Introducción a las tensegridades

Francisco Santos Leal

http://personales.unican.es/santosf

Introducción a la ~~tensegridades~~ teoría de la rigidez

Francisco Santos Leal

http://personales.unican.es/santosf

¿Qué es una tensegridad?

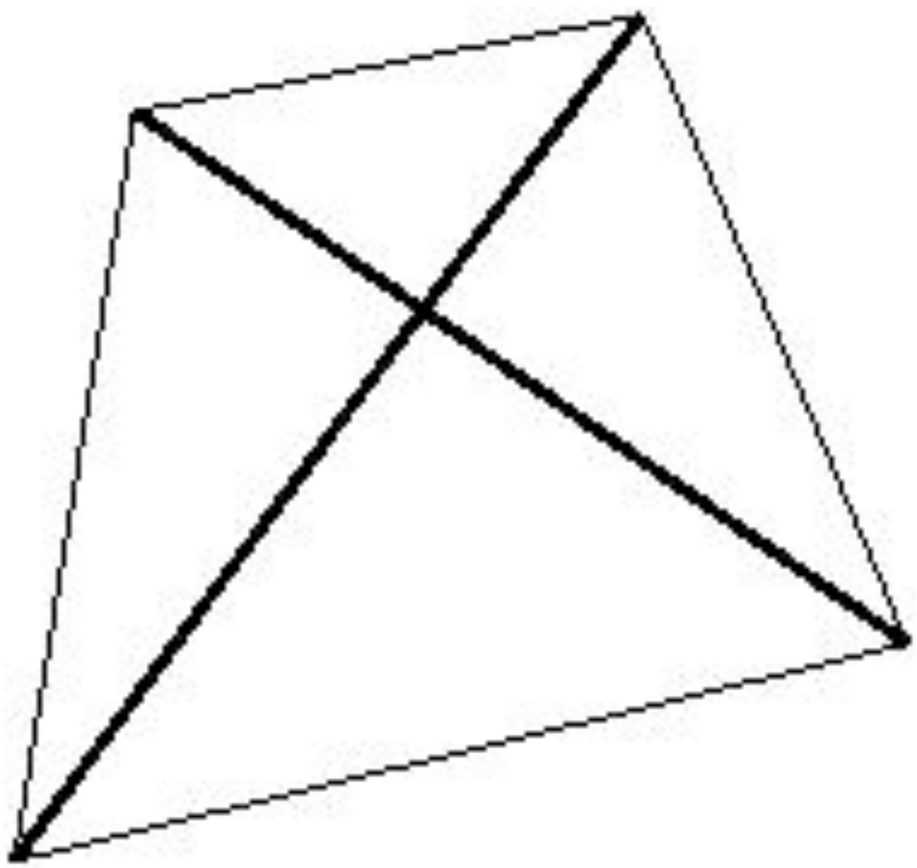
Tensegrity = tension + integrity

El nombre lo acuñó Buckminster-Fuller para referirse a las estructuras en equilibrio del escultor Kenneth Snelson:

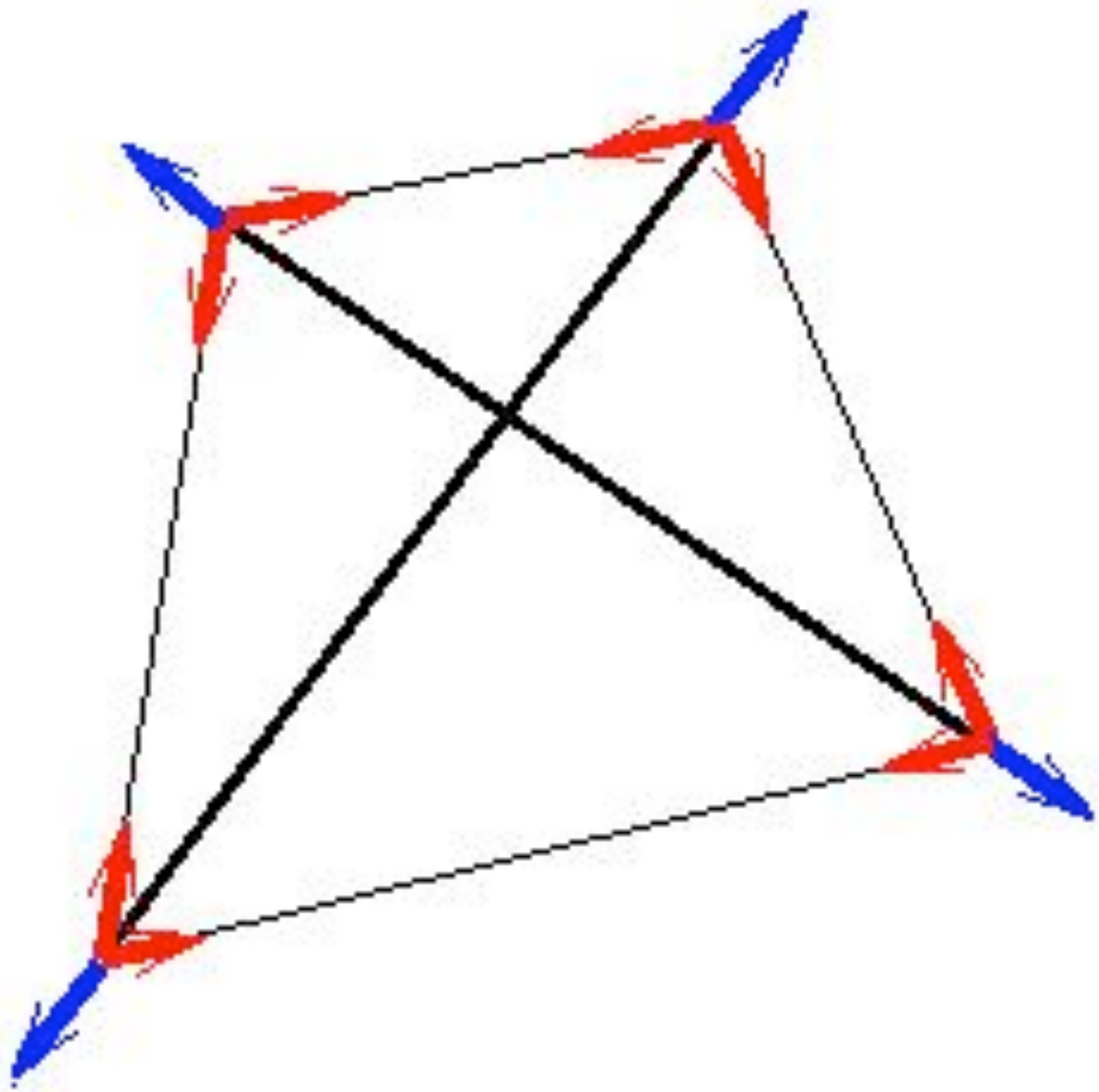
Definiciones de tensegridad

- *“islands of compression in an ocean of tension”* (Kenneth Snelson)
- “*continuous tension, discontinuous compression structures”* (Buckminster-Fuller)
- *“A tensegrity system is a stable self-equilibrated state comprising a discontinuous set of compressed elements inside a continuum of tensioned components”* (R. Motro, “Tensegrity. Structural systems for the future”, Kogan Page Science, London, 2003).

"islands of compression in an ocean of tension"



“islands of compression in an ocean of tension”



Definiciones de tensegridad.

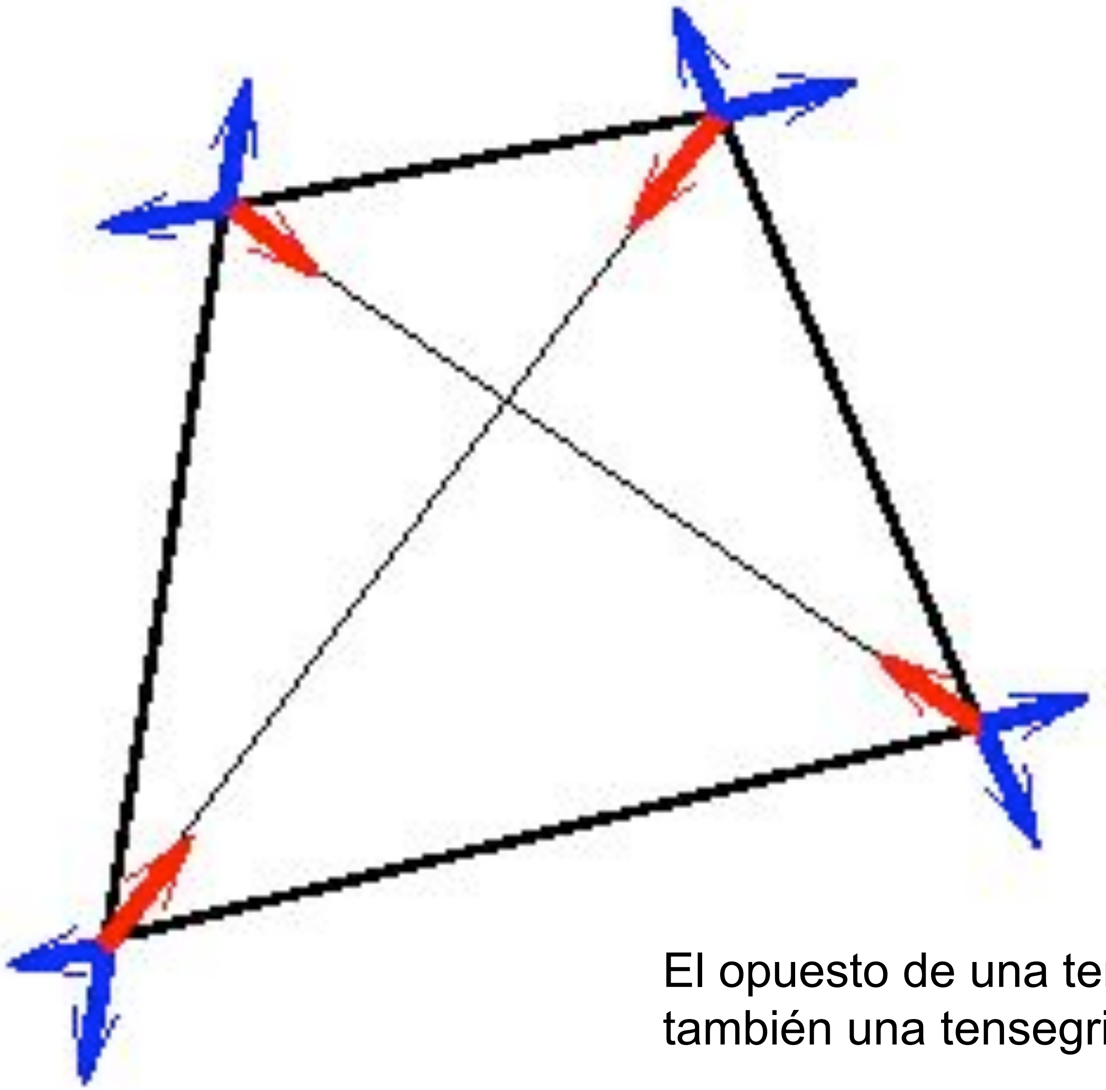
Miguel de Guzmán introdujo su propia definición, un poco más general:

``Consideramos una configuración geométrica constituida por un número finito de puntos y por unos cuantos segmentos que unen estos puntos.

Una estructura de tensegridad consiste en asignar vectores a los puntos, en las direcciones de los segmentos que concurren en ellos de forma que:

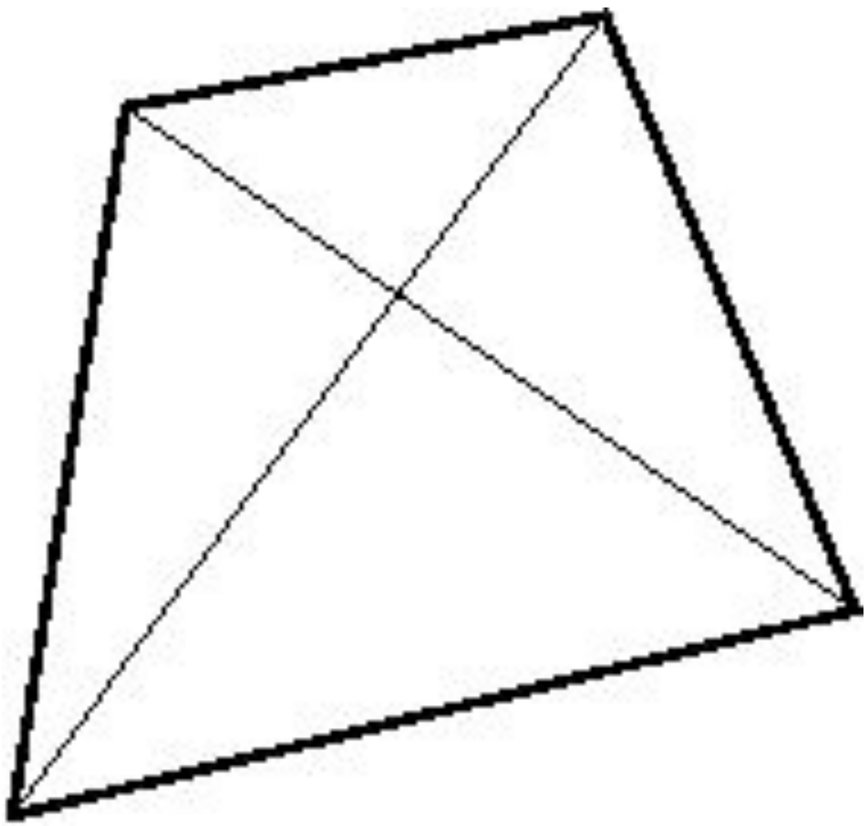
- (a) La resultante en cada punto es nula.
- (b) Para cada segmento, la suma de los vectores asignados a sus extremos es cero."

Lo cual incluye, por ejemplo, “islands of tension in an ocean of compression”



El opuesto de una tensegridad es también una tensegridad.

Lo cual incluye, por ejemplo, “islands of tension in an ocean of compression”



Tensegridad y teoría de la rigidez.

Lo que Guzmán llama tensegridad es lo que en teoría de la rigidez se conoce como “self-stressed framework” (armazón auto-tensionado).

Tensegridad y teoría de la rigidez.

Lo que Guzmán llama tensegridad es lo que en teoría de la rigidez se conoce como "self-stressed framework" (armazón auto-tensionado). Pero:

"Si no eres muy ambicioso, puede resultar un verdadero placer darte cuenta de que lo que estabas haciendo ya había sido descubierto. Al menos, eso indica que **ibas por el buen camino**."

(I. M. Gel´fand)

Esta charla:

0. ¿Qué es la tensegridad?

1. Rigidez, rigidez infinitesimal, rigidez genérica, y autotensiones (rigidez estática).

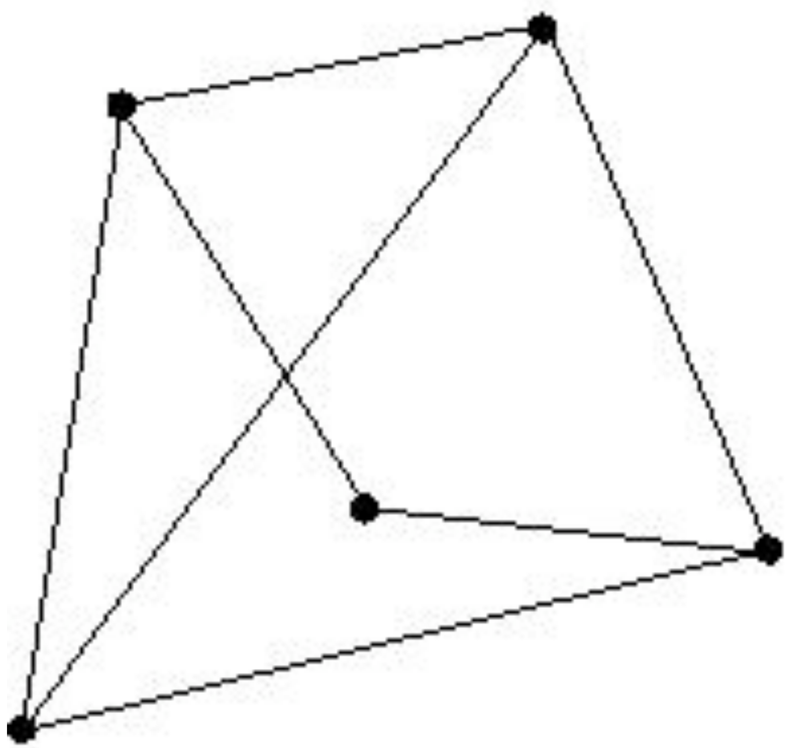
2. Breve historia de la rigidez.

Rigidez

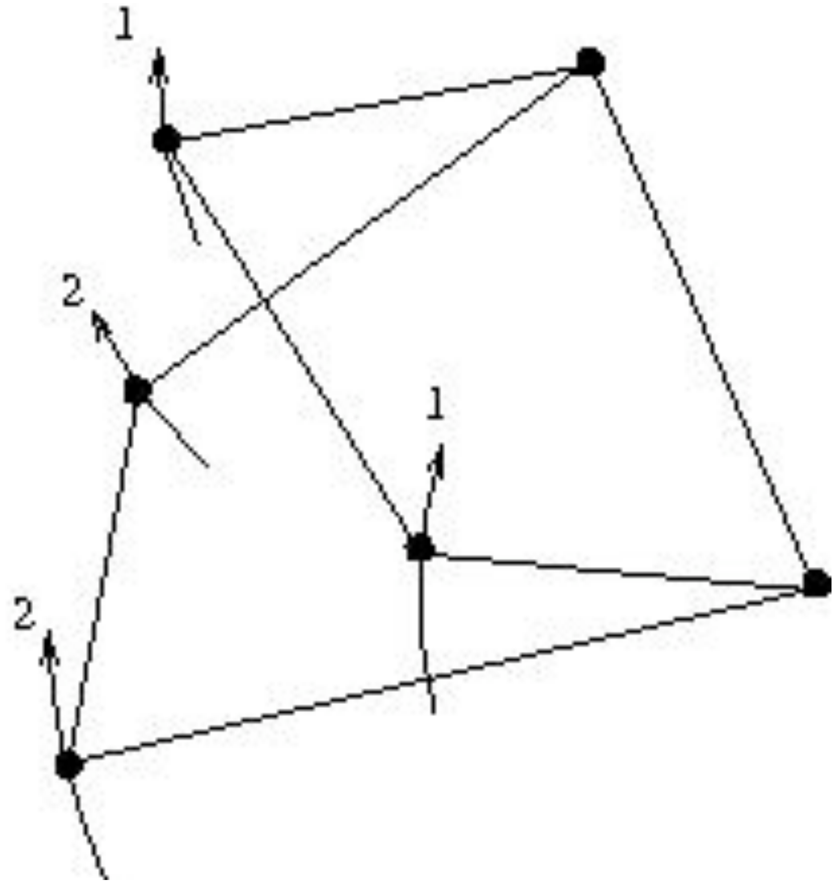
Definiciones: Un grafo geométrico o armazón es un conjunto finito de puntos (en el plano, en el espacio, en $\mathbf{R}^n$) junto con algunos segmentos que unen parejas de dichos puntos ("vértices" o "nodos" y "aristas" o "ejes"). En principio, admitimos que las aristas se corten entre sí y a los puntos de corte no los consideramos ``vértices'' (salvo que así lo queramos).

Un armazón es rígido si no existe una manera continua de mover sus vértices que mantenga constante la longitud de las aristas en todo momento (salvo los "movimientos rígidos"; rotaciones y traslaciones). En caso contrario decimos que es flexible.

Un ejemplo, en el plano

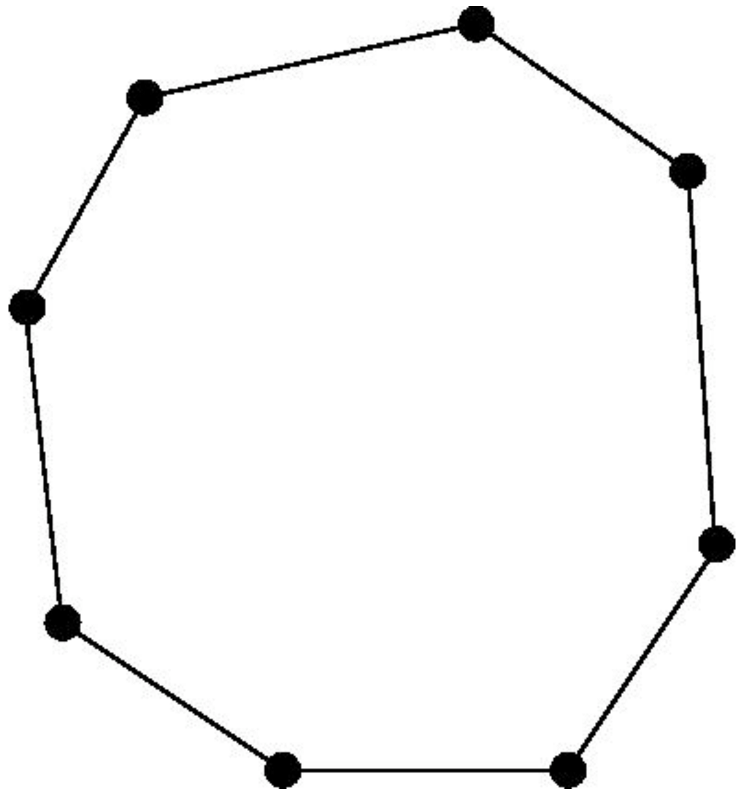


armazón rígido



armazón flexible,
con dos “grados de libertad”

¿Cuántos grados de libertad?



8 vértices, 8 aristas

↓

$2 \times 8 - 3 = 13$

"dimensiones de movimiento"

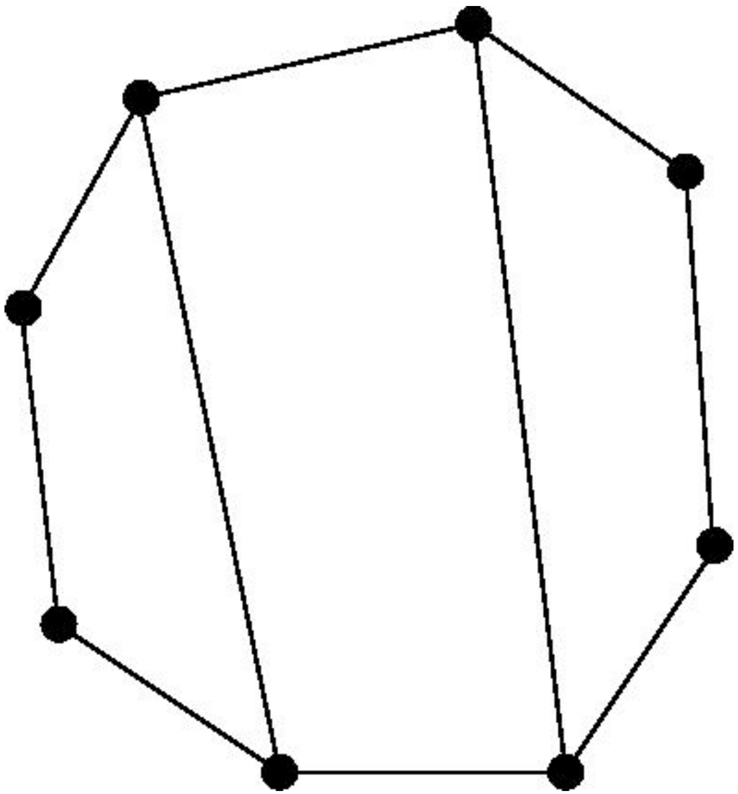
↓

$13 - 8 = 5$

"dimensiones libres"

Conclusión: hay cinco grados de libertad

¿Cuántos grados de libertad?



8 vértices, 10 aristas

↓

2 x 8 - 3 = 13

"dimensiones de movimiento"

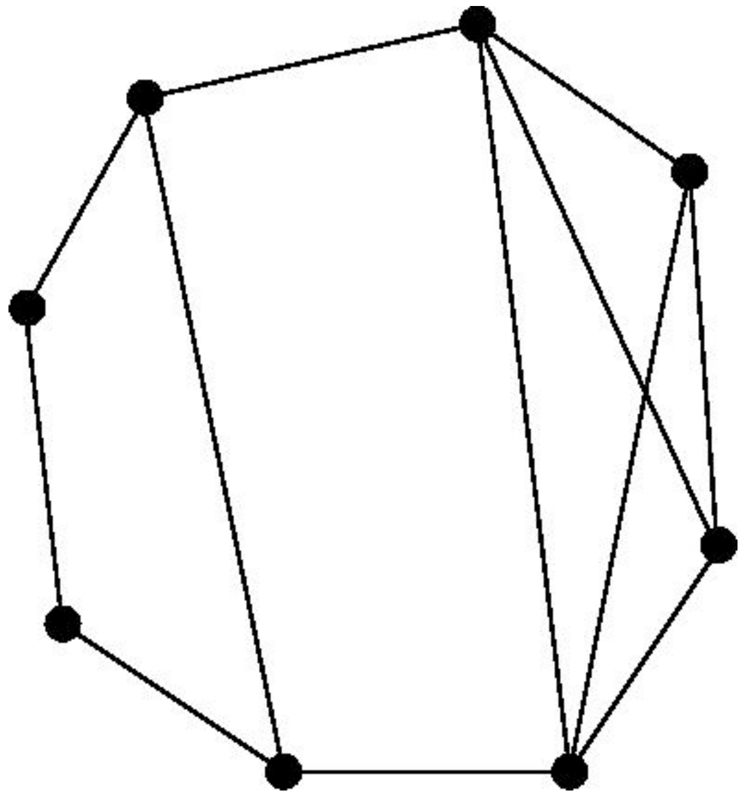
↓

13 - 10 = 3

"dimensiones libres"

Conclusión: hay tres grados de libertad

¿Cuántos grados de libertad?



8 vértices, 12 aristas

↓

2 x 8 - 3 = 13

"dimensiones de movimiento"

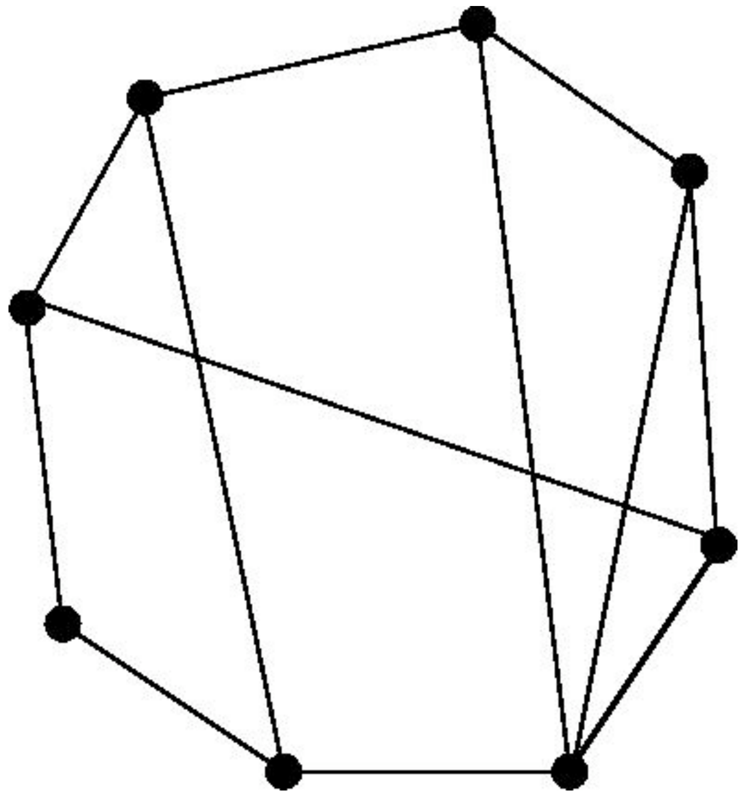
↓

13 - 12 = 1

"dimensión libre"

Conclusión: hay un grado de libertad?

¿Cuántos grados de libertad?



8 vértices, 12 aristas

↓

$2 \times 8 - 3 = 13$

"dimensiones de movimiento"

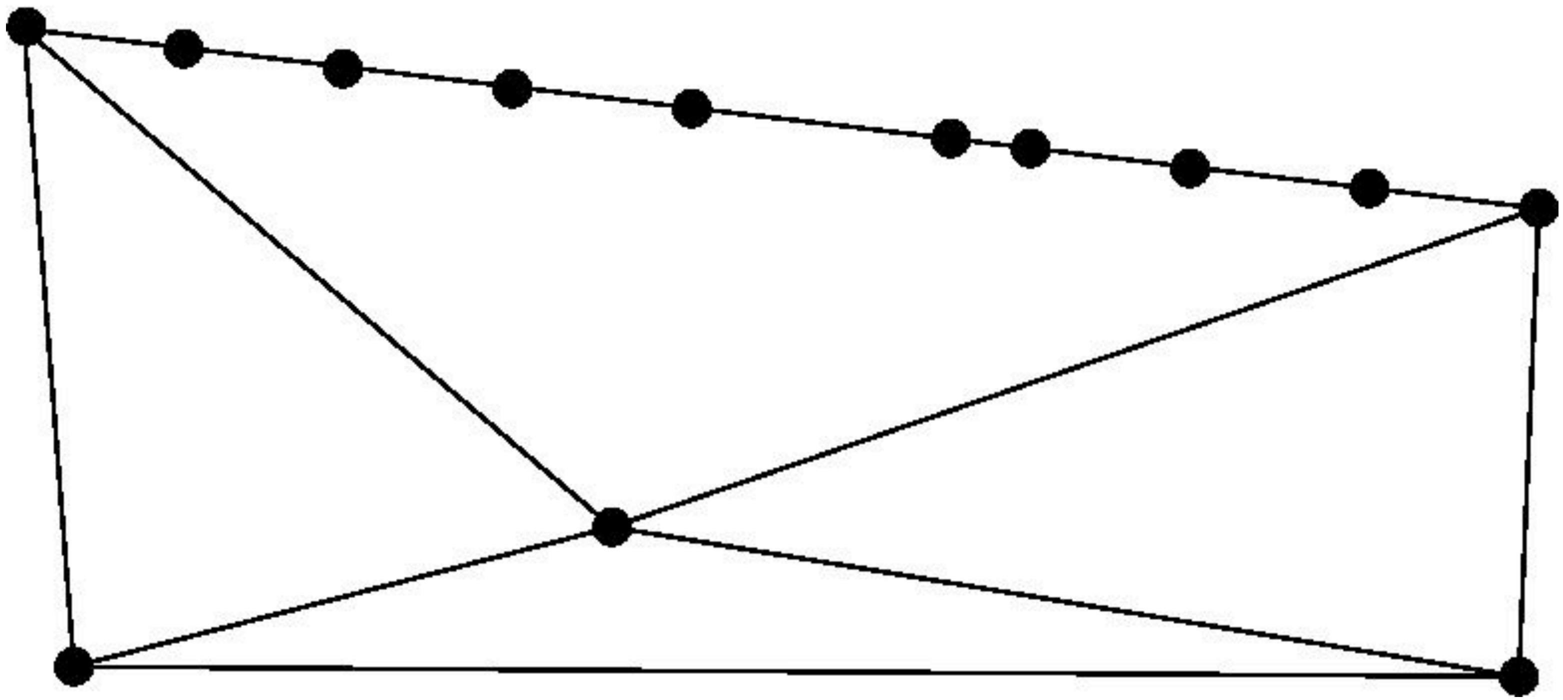
↓

$13 - 12 = 1$

"dimensión libre"

??????

Casos degenerados



Rígido, aunque no debería…

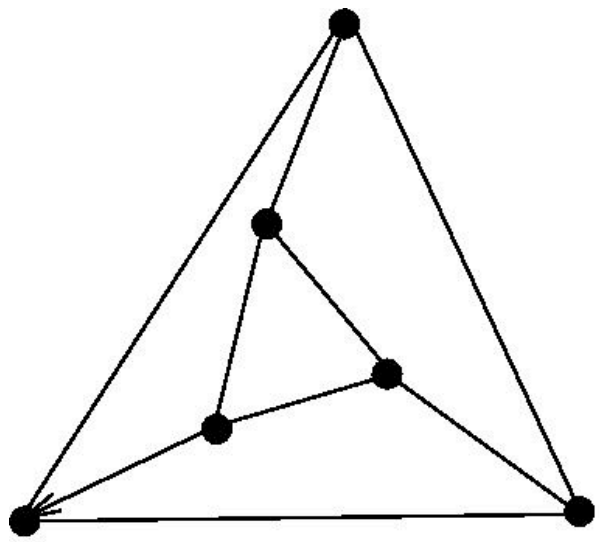
Rigidez infinitesimal

Como la rigidez “a secas” es demasiado complicada de analizar, en una primera aproximación uno estudia una versión “linealizada” o “infinitesimal” del problema.

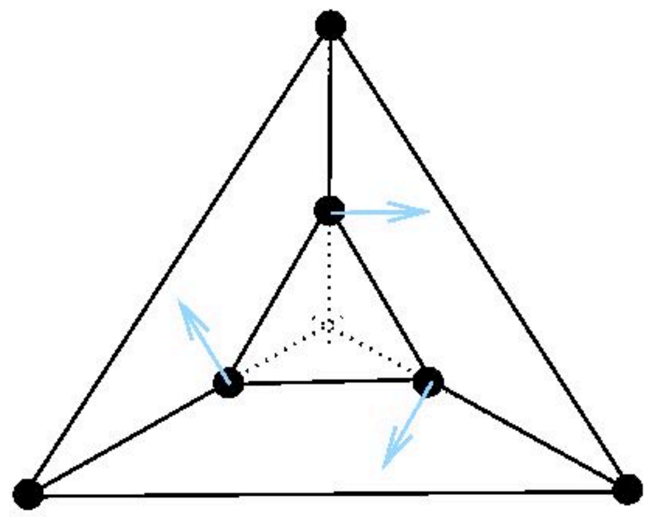
Rigidez infinitesimal

Definición: Un armazón es infinitesimalmente flexible si es posible asignar “velocidades instantáneas” a los vértices de modo que la longitud de las aristas permanezca estable (es decir, que la primera derivada de la longitud sea cero). En caso contrario es infinitesimalmente rígido.

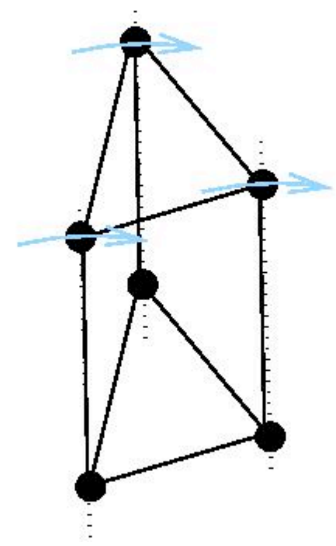
El mismo “grafo abstracto” puede producir distintos tipos de armazones



rígido



rígido, pero infinitesimalmente flexibe



flexible

La matriz de rigidez infinitesimal

Estudiar la rigidez infinitesimal de un armazón G con n vértices $p_1,\ldots p_n \in \mathbf{R}^2$ y m aristas (p_{i_1}, p_{j_1}), …, (p_{i_m}, p_{j_m}) "no es más que" un problema de álgebra lineal. Se tiene la siguiente aplicación lineal:

$$L: \quad (\mathbf{R}^2)^n \quad \text{----->} \quad \mathbf{R}^m$$

$$(v_1,\ldots,v_n) \quad |\text{----->} \quad \Big((p_{i_k} - p_{j_k}).(v_{i_k} - v_{j_k})\Big)_{k=1,\ldots,m}$$

"velocidad infinitesimal" "elongaciones que producen"

G es infinitesimalmente rígido <=> Ker(L) tiene dimensión 3
(sólo los movimientos rígidos)

De hecho:

Grados de libertad (infinitesimales) de G = dim(Ker L) - 3

(nota: todo esto vale para armazones en dimensión d, cambiando "3" por "(d+1)d/2")

Rigidez combinatoria

Definición: Un grafo ("abstracto") es un conjunto finito V (típicamente, el conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$) junto con una familia E de parejas de elementos de V.

Nota: Un armazón se define formalmente como una "realización geométrica de un grafo". Es decir, un armazón consta de un grafo $G=(V,E)$ junto con una aplicación **p:** $V \dashrightarrow \boldsymbol{R}^2$ que dice donde colocar los vértices.

> **Pregunta:** dado un grafo abstracto G ¿qué podemos decir del conjunto de realizaciones de G que dan armazones rígidos? ¿Y de los infinitesimalmente rígidos?

Rigidez combinatoria

Respuesta(s):

1) Infinitesimalmente rígido => rígido (porque toda “flexión continua” induce una “flexión infinitesimal” en el instante cero).

2) Todo grafo es o bien “casi siempre infinitesimalmente rígido” o “casi siempre infinitesimalmente flexible” (para cada dimensión *d*). Esto es así porque la rigidez infinitesimal depende sólo del rango de la matriz *M*, de tamaño (*dn* x *m*), cuyos coeficientes son precisamente las coordenadas de la realización, colocadas de la manera indicada por el grafo.

3) Los grafos “casi siempre infinitesimalmente flexibles” también son “casi siempre flexibles” (la demostración no es elemental). El recíproco se sigue del apartado (1).

Rigidez combinatoria

Definición: un grafo (abstracto) $G=(V,E)$ es genéricamente rígido en dimensión d si es rígido (equivalentemente, infinitesimalmente rígido) en casi todas sus realizaciones en $\mathbf{R}^{d.}$

Nota: toda pregunta sobre un grafo abstracto es, *por definición*, una pregunta combinatoria. Sin embargo, no es obvio como decidir si un grafo G es genéricamente rígido en una cierta dimensión d con métodos puramente combinatorios!

En dimensión pequeña sí es posible hacerlo:

Genéricamente rígido en dimensión 1 <=> conexo

Genéricamente rígido en dimensión 2 <=> propiedad de Laman

La propiedad de Laman

- •Caracteriza los grafos gen. rígidos en dimensión 2.
- •Es má fácil enunciarla como caracterización de los grafos “libres” o “independientes”, es decir, aquéllos en los que

Nº de grados de libertad = $2n$ - 3 - nº de aristas.

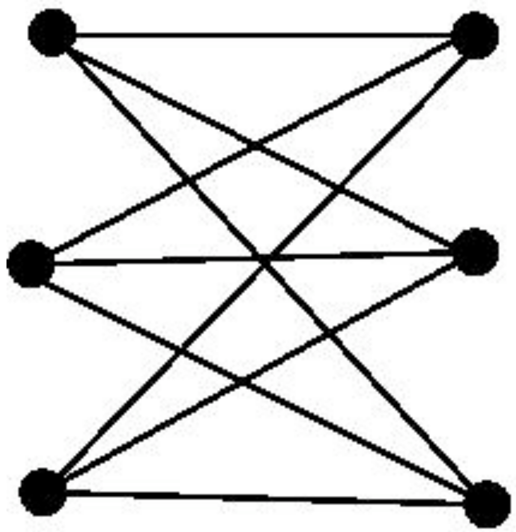
Teorema (Laman, 1970)**:** un grafo $G=(V, E)$ es genéricamente libre en dim. 2 si, y sólo si, para todo subconjunto S de k vértices ($k=0,\ldots,n$) el grafo restringido a S tiene a lo más $2k$ - 3 aristas.

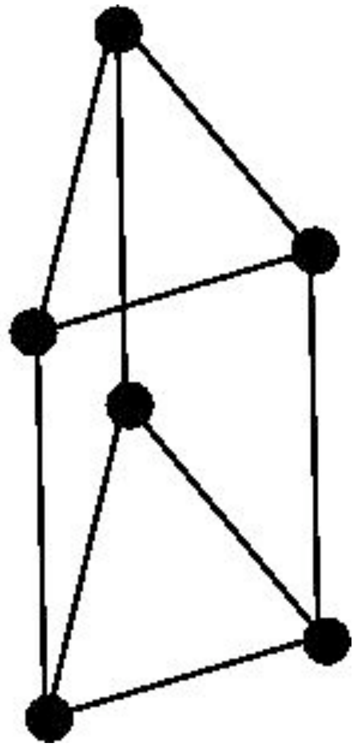
Esto caracteriza los grafos (gen.) rígidos porque un grafo $G=(V, E)$ con n vértices es genéricamente rígido en dimensión dos si, y sólo si, contiene un subgrafo con $2n$ -3 aristas y genéricamente libre.

Problema abierto: caracterizar **combinatoriamente** los grafos genéricamente rígidos en dimensión 3. Por ejemplo, no se conoce ningún “algoritmo polinómico” para decidir esto (nota: la propiedad de Laman se puede comprobar en tiempo nm)

Algunos “grafos de Laman”

Grafo de Laman: tiene exactamente $2n$ - 3 aristas y todo subconjunto de $2k$-3 aristas es incidente a al menos k vértices.





Resumen

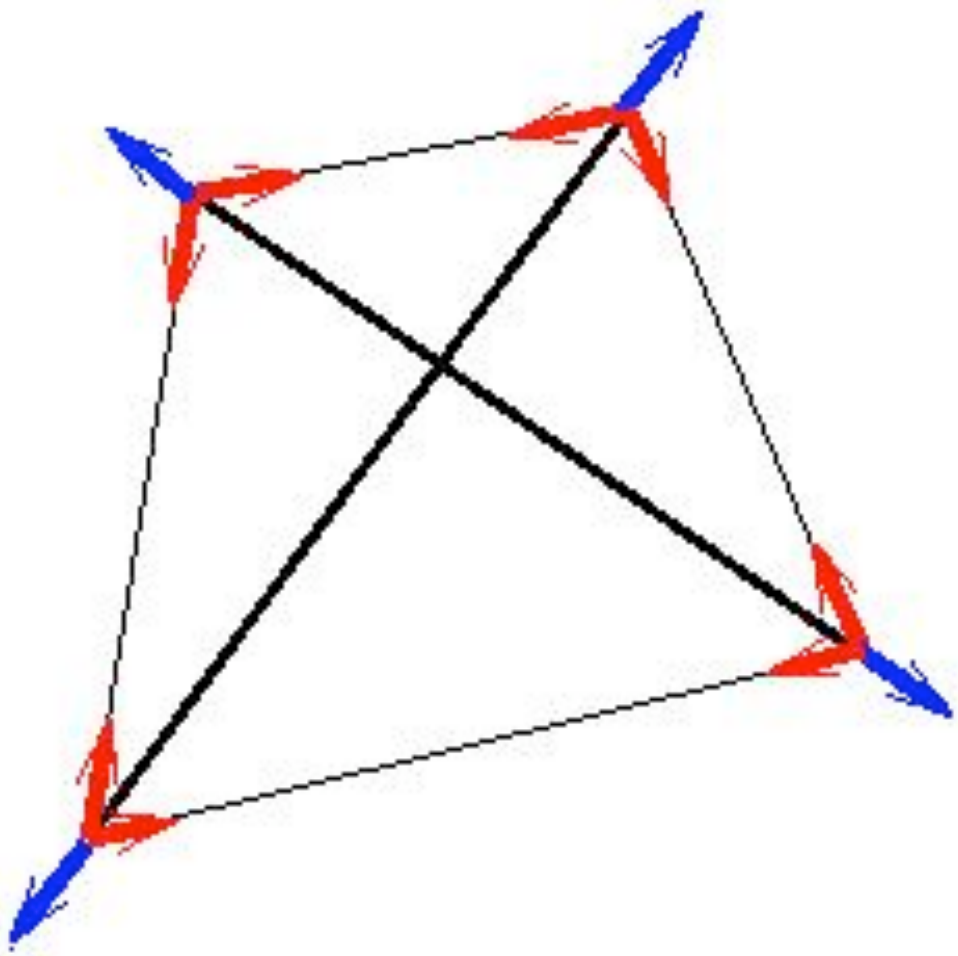
•**Rigidez "a secas":** problema *geométrico*, cuya solución involucra geometría algebraica y análisis (ecuaciones diferenciales).

•**Rigidez infinitesimal:** problema *algebraico* (más concretamente, de álgebra lineal).

•**Rigidez genérica:** problema *combinatorio*, aunque en dimensión mayor que 2 sólo lo sabemos resolver con métodos algebro-geométricos: calcular el determinante de la matriz *L* tomando coeficientes "aleatorios" o coeficientes "paramétricos" (usando métodos simbólicos en el último caso)

Los dos primeros se refieren a un armazón o grafo geométrico. El último a un grafo abstracto.

¿Y qué tiene esto que ver con las tensegridades?

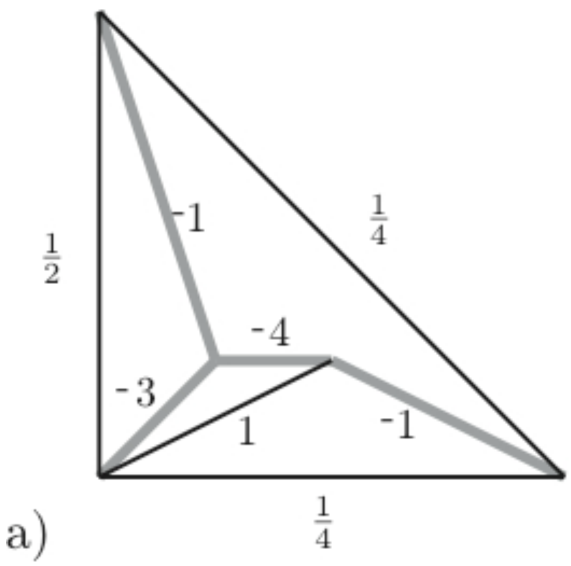


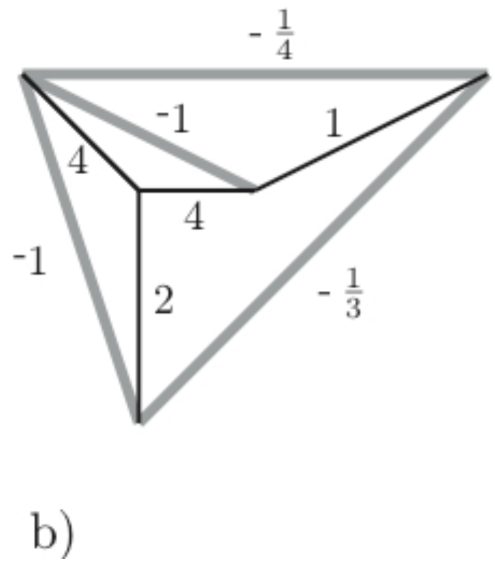
Autotensión

Definición: llamaremos autotensión o tensión en equilibrio en un armazón lo que Guzmán llama tensegridad: *“una asignación de vectores a los vértices, en las direcciones de los segmentos que concurren en ellos de forma que:*

(1) La resultante en cada punto es nula.

(2) Para cada segmento, la suma de los vectores asignados a sus extremos es cero.”





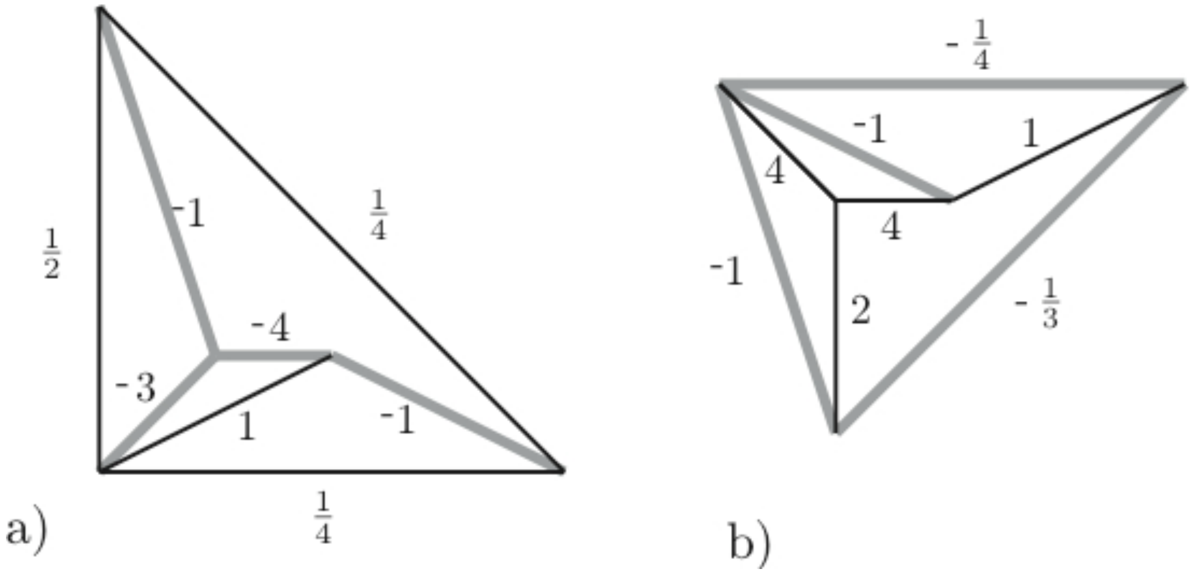
Autotensión

Por la condición (2) dar una autotensión es lo mismo que asignar un número $t(e)$ a cada arista (positivo=tensión “hacia dentro”, negativo=“presión hacia fuera”).

Por (1), dichas presiones/tensiones se cancelan unas a otras (equilibrio) en cada vértice).

Observación: con esta descripción las autotensiones de un armazón forman un espacio vectorial.

¿Tendrán que ver con la rigidez infinitesimal?



Autotensión

Por supuesto!: una autotensión en un armazón con vértices $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$ y aristas $V=\{e_1,\ldots,e_m\}$ es un elemento en el núcleo de *esta otra* aplicación lineal:

$$T: \quad \mathbf{R}^m \quad \text{----->} \quad (\mathbf{R}^2)^n$$

$$(t_1,\ldots,t_m) \quad |\text{----->} \quad \left(\sum (p_l - p_k)\, t_{kl}\right)_{k=1,\ldots,n}$$

donde la suma recorre todos los vecinos del vértice k, y $t_{kl}=t_{lk}$ es la tensión asignada a la arista k-ésima.

Observación: T no es más que la aplicación dual (matriz traspuesta) de la aplicación de rigidez $L : (\mathbf{R}^2)^n$ -----> $\mathbf{R}^m$ del armazón!

Autotensión

Por tanto, tanto la rigidez infinitesimal como la existencia de una autotensión dependen únicamente del **rango de la matriz de rigidez** $M : (\mathbf{R}^2)^n$ -----> $\mathbf{R}^m$ del armazón:

Infinitesimalmente rígido <=> *rango* = $2n$-3

$2n - 3 - r$ = grados de libertad infinitesimales

Libre de autotensión <=> $r = m$

$m - r$ = dimensión del espacio de autotensiones

Conclusión

El estudio de las tensegridades de un armazón dado (con sus posiciones) es equivalente al estudio de su rigidez infinitesimal, es decir, el estudio de “cierta aplicación lineal”.

Más complicado es el estudio de, dado un modelo combinatorio del armazón (un grafo) decidir en qué posiciones (armazón) admite una tensegridad, si es que las hay.
(“Form-finding methods”).

Esto pasa primero por estudiar la rigidez genérica del grafo, lo cual en dimensión tres (y superior) no se sabe hacer de manera satisfactoria.

Este es el problema que interesaba a Miguel de Guzmán.

Breve historia de

la teoría de

la rigidez

1) La conjetura de Euler

2) Mecanismos artculados (linkages)

3) Maxwell. Autotensiones y diagramas recíprocos

1. La conjetura de Euler

Conjetura: "*Una figura espacial cerrada no admite cambios, salvo que la rompamos*".

Euler, 1766

Es decir: "un poliedro cerrado de dimensión tres no se puede deformar sin deformar alguna de sus caras".

Y en particular: "el armazón formado por los vértices y aristas de un poliedro cerrado de caras **triangulares** no posee ninguna flexión".

¡Hemos tardado más de 200 años en resolverla!

Primeros pasos: Teorema de Cauchy

Teorema: "*Si hay una isometría entre las superficies de dos poliedros cerrados* ***estrictamente convexos****, entonces dichos poliedros son congruentes*".

Cauchy, 1813

Es decir, prueba la conjetura de Euler (y más) para poliedros estrictamente convexos

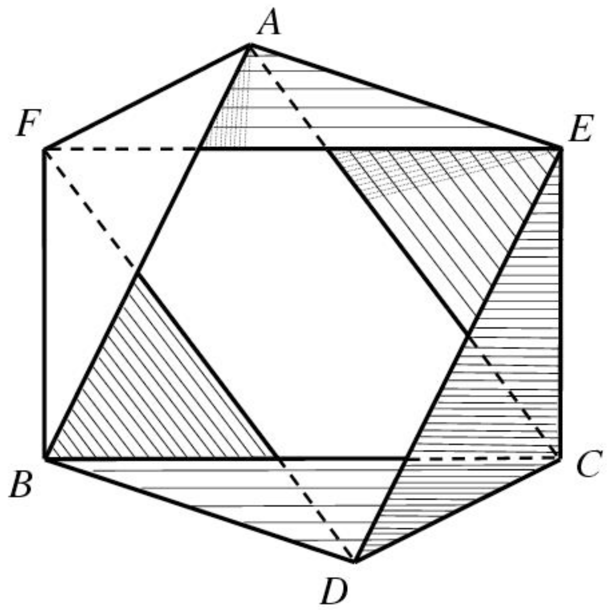
En particular: "el armazón formado por los vértices y aristas de un poliedro cerrado **estrictamente** convexo y de caras **triangulares** no posee ninguna flexión".

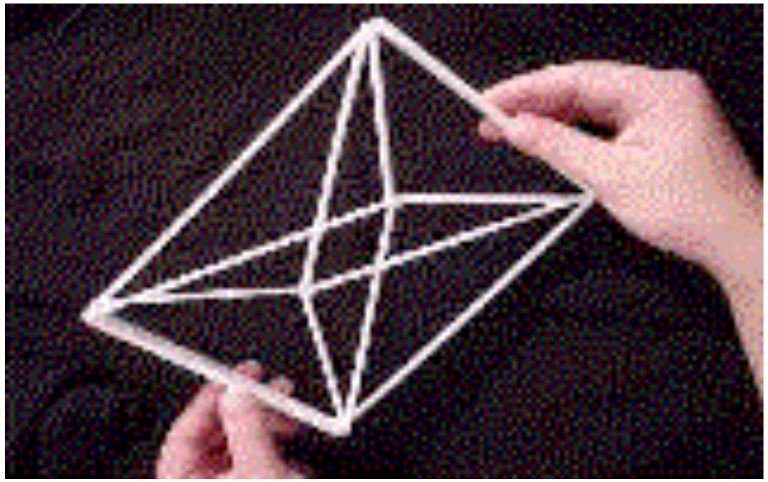
La demostración de Cauchy no era del todo correcta; la primera demostración que hoy consideramos correcta es de 1934 (Steinitz-Rademacher)

Un ejemplo alentador: Bricard

Teorema: “*La conjetura de Euler es cierta para todo poliedro (convexo o no) con la estructura de un octaedro. Sin embargo, hay realizaciones del* ***grafo*** *del octaedro que admiten flexiones*.”

R. Bricard, 1897





Seguimos avanzando: Alexandrov

Teorema: “*Si triangulamos las caras de un poliedro convexo (permitiendo añadir vértices partiendo aristas, pero no vértices en el interior de las caras) el armazón subyacente es infinitesimalmente rígido*.”

A. D. Alexandrov, 1950

(en cierto modo, en el Teorema de Cauchy se puede eliminar el “estrictamente”)

Ya casi estamos: Gluck

Teorema: “*Toda superficie poliédrica cerrada y simplemente conexa en* $\boldsymbol{R}^3$ *es* ***genérica-mente*** *rígida*.”

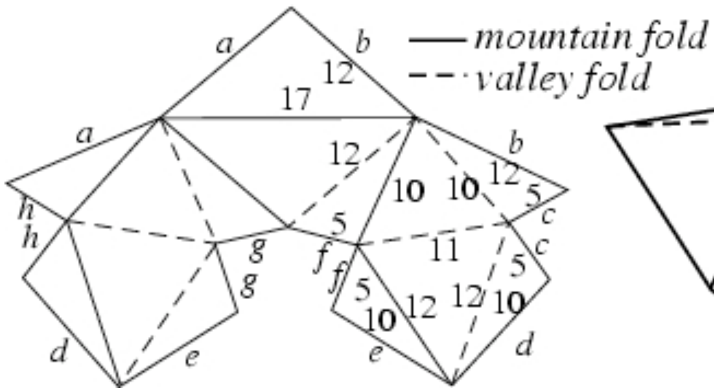
H. Gluck, 1975

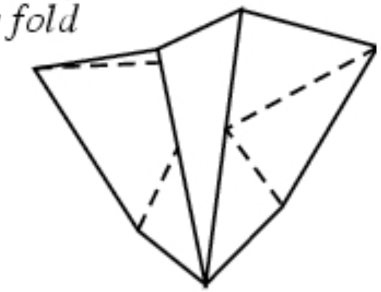
Simplemente conexa <=> “homeomorfa a una esfera”
<=> no tiene “agujeros”

… o eso pensábamos: Connelly

Teorema: “*Existen poliedros (no convexos) cerrados (y simplemente conexos, y y con caras triangulares) flexibles*.”

Connelly, 1977





El poliedro flexible más pequeño que existe. Tiene 14 caras, 21 aristas, y 9 vértices. Construido por Steffen en 1995 (el original de Connelly tanía del orden de 30 caras).

Pero la cosa continúa (unos años)

Conjetura: “*En toda flexión continua de un poliedro cerrado, se mantiene constante el volumen encerrado por el mismo.”*

“**conjetura del fuelle**”, Connelly, 1978, en su contribución al ICM de Helsinki.

Esta conjetura **sí** resultó ser cierta (I. Sabitov 1995, Connelly-Sabitov-Walz, 1997). Lo que se demuestra es que el volumen encerrado por un poliedro (flexible o no) es un número “entero sobre el anillo generado por los cuadrados de las longitudes de las aristas”.

2. Mecanismos articulados (linkages)

Consideramos armazones flexibles (planos o espaciales) con un solo grado de libertad. Nos preguntamos qué trayectoria sigue un punto concreto del armazón.

James Watt y el “movimiento paralelo” (1784)

Para transformar el movimiento lineal (pistón) en movimiento circular (eje de las ruedas) Watt ideó un mecanismo que, aunque no era exacto, producía mcho mayor rendimiento que todos los anteriores. Lo llamó el mecanismo del “movimiento paralelo”.

"Though I am not over anxious after fame, yet I am more proud of the parallel motion than of any other mechanical invention I have ever made.”
James Watt (a su hijo)

Chebyshev (1821-1894), entre otros, estuvo muy interesado en mejorar el mecanismo de Watt, o en encontrar uno que fuera **exacto**.

Peaucellier (1864) y Lipkin (1971)

Peaucellier en Francia y Lipkin en Rusia descubrieron independientemente un mecanismo que convierte el movimiento circular en lineal *de manera exacta* (además de ser capaz de invertir magnitudes, o dibujar arcos de circunferencia de radio arbitrariamente grande; se basa en el concepto de “inversión respecto a un círculo” de la geometría proyectiva”)

"The perfect parallel motion of Peaucellier looks so simple, and moves so easily that people who see it at work almost universally express astonishment that it waited so long to be discovered.

J. J. Sylvester, 1874

"No! I have not had nearly enough of it - it is the most beautiful thing I have ever seen in my life."

Sir William Thomson (Lord Kelvin)

Teorema de universalidad (Kempe)

NATURE SERIES.

HOW TO DRAW A STRAIGHT LINE;

A

LECTURE ON LINKAGES.

BY

A. B. KEMPE, B.A.,

OF THE INNER TEMPLE, ESQ.;
MEMBER OF THE COUNCIL OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY;
AND LATE SCHOLAR OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE.

WITH NUMEROUS ILLUSTRATIONS.

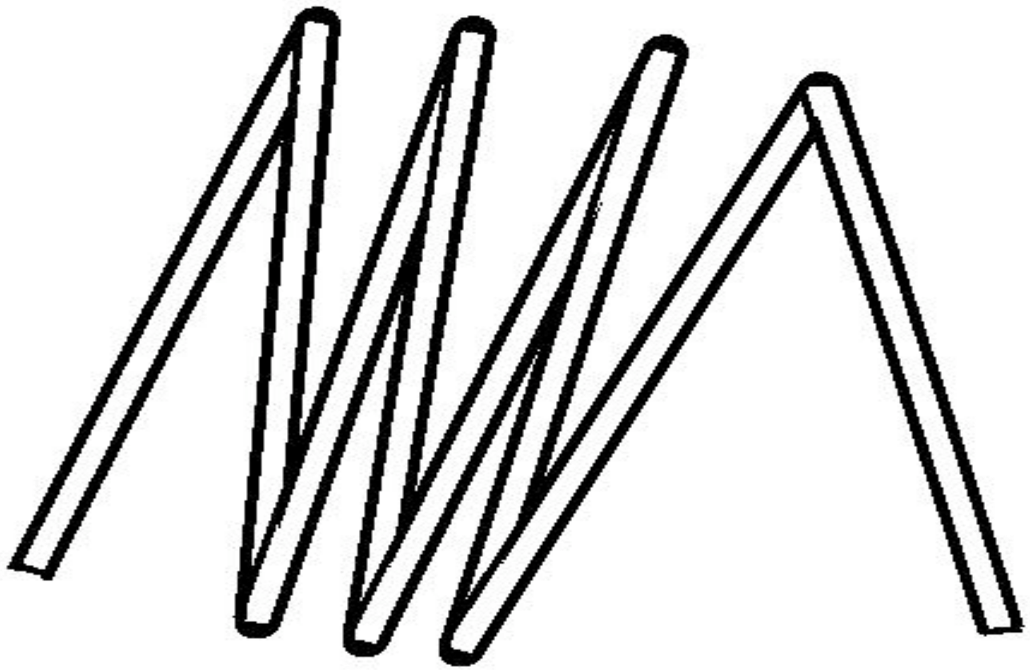
London:
MACMILLAN AND CO.
1877.

[*The Right of Translation and Reproduction is Reserved.*]

Teorema (Kempe, 1876): **cualquier** curva algebraica en el plano se puede trazar (quizá a trozos) con un mecanismo adecuado.

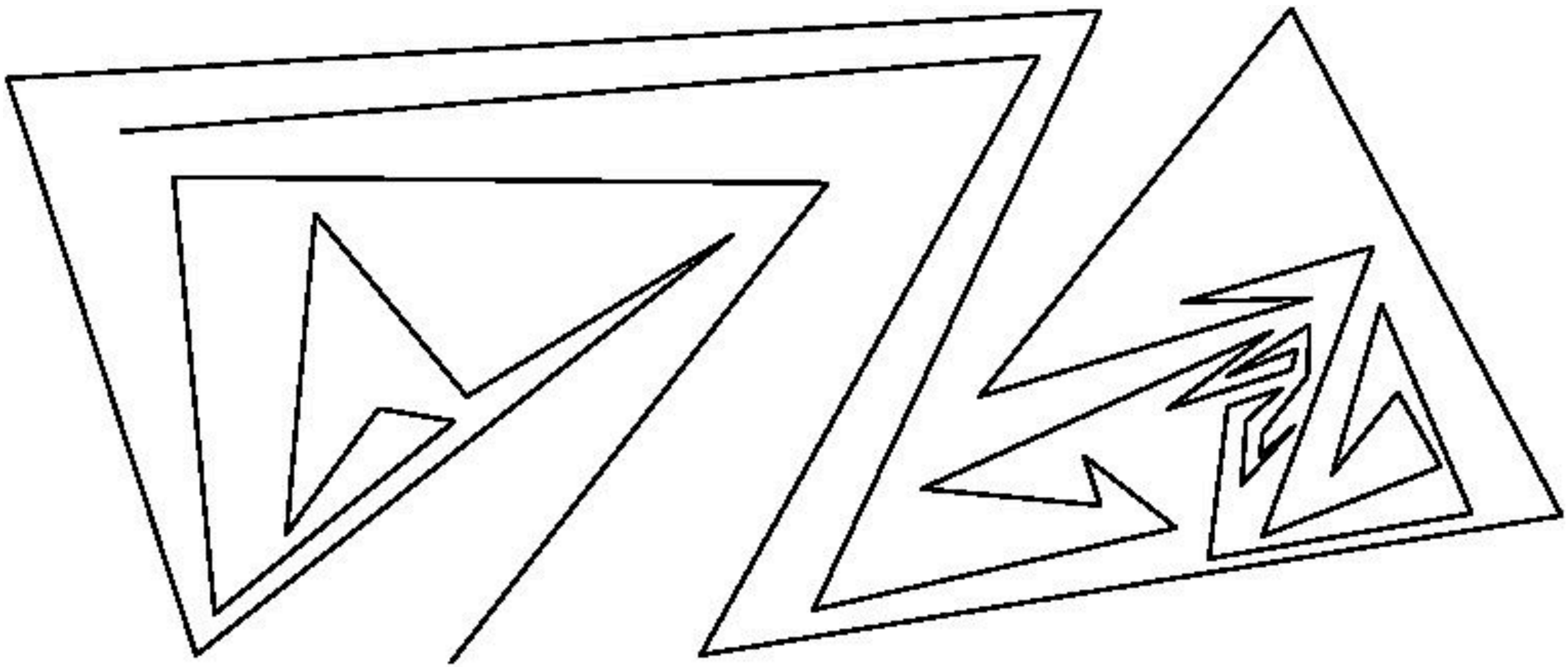
(por ejemplo, existe un mecanismo articulado que imita tu firma)

Un problema reciente relacionado: “la regla del carpintero”



Una regla de carpintero…

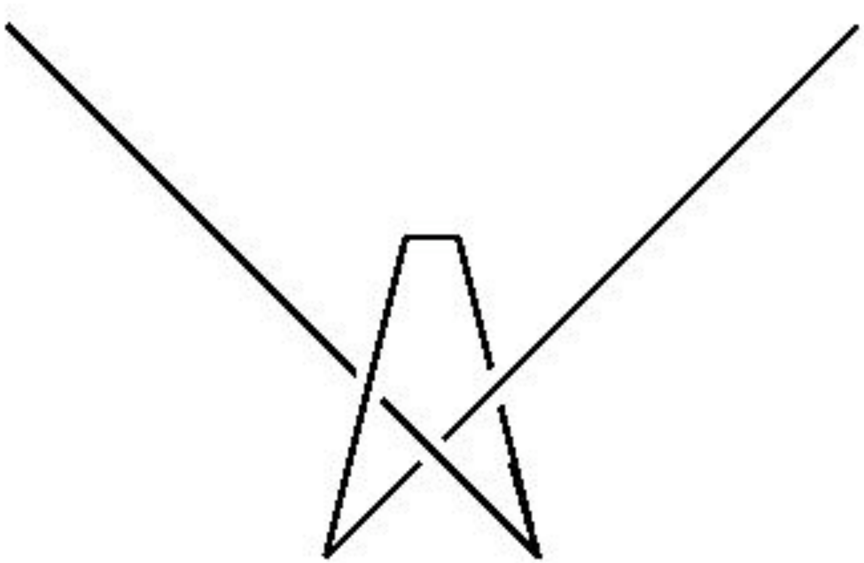
… y su generalización matemática:



Una curva poligonal sin autointersecciones.

Durante un par de décadas estuvo abierto el problema de si toda curva poligonal sin autointersecciones puede “abrirse” de manera continua. Finalmente, en 2001, se encontraron dos demostraciones diferentes (Connelly-Demaine-Rote, Streinu). Las dos demuestran, de hecho, que el movimiento de apertura es “expansivo” (la distancia entre cada pareja de puntos crece monótonamente durante el movimiento).

El enunciado análogo en dimensión 3 es falso:



El estudio de estos problemas en mecanismos articulados de dimensión tres “está muy de moda”, por su relación con biología molecular (reconfiguración geométrica de grandes moléculas orgánicas).

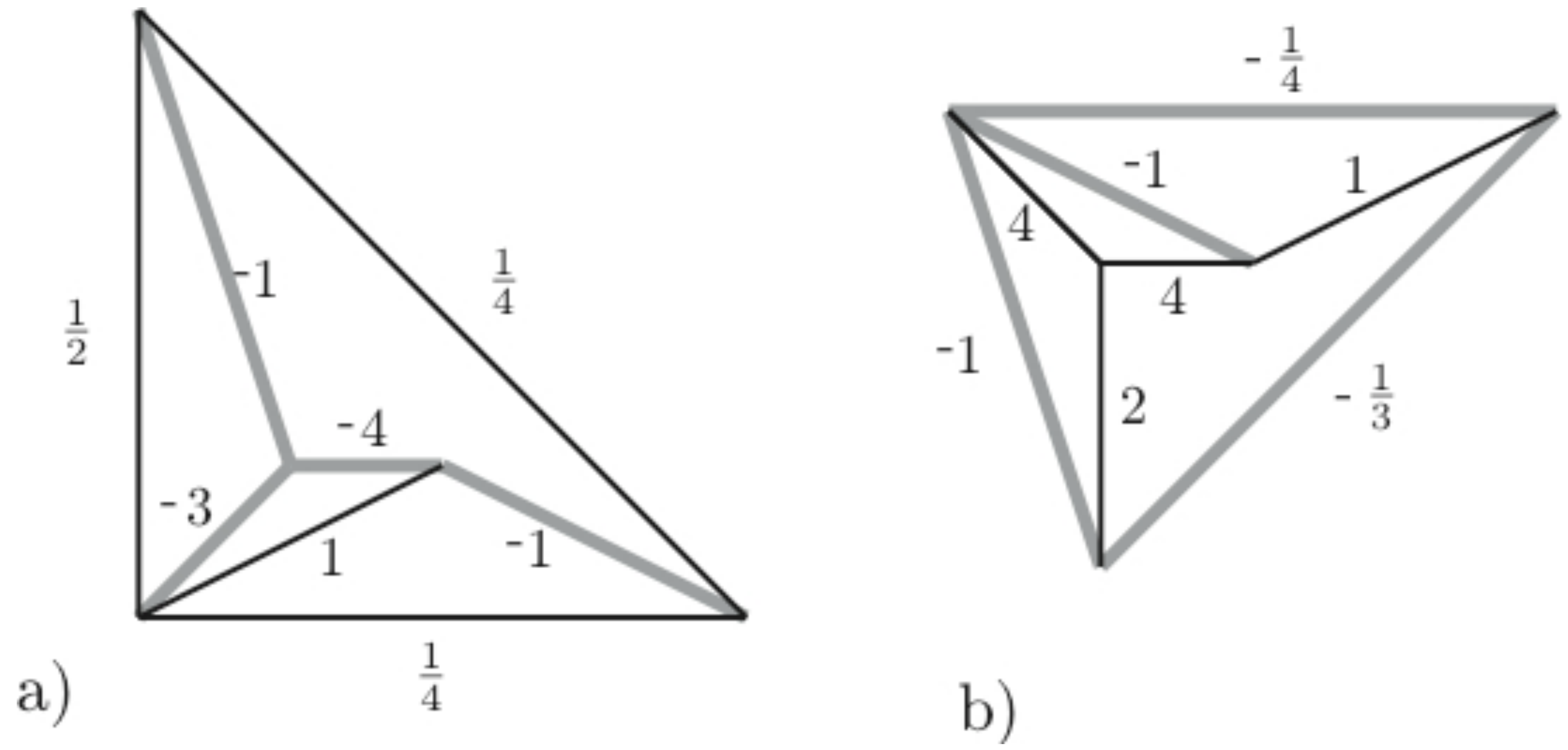
3. Autotensiones, levantamientos y diagramas recíprocos (Maxwell)

Maxwell (1864) estudió el espacio lineal formado por las autotensiones de un armazón y demostró que:

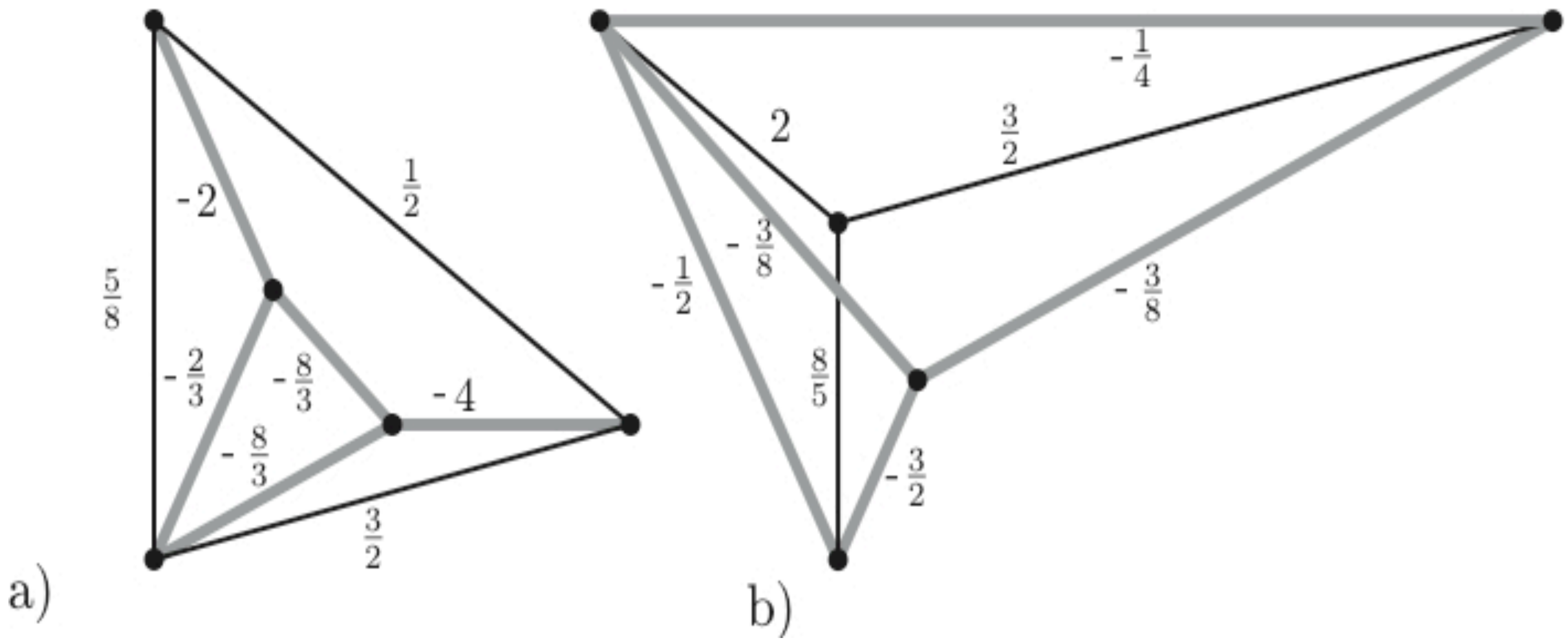
Teorema: *si un armazón* ***A*** *de dimensión* 2 *es la proyección ortogonal del "1-esqueleto" de un poliedro, entonces:*

1) *Admite una autotensión.* (El valor de la tensión en cada arista está relacionado con el ángulo diédrico que dicha arista tiene en el levantamiento).
2) *Admite un "armazón recíproco*" **B**, (cuyo grafo es el "dual geométrico" del primero, con caras de uno en byección con vértices del otro, y con aristas de uno en biyección con y ortogonales a las del otro).

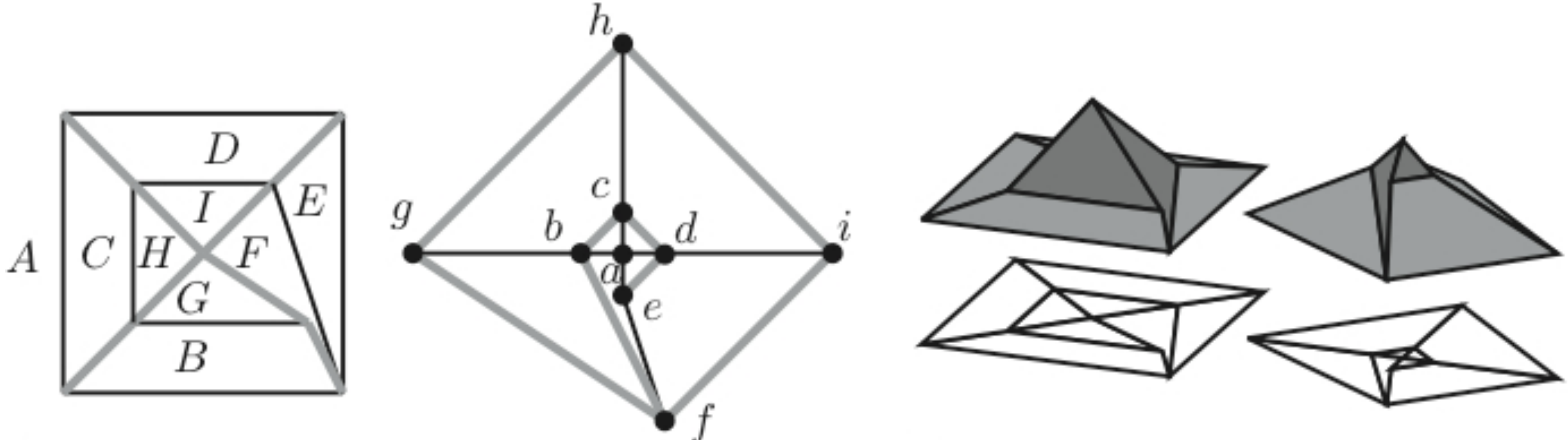
Además, el armazón recíproco **B** *también admite una autotensión, que es "recíproca" de la de* **A**.



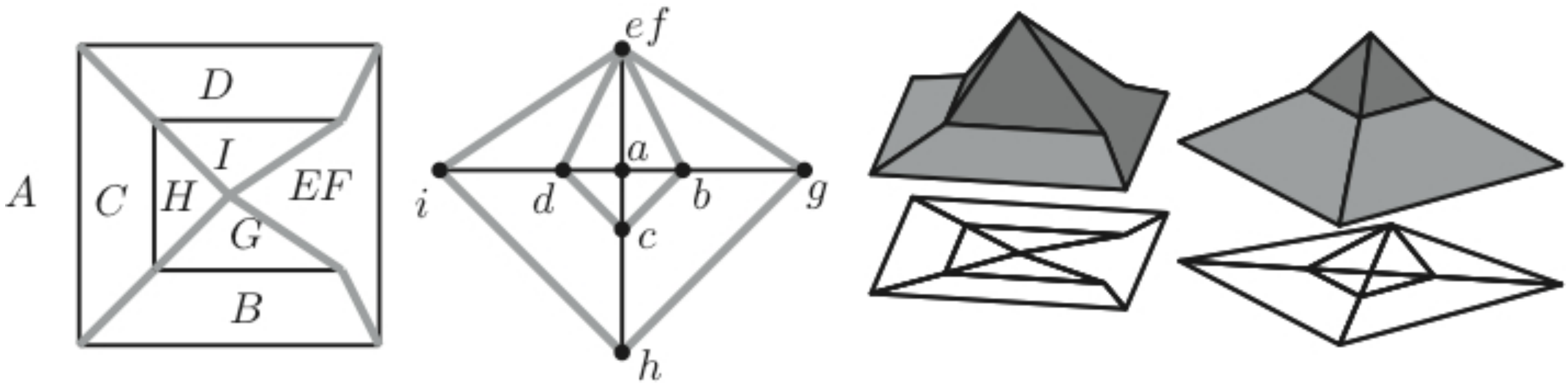
Un armazón plano con una autotensión, y su recíproco con la autotensión recíproca.



La reciprocidad de Maxwell funciona incluso si uno
(o ambos) de los armazones tienen cruces de aristas.

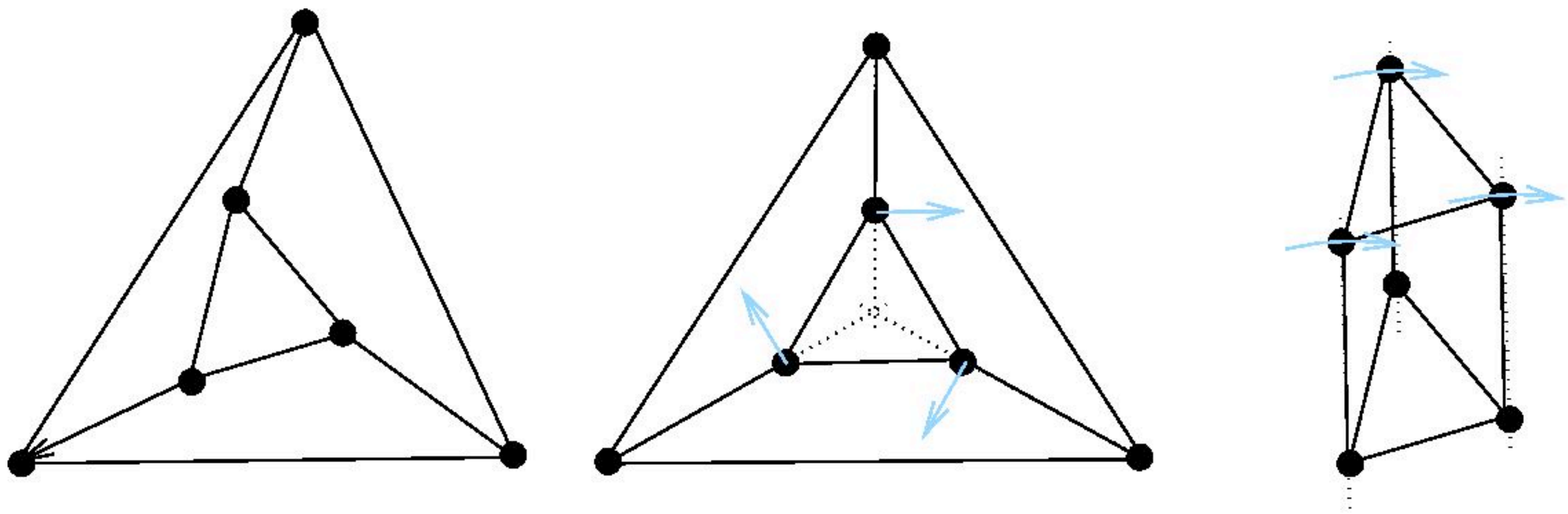


a) b)



a) b)

El teorema de Maxwell explica por qué el grafo de un prisma es infinitesimalmente flexible si (y sólo si) los dos triángulos están en "posición perspectiva".



Posición perspectiva <=> es proyección de un poliedro (prisma)
<=> admite una autotensión
<=> rango(T) < n. de aristas = 9
<=> rango(L) < 9 = 2 n - 3
<=> flexión infinitesimal

Invariancia proyectiva
de la rigidez infinitesimal
(es decir, de las tensegridades)

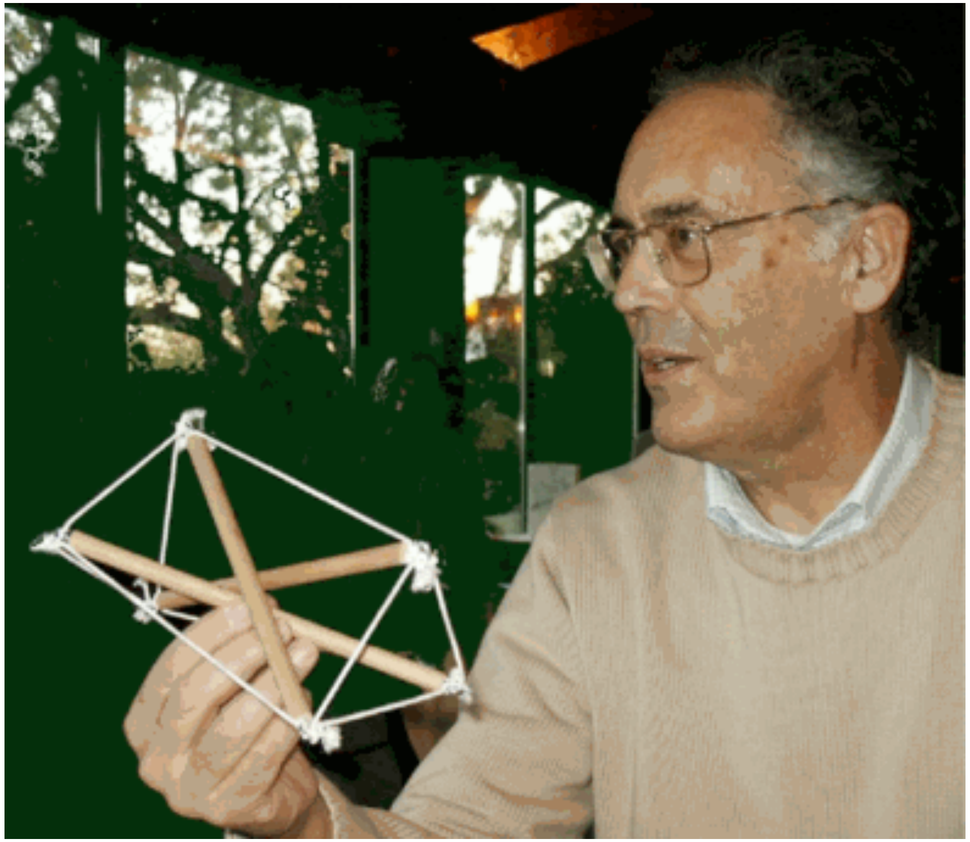
Puesto que “ser proyección de” es un invariante proyectivo, el teorema de Maxwell también hace intuir que la rigidez infinitesimal (no así la rigidez “a secas”) **es un invariante proyectivo:**

Teorema (Roth y Whiteley, 1981): si dos armazones son proyectivamente equivalentes, sus espacios de autotensiones, ergo sus espacios de flexiones infinitesimales, son isomorfos.

Esto fue redescubierto (como conjetura, y demostrado en algunos casos particulares) por Miguel de Guzmán.

“Si no eres muy ambicioso, puede resultar un verdadero placer darte cuenta de que lo que estabas haciendo ya había sido descubierto. Al menos, eso indica que ibas por el buen camino.”

(I. M. Gel´fand)



Referencia recomendada:

"Counting on frameworks (Mathematics to aid the design of rigid structures)", Jack E. Graver, The Mathematical Association of America, 2001.