo 1 debo dar las gracias a Mark J. Encarnación y al profesor Hoon Hong, del RISC-Linz. La Tesis Doctoral de Antonio González-Corbalán fue la motivación de este Capítulo y él aportó también ideas en mis primeras investigaciones sobre la realización de curvas algebraicas con topología prescrita. A él se debe, en particular, la sugerencia de obtener curvas complicadas pegando curvas sencillas. También agradezco a los profesores Ilia Itenberg, Marie-Françoise Roy (Universidad de Rennes I) y Jean-Jacques Risler (Escuela Normal Superior de París) sus opiniones y sugerencias sobre este apartado.

A los profesores Jacek Bochnak y Alberto Tognoli, agradezco sendas invitaciones a las reuniones de Geometría Real que organizaron en Trento (Septiembre de 1992) y Soesterberg (Mayo de 1994). No debo olvidar tampoco a la Dirección General de Investigación Científica y Técnica, que me financia a través de la beca predoctoral que he disfrutado durante estos años y a través de los Proyectos de Investigación PB-89/0379 y PB-92/0498/C02/01, ni al Proyecto PoSSo (proyecto Esprit-BRA 6846 de la Comunidad Europea).

Y, por supuesto, doy las gracias a Tomás Recio. Sin él, entre otras cosas, nada de lo anterior habría sido posible.

Este trabajo está dedicado a Matilde Leal Villalba y a Monika Granero.

Francisco Santos

[1]Puesto que esta memoria ha sido escrita en LaTeX, debo también dar las gracias a Leslie Lamport y Donald E. Knuth.

Índice General

Introducción

Esta memoria versa sobre dos problemas en cierto modo recíprocos: el de la descripción combinatoria de la topología de una curva algebraica plana real y el de la obtención de curvas algebraicas con un tipo combinatorio dado a priori.

De un modo más general, se trata también la codificación combinatoria de ciertos objetos sumergidos en una superficie a los que llamamos diagramas, y que tienen como caso particular a las curvas algebraicas reales.

Otro caso particular, de especial relevancia en Geometría Computacional, son los llamados diagramas de Voronoi y sus duales, los diagramas de Delaunay, que reflejan las relaciones de proximidad entre un conjunto de objetos (en nuestro caso, puntos) del plano. En la última parte de la memoria se ha desarrollado un estudio específico acerca de los tipos topológicos posibles para estos diagramas, tomando como medida de proximidad una clase natural de distancias que contiene a las distancias normadas del análisis vectorial: las distancias convexas.

Estos tres aspectos están conectados con tres campos diferentes de la matemática y suponen aproximaciones a distintos problemas planteados en los mismos.

El primero de ellos surge en la disciplina del Cálculo Simbólico, de reciente desarrollo, y está relacionado con la obtención de un dibujo topológicamente fiable de una curva algebraica, definida en forma implícita.

Este objetivo y distintas soluciones del mismo aparecen ya hace casi 20 años, en el seno de diferentes escuelas pioneras en el cálculo simbólico sobre álgebra real. Entre ellas cabe citar las de George Collins y Carlo Traverso. La Sección 1.4.1 contiene información más detallada sobre los antecedentes de nuestro problema.

Resuelto este problema satisfactoriamente desde un punto de vista computacional, el Output obtenido es una codificación de la topología de la curva pero depende también extraordinariamente de la geometría de la misma y, en particular, del sistema de coordenadas que se elija. Se plantea entonces como problema fundamental el de asociar a la topología de la curva un código canónico que permita reconocer cuándo dos curvas son topológicamente indistinguibles. De hecho, este último problema forma parte implícitamente de los planteamientos de los trabajos de Traverso y Collins, puesto que su objetivo último era el de introducir el ordenador en el problema XVI de Hilbert.

El Capítulo 1 de la memoria resuelve este problema de forma altamente eficiente (Teoremas 1.2.5 y 1.3.3) mediante la asociación de una lista de aristas a cada componente conexa del diagrama (Sección 1.2) y un grafo de componentes conexas al diagrama, el cual expresa la mutua disposición de las componentes (Sección 1.3). La eficiencia se demuestra con la implementación efectuada para curvas algebraicas en el plano afín (Sección 1.4). El código de la implementación, escrito en lenguaje

C, se incluye como un apéndice del Capítulo.

Los métodos que se desarrollan en el Capítulo son, en realidad, más generales que ésto. Sirven para la codificación de la estructura topológica y/o combinatórica de cualquier inmersión de un pseudografo en una superficie topológica compacta o el plano afín, inmersiones a las que damos el nombre de diagramas. El procedimiento completo de codificación y comparación se hace en tiempo polinomial para cada superficie (donde el exponente del polinomio depende de la característica de Euler de la superficie), cuadrático para las superficies más sencillas. Ésto abre el camino para futuras implementaciones en superficies distintas del plano afín. En particular, está en curso una implementación semejante para curvas algebraicas proyectivas.

El Capítulo 2 trata sobre el problema recíproco de obtención de curvas algebraicas planas (aunque, ahora, en el plano proyectivo) de grado bajo y con tipo topológico dado. Decimos que la curva es una realización algebraica del tipo topológico. La conexión con el Problema XVI de Hilbert es evidente y no es de extrañar que las técnicas que utilizamos (modificación de la topología de una curva algebraica por perturbación de los coeficientes del polinomio que la define) sean variantes de los que se han venido utilizando de manera clásica en dicho problema, por parte de la escuela rusa de Geometría Real.

Sin embargo, debemos hacer notar dos diferencias en el planteamiento del problema que tratamos en este Capítulo. Por un lado, trabajamos con curvas singulares. Por otro, se estudia el problema genérico de realizar todos los tipos topológicos posibles de curvas algebraicas (y la dependencia del grado que es necesario para la realización con la 'complejidad topológica' de cada uno) y no el problema particular de hallar para cada curva el polinomio de grado mínimo.

El resultado fundamental de este Capítulo (Teorema 2.4.11) demuestra que toda curva algebraica con k componentes conexas y n puntos dobles puede ser realizada con grado $2n+2k$. Además, se describen explícitamente las condiciones necesarias y suficientes para que un tipo topológico no pueda ser realizado con grado menor que $2n+2k$ y también para $2n+2k-1$ (Teorema 2.5.8). Se da la circunstancia sorprendente de que las únicas restricciones que imposibilitan la rebaja del grado son las casi evidentes, producidas por el hecho de que cualquier realización del tipo topológico en cuestión corte $2n+2k$ (ó $2n+2k-1$) veces a alguna recta de manera necesaria (Corolario 2.5.9). La búsqueda de los polinomios para la realización es de naturaleza algorítmica y podría ser objeto de implementación en el futuro, si los avances en técnicas simbólicas de resolución de sistemas de ecuaciones reales lo hacen factible.

En la obtención de estos resultados nos veremos obligados a estudiar por separado los diferentes casos posibles de orientabilidad y paridad de la curva algebraica, diseñando técnicas específicas para cada uno y obteniendo los resultados de forma específica en cada contexto (párrafos 2.4.1, 2.4.2 y 2.4.3).

El último Capítulo atañe a un campo de desarrollo también reciente, como es la Geometría Computacional. Uno de los objetos básicos de estudio de este campo son los diagramas de Voronoi y de Delaunay (duales el uno del otro), que representan información acerca de la proximidad de cada punto del plano a una colección de objetos previamente fijados y de éstos entre sí.

Por su importancia y ubicuidad en numerosas aplicaciones, los diagramas de Voronoi y de Delaunay han sido estudiados en los últimos diez años de manera profusa en el contexto de funciones de distancia distintas de la Euclídea. Se observa que, para distancias razonables, muchas de las propiedades de los diagramas de Voronoi y Delaunay Euclídeos se mantienen. A pesar del origen métrico de estos diagramas, la información más relevante contenida en ellos (y la que ocupa la mayor parte del tiempo empleado en calcularlos) es combinatoria. Tiene por ésto especial interés el estudio de las nuevas formas combinatorias que podrían surgir al considerar funciones de distancia distintas de la Euclídea.

Las distancias con las que hemos trabajado son las llamadas distancias convexas que representan un contexto en el que la distancia entre dos puntos se mide con diferente escala para diferentes direcciones, pero de forma homogénea en todo el plano. Éstas distancias forman una clase natural de distancias que incluye a las distancias normadas.

Nuestro trabajo ha consistido, en primer lugar, en el análisis detallado de los ejemplos más sencillos de tipos topológicos de diagramas que no es posible obtener con la distancia Euclídea, y sí con otras distancias convexas (Sección 3.4). Se muestra en particular que siete puntos producen tipos de diagramas que no pueden obtenerse como diagramas de Delaunay (o de Voronoi) con la distancia Euclídea y pueden obtenerse con una distancia convexa si y sólo si su bola unidad no es una elipse (Teoremas 3.4.6 y 3.4.10).

Los diagramas de Delaunay Euclídeos están íntimamente conectados con el cálculo de envolventes convexas a través de la 'propiedad del levantamiento'. El diagrama de Delaunay de una cierta nube de puntos en el plano puede ser calculado a través de la envolvente convexa de otra cierta nube de puntos obtenida por levantamiento de la primera a un paraboloide en el espacio tridimensional (véase la Sección 3.1). Esta propiedad tiene como consecuencia el relacionarlos con dos conceptos de intenso estudio en la actualidad en Geometría Combinatoria.

Por una parte, con la teoría de matroides, puesto que la matroide orientada asociada a los puntos levantados guarda una relación muy estrecha con el diagrama de Delaunay de los puntos del plano (véase 3.1.4). Por otra, con las triangulaciones o divisiones regulares (véase 3.1.3) puesto que la propiedad del levantamiento implica la regularidad del diagrama. La teoría de matroides constituye una disciplina en sí misma y no necesita más presentación. El estudio de triangulaciones regulares tiene importantes conexiones en Geometría Algebraica (y, en particular, en el mencionado problema XVI de Hilbert) a través de las variedades tóricas.

En las dos últimas secciones del Capítulo estudiamos la extensión de la propiedad del levantamiento a los diagramas de Delaunay de distancias convexas, demostrando que sólo la poseen aquéllas cuya bola unidad es una elipse. Todas las demás son capaces de producir diagramas de Delaunay no regulares (Teorema 3.5.9).

A pesar de ello, es posible generalizar la definición de la matroide orientada asociada a un diagrama de Delaunay a las distancias convexas sin usar la propiedad del levantamiento, lo cual se hace en la Sección 3.5. El resultado es que ésta sigue existiendo para todas las distancias estrictamente convexas y suaves, pero puede resultar ser no orientable para cualquiera que no tenga por bola unidad una elipse (Teorema 3.5.9, de nuevo).

El interés de estos dos resultados radica en que las matroides orientadas no realizables y las triangulaciones no regulares son habitualmente considerados como objetos 'patológicos', con poco significado geométrico, mientras que en nuestro contexto aparecen de forma natural como expresión de relaciones de proximidad entre puntos, sólo que para una forma de medir la proximidad diferente a la habitual.

Cada Capítulo contiene su propia introducción, con una relación más detallada de los resultados más importantes y referencias a la bibliografía relevante.

Bibliografía

[Aigner] M. Aigner, *Combinatorial Theory*, Springer-Verlag, 1979.

[Akbulut-King] S. Akbulut, H. King, *Topology of Real Algebraic Sets.* Springer-Verlag, (1992).

[Antoine] L. Antoine, Sur la possibilité d'étendre l'homéomorphie de deux figures à leurs voisinages, *C. R. Acad. Sci. Paris* 171 (1920) 661–663.

[Arnon-C-McC] D. S. Arnon, Collins, S. MacCallum, A polinomial time algorithm for the topological type of a real algebraic curve, *J. of Symbolic Computation* **5** (1988), 213–236.

[Aurenhammer] F. Aurenhammer, *Voronoi diagrams – A survey of a Fundamental Geometric Data Structure*, ACM Computing Surveys, Vol. 23, No. 3. ACM Press, 1991, 345–405.

[Baumgart] B.G. Baumgart, A polyhedron representation for computer vision. In *1975 National Computer Conference.* AFIPS Conference Proceedings, vol. 44. AFIPS Press, Arlington, Va., 1975, pp. 589–596.

[Benedetti-Risler] R. Benedetti and J.J.Risler, *Real algebraic and semi-algebraic sets*, Hermann Éditeurs, 1990.

[Björner-L-S-W-Z] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, G.M. Ziegler, *Oriented Matroids*, Cambridge University Press, 1992.

[Bochnak-C-R] J. Bochnak, M. Coste, M. F. Roy. *Géometrie Algébrique Réelle.* Springer-Verlag, (1987).

[Brown] K.Q. Brown, Voronoi Diagrams from Convex Hulls, *Inf. Process. Lett.* **9** (1979), pp. 223–228.

[B-C-E-H-J-K-L-N] B. Buchberger, G. Collins, M. Encarnación, H. Hong, J. Johnson, W. Krandick, R. Loos and A. Neubacher. *A SACLIB Primer.* Tech. Rep. 92-34, RISC-Linz, Johannes Kepler University, Linz, Austria.

[Cellini-G-T] P. Cellini, P. Gianni and C. Traverso, Algorithms for the shape of semialgebraic sets. A new approach, in *AAECC-9*, Springer-Verlag, 1991.

[Chew-Drysdale] L.P. Chew and R.L. Drysdale III, Voronoi Diagrams Based on Convex Distance Functions, in *Proceedings 1st ACM Symposium on Computational Geometry*, Association for Computing Machinery Inc., New York, 1985, 235–244

[Corbalán-M-R] A.G. Corbalán, M. Mazón and T. Recio, Geometry of bisectors for strictly convex distances, to appear in the *International Journal of Computational Geometry and its Applications.*

[C-M-R-Santos] A.G. Corbalán, M. Mazón, T. Recio, F. Santos, On the topological shape of planar Voronoi diagrams, in *Proceedings of the 9th Annual Symposium on Computational Geometry*, Association for Computing Machinery Inc., New York, 1993, 109–115.

[Dillencourt] M. B. Dillencourt, Toughness and Delaunay Triangulations, *J. Discrete Comput. Geom.* **5** (1990), 575–601.

[Dill.-Smith] M. B. Dillencourt, W.D. Smith, Graph-Theoretical Conditions for Inscribability and Delaunay Realization, in *Proceedings of the sixth Canadian Conference on Computational Geometry.* University of Saskatoon, Saskatoon (1994), 287–292.

[Edelsb.-Seidel] H. Edelsbruner and R. Seidel, Voronoi diagrams and arrangements, *Discrete Comput. Geometry*, **1** (1986), 25–44.

[Enc.-Hong-Santos] M. Encarnación, H.Hong and F.Santos, Computing a canonical encoding of the topology of a real algebraic plane curve, in the proccedings of *PoSSo Workshop on Software. Paris, 1994.* To appear in Lect. Notes in Comp. Sci, Springer-Verlag.

[Fox-Artin] R.H. Fox and Emil Artin, Some wild cells and spheres in three-dimensional space, *Ann. of Math.* 49 (1948) 979–990.

[Fulton] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer-Verlag, 1984.

[Garey-Johnson] M.R. Garey and D.S. Johnson, *Computers and Intractability – A Guide to the Theory of NP-Completeness.* W.H.Freeman, San Francisco (1979).

[Gel'fand-K-Z] I.M. Gel'fand, M.M. Kapranov and A.V. Zelevinski, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhauser, Boston (1994).

[G.Corbalán] A. González-Corbalán, *Reconocimiento de formas en curvas planas*, Tesis doctoral, Universidad de Cantabria, (1990).

[G.Corbalán-Recio] A. González-Corbalán and T. Recio, Shape invariant lists and realization as plane real algebraic curves with double points. In *Real analytic and Algebraic Geometry. Proceedings, Trento 1988*, Lect. Notes in Math. 1420, Springer-Verlag, 1990.

[G.C.-Santos] A.González-Corbalán, F. Santos, Representation of Curves in the Real Plane and Construction of Algebraic Curves with Given Topology, *Seminaire DDG sur les Structures Algebriques Ordonnees*, Publ. Math. de l'Université de Paris VII, (1992).

[Grümbaum] B. Grümbaum, *Convex Polytopes.* Wiley–Interscience Publishers (1967).

[Gudkov] D. A. Gudkov, *The topology of real projective algebraic varieties*, Russian Mathematical Surveys 29:4, 1974, 1–79.

[Guibas-Stolfi] L. Guibas and J. Stolfi, Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of Voronoi diagrams, *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 4, No. 2, April 1985, pp. 74–123.

[Harary] F. Harary, *Graph Theory*, Addison–Wesley, 1969.

[Harnack] A. Harnack, Uber Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven, *Math. Ann.* **10** (1876), 189–199.

[Hodgson-R-S] C.D. Hodgson, I. Rivin and W.D. Smith, A characterization of convex hyperbolic polyhedra and of convex polyhedra inscribed in the sphere, *Bull. (New Series) of the Am. Math. Soc.*, Vol 27, No.2, October 1992, pp. 246–251.

[Hodgson-Rivin] C.D. Hodgson, I. Rivin, A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space, *Inventiones Mathematicae*, 111(1), January 1993, pp. 77–111.

[Hong] H. Hong, Efficient method for analyzing topology of plane real algebraic curves, en *IMACS SC-93*, Lille France.

[Icking-K-L-M] C. Icking, R. Klein, N.M. Le and L. Ma, Convex Distance Functions in 3-space are Different, *Fundamenta Informaticae* **22** (1995) 331–352. Extended abstract in *Proceedings 9th ACM Symposium on Computational Geometry*, Association for Computing Machinery Inc., New York, 1993, 116–123.

[Itenberg] I. Itenberg, Contre-examples à la conjecture de Ragsdale, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **317**, Série I (1993), 277–282.

[Klein] R. Klein, *Concrete and Abstract Voronoi Diagrams.* Lecture Notes in Computer Science, 400. Springer-Verlag, 1989.

[Koebler-S-T] Koebler, Schoening and Toran, *The graph isomorphism problem: its structural complexity.* Birkhauser (1993)

[Köthe] G. Köthe, *Topological Vector Spaces I*, Springer-Verlag, 1969.

[Le] N.M. Le, *Randomized incremental construction of simple abstract Voronoi diagrams in 3-space*, Informatik Berichte 174-3/1995. Fernüniversitat, Hagen, 1995. Extended abstract to appear in *Fundamentals of Computation Thory 1995*, Lec Notes in Comp. Sci., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[Mazón] M.L. Mazón, *Diagramas de Voronoi en caleidoscopios*, Tesis doctoral, Universidad de Cantabria, 1992.

[Mazón-Recio] M.L. Mazón and T. Recio, *Voronoi diagrams based on strictly convex distances on the plane*, Manuscrito, 1991.

[Makeev] V.V. Makeev, *The degree of a mapping in some problems in combinatorial geometry.* J. of Soviet Mathematics 51(5), Plenum Corp., Oct. 1990, pp. 2544–2546.

[Moise] E.W. Moise, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Graduate Texts in Mathematics, **47**, Springer-Verlag, Berlin, (1977).

[Muller-Prep.] D.E. Müller and F.P. Preparata, Finding the intersection of two complex polyhedra, *Theor. Comput. Sci.*, 7, 1978, pp. 217–236.

[Preparata-Sha.] P. Preparata and I. Shamos, *Computational Geometry, An Introduction*, Springer–Verlag, New York–Berlin–Heidelberg–Tokyo, 1985.

[Risler] J. J. Risler, *Sur le 16ieme. problème de Hilbert: un resumé et quelques questions*, Publ. Math. Univ. Paris VII, **9**, 1981, 11–25.

[Rivin] I. Rivin, A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space. Preprint, 1992.

[Rourke-Sand.] C.P. Rourke and B.J. Sanderson, *Introduction to Piecewise-Linear Topology*, Springer-Verlag, 1982.

[Roy] M.F.Roy, Computation of the topology of a real algebraic curve, in *Proceedings of the Conference on Computational Algebra*, Strickland, Piacentini Cattaneo Eds., Kluwer Acad. Publ., 1990, 77–103.

[Santos1] F. Santos, *Curvas y mapas en superficies compactas*, Tesina de licenciatura, Universidad de Cantabria, (1991).

[Santos2] F. Santos, Construction of singular algebraic plane nodal curves with given topology, en *(Trento meeting on) Real Analytic and Algebraic Geometry, II*, de Gruyter Publishers, Berlin (1994), 213–228.

[Santos3] F. Santos, On Delaunay Oriented Matroids, in *Proceedings of the 6th Canadian Conference on Computational Geometry*, University of Saskatchewan, Saskatoon, 1994, 375–380.

[Santos4] F. Santos, On Delaunay oriented matroids for convex distance functions, enviado a la revista *Discrete and Computational Geometry*, Springer-Verlag (Berlin-Heidelberg-New York).

[Santos5] F. Santos, Inscribing a symmetric body in an ellipse, enviado a la revista *Information Processing Letters*, Elsevier Publishers.

[Viro] O. Ya. Viro, Glueing of plane real algebraic curves and construction of curves of degrees 6 and 7, in *Proc. of the Intern. topological conference in Leningrad.*, Lect. Notes in Math. 1060. Springer Verlag, 1984.

[Wilson] G. Wilson, Hilbert's sixteenth problem, *Topology* **17** (1978), 53–74.

[Ziegler] G.M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer–Verlag, 1994.

Lista de Figuras