¿A quién le importa la Conjetura de Hirsch?

Francisco Santos
http://personales.unican.es/santosf

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación
Universidad de Cantabria, Spain

6 de Octubre de 2010
Universidad de Cantabria, Matemáticas en Acción

Poliedros y politopos

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

El diámetro (combinatorio) de un politopo con n facetas y dimensión d no puede ser mayor que $n - d$.

¿A quién le importa?

1) A los matemáticos (discretos)

Poliedros y politopos

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

El diámetro (combinatorio) de un politopo con n facetas y dimensión d no puede ser mayor que $n - d$.

¿A quién le importa?

1) A los matemáticos (discretos)

Poliedros y politopos

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

El diámetro (combinatorio) de un politopo con n facetas y dimensión d no puede ser mayor que $n - d$.

¿A quién le importa?

1) A los matemáticos (discretos)

Matemática Discreta

El desarrollo reciente de la combinatoria es en cierto modo la historia de la cenicienta: los matemáticos ortodoxos la miraban por encima del hombro, considerándola menos respetable que otras áreas a pesar de sus muchos servicios tanto a la matemática pura como aplicada. Pero entonces llegó el príncipe de la informática con todos sus problemas y necesidades matemáticas, y la combinatoria fue a quien mejor le entraba el zapatito de cristal".

(A. Björner, R. P.~Stanley, 1999)

Poliedros y politopos

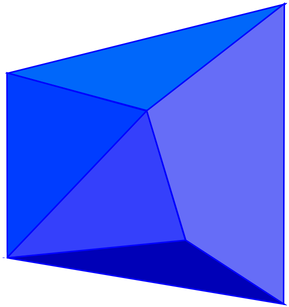
Definición

Un poliedro (convexo) P es la intersección de una familia finita de semi-espacios afines en $\mathbb{R}^d$.

Poliedros y politopos

Definición

Un politopo (convexo) es un poliedro acotado.



Poliedros y politopos

Caras de P

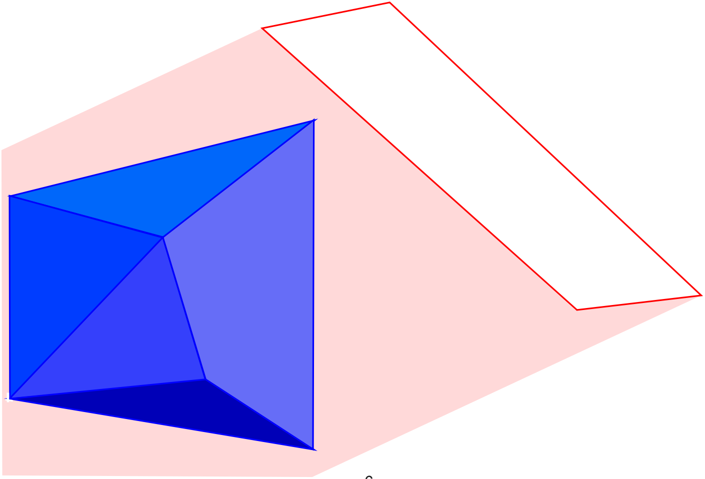
Sea P un politopo (o poliedro) y sea

$$H = \{x \in \mathbb{R}^d : a_1 x_1 + \cdots a_d x_d \leq a_0\}$$

un semiespacio afín.

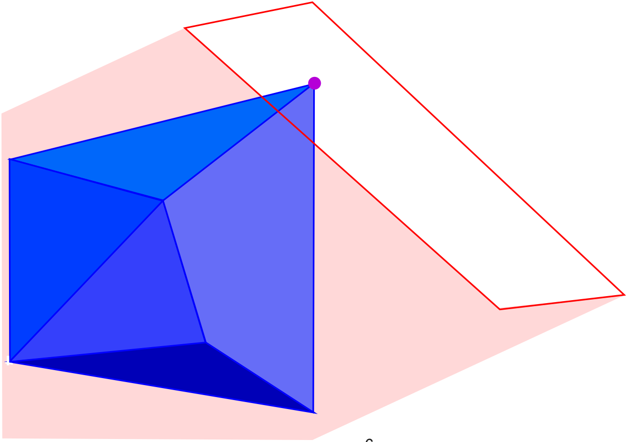
Caras de P

Si $P \subset H$ decimos que $\partial H \cap P$ es una cara de P.



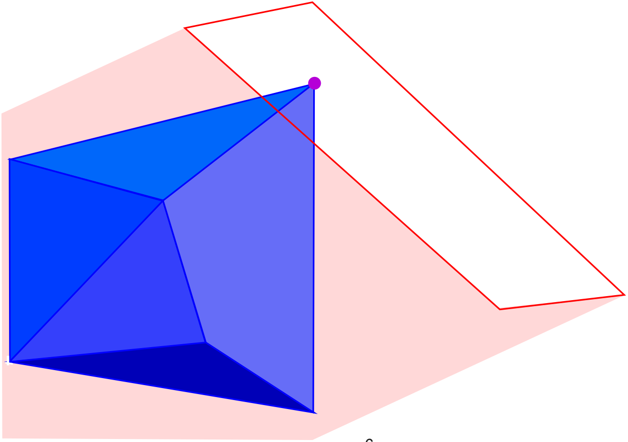
Caras de P

Si $P \subset H$ decimos que $\partial H \cap P$ es una cara de P.



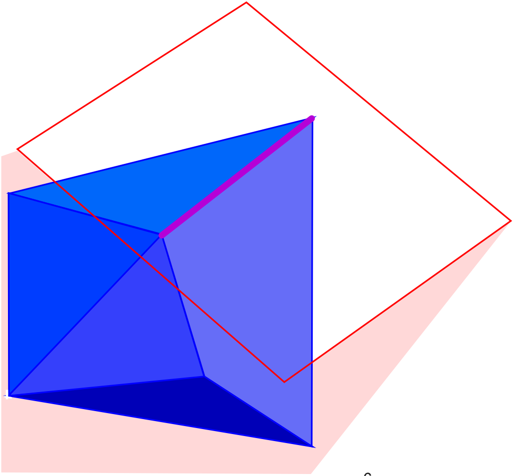
Caras de P

Las caras de dimensión 0 son los vértices.



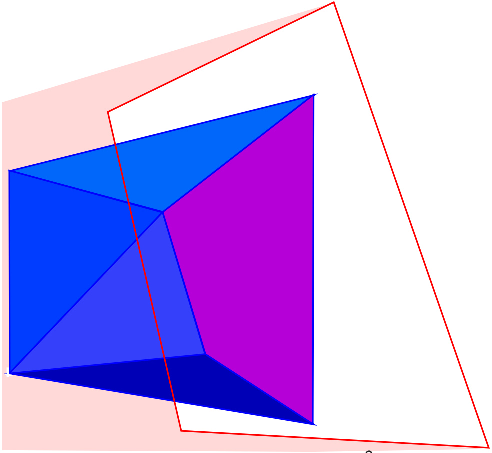
Caras de P

Las caras de dimensión 1 son las aristas.



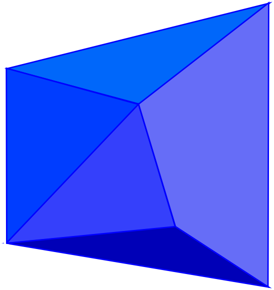
Caras de P

Las caras de dimensión $d - 1$ se llaman facetas.



El grafo de un politopo

Los vértices y aristas de un politopo forman su grafo.

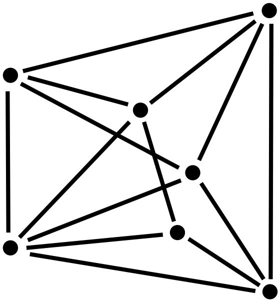


La distancia $d(u, v)$ entre dos vértices u y v es el número de aristas mínimo que es necesario recorrer para ir de u a v.

Por ejemplo, $d(u, v) = 2$.

El grafo de un politopo

Los vértices y aristas de un politopo forman su grafo.

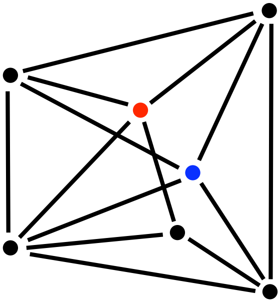


La distancia $d(u, v)$ entre dos vértices u y v es el número de aristas mínimo que es necesario recorrer para ir de u a v.

Por ejemplo, $d(u, v) = 2$.

El grafo de un politopo

Los vértices y aristas de un politopo forman su grafo.

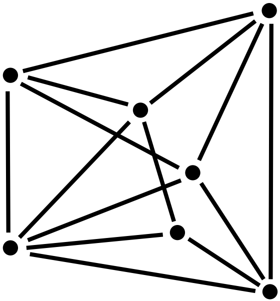


La distancia $d(u, v)$ entre dos vértices u y v es el número de aristas mínimo que es necesario recorrer para ir de u a v.

Por ejemplo, $d(u, v) = 2$.

El grafo de un politopo

Los vértices y aristas de un politopo forman su grafo.



El diámetro de $G(P)$ (o de P) es la mayor distancia entre sus vértices.

$$\delta(P) = \max\{d(u,v) : u, v \in V\}.$$

Breve historia de la conjetura

1. La enunció Hirsch en una carta a Dantzig, inventor del método del símplice en programación lineal.
2. En 1967, Klee y Walkup encontraron un contraejemplo al caso no acotado, pero dejaron abierto el caso acotado. (Este contraejemplo tiene $n = 8$, $d = 4$ y diámetro 5).
3. Con el tiempo la conjetura se ha demostrado para politopos "pequeños" ($d \leq 3$, $n - d \leq 6$) pero en el caso general *no se conoce siquiera una cota polinómica para el diámetro del grafo de un politopo.*
4. En Mayo anuncié un contraejemplo. Tiene $d = 23$, $n = 46$ y diámetro 24. Mediante operaciones "estándar" se puede obtener una serie infinita de contraejemplos, en la que el diámetro crece (más o menos) como $1.04(n - d)$.

Breve historia de la conjetura

1. La enunció Hirsch en una carta a Dantzig, inventor del método del símplice en programación lineal.
2. En 1967, Klee y Walkup encontraron un contraejemplo al caso no acotado, pero dejaron abierto el caso acotado. (Este contraejemplo tiene $n = 8$, $d = 4$ y diámetro 5).
3. Con el tiempo la conjetura se ha demostrado para politopos "pequeños" ($d \leq 3$, $n - d \leq 6$) pero en el caso general *no se conoce siquiera una cota polinómica para el diámetro del grafo de un politopo.*
4. En Mayo anuncié un contraejemplo. Tiene $d = 23$, $n = 46$ y diámetro 24. Mediante operaciones "estándar" se puede obtener una serie infinita de contraejemplos, en la que el diámetro crece (más o menos) como $1.04(n - d)$.

Breve historia de la conjetura

1. La enunció Hirsch en una carta a Dantzig, inventor del método del símplice en programación lineal.
2. En 1967, Klee y Walkup encontraron un contraejemplo al caso no acotado, pero dejaron abierto el caso acotado. (Este contraejemplo tiene $n = 8$, $d = 4$ y diámetro 5).
3. Con el tiempo la conjetura se ha demostrado para politopos "pequeños" ($d \leq 3$, $n - d \leq 6$) pero en el caso general *no se conoce siquiera una cota polinómica para el diámetro del grafo de un politopo.*
4. En Mayo anuncié un contraejemplo. Tiene $d = 23$, $n = 46$ y diámetro 24. Mediante operaciones "estándar" se puede obtener una serie infinita de contraejemplos, en la que el diámetro crece (más o menos) como $1.04(n - d)$.

Breve historia de la conjetura

1. La enunció Hirsch en una carta a Dantzig, inventor del método del símplice en programación lineal.
2. En 1967, Klee y Walkup encontraron un contraejemplo al caso no acotado, pero dejaron abierto el caso acotado. (Este contraejemplo tiene $n = 8$, $d = 4$ y diámetro 5).
3. Con el tiempo la conjetura se ha demostrado para politopos "pequeños" ($d \leq 3$, $n - d \leq 6$) pero en el caso general *no se conoce siquiera una cota polinómica para el diámetro del grafo de un politopo.*
4. En Mayo anuncié un contraejemplo. Tiene $d = 23$, $n = 46$ y diámetro 24. Mediante operaciones "estándar" se puede obtener una serie infinita de contraejemplos, en la que el diámetro crece (más o menos) como $1.04(n - d)$.

Breve historia de la conjetura

1. La enunció Hirsch en una carta a Dantzig, inventor del método del símplice en programación lineal.
2. En 1967, Klee y Walkup encontraron un contraejemplo al caso no acotado, pero dejaron abierto el caso acotado. (Este contraejemplo tiene $n = 8$, $d = 4$ y diámetro 5).
3. Con el tiempo la conjetura se ha demostrado para politopos "pequeños" ($d \leq 3$, $n - d \leq 6$) pero en el caso general *no se conoce siquiera una cota polinómica para el diámetro del grafo de un politopo.*
4. En Mayo anuncié un contraejemplo. Tiene $d = 23$, $n = 46$ y diámetro 24. Mediante operaciones "estándar" se puede obtener una serie infinita de contraejemplos, en la que el diámetro crece (más o menos) como $1.04(n - d)$.

Programación lineal

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

El diámetro (combinatorio) de un politopo con n facetas y dimensión d no puede ser mayor que $n - d$.

¿A quién le importa?

2) A todo (o casi) el que tenga un problema de logística, planificación, asignación de recursos,...

Programación lineal

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

El diámetro (combinatorio) de un politopo con n facetas y dimensión d no puede ser mayor que $n - d$.

¿A quién le importa?

2) A todo (o casi) el que tenga un problema de logística, planificación, asignación de recursos,...

Programación lineal

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

El diámetro (combinatorio) de un politopo con n facetas y dimensión d no puede ser mayor que $n - d$.

¿A quién le importa?

2) A todo (o casi) el que tenga un problema de logística, planificación, asignación de recursos,...

Programación matemática

La programación matemática (u optimización) es la parte de la matemática que estudia cómo escoger la mejor entre las muchas alternativas (soluciones) que puede tener un sistema.

Forma parte de la investigación operativa o “matemática de la toma de decisiones”.

Nació en los años 30 y 40, bebiendo de varias fuentes: teoría de juegos (von Neumann-Morgenstern), estrategia militar (Blackett-Dantzig), planificación económica (Leontief-Kantorovich), logística (Hitchcock-Koopmans).

Programación matemática

La programación matemática (u optimización) es la parte de la matemática que estudia cómo escoger la mejor entre las muchas alternativas (soluciones) que puede tener un sistema.

Forma parte de la investigación operativa o “matemática de la toma de decisiones”.

Nació en los años 30 y 40, bebiendo de varias fuentes: teoría de juegos (von Neumann-Morgenstern), estrategia militar (Blackett-Dantzig), planificación económica (Leontief-Kantorovich), logística (Hitchcock-Koopmans).

Programación matemática

La programación matemática (u optimización) es la parte de la matemática que estudia cómo escoger la mejor entre las muchas alternativas (soluciones) que puede tener un sistema.

Forma parte de la investigación operativa o “matemática de la toma de decisiones”.

Nació en los años 30 y 40, bebiendo de varias fuentes: teoría de juegos (von Neumann-Morgenstern), estrategia militar (Blackett-Dantzig), planificación económica (Leontief-Kantorovich), logística (Hitchcock-Koopmans).

Un problema para nutricionistas

Ejemplo1

¿Cuál es la manera óptima de meter una serie de alimentos en una dieta, digamos, semanal?

Cada alimento aporta una serie de nutrientes (calorías, proteinas, vitaminas, ...) de los cuales necesitamos un mínimo diario (o un máximo, e.g., en grasas, colesterol,. . .). De entre las muchas maneras de suplir todas nuestras necesidades, queremos elegir “la mejor” (la más barata, o la que menos engorda, o la que mejor satisface algún otro criterio).

Un problema para nutricionistas

Ejemplo1

¿Cuál es la manera óptima de meter una serie de alimentos en una dieta, digamos, semanal?

Cada alimento aporta una serie de nutrientes (calorías, proteinas, vitaminas, ...) de los cuales necesitamos un mínimo diario (o un máximo, e.g., en grasas, colesterol,. . .). De entre las muchas maneras de suplir todas nuestras necesidades, queremos elegir "la mejor" (la más barata, o la que menos engorda, o la que mejor satisface algún otro criterio).

Un problema para nutricionistas

Ejemplo1

¿Cuál es la manera óptima de meter una serie de alimentos en una dieta, digamos, semanal?

Cada alimento aporta una serie de nutrientes (calorías, proteinas, vitaminas, ...) de los cuales necesitamos un mínimo diario (o un máximo, e.g., en grasas, colesterol,. . .). De entre las muchas maneras de suplir todas nuestras necesidades, queremos elegir “la mejor” (la más barata, o la que menos engorda, o la que mejor satisface algún otro criterio).

Un problema para nutricionistas

Podemos modelizar este problema como sigue. Tenemos una variable (incógnita) x_i para cada uno de los 77 alimentos, que representa la cantidad que usaremos del mismo. Tenemos una "función objetivo" (precio) que queremos minimizar. Nota: la función objetivo es lineal.

Nuestro "espacio factible" es el subconjunto de $\mathbb{R}^{77}$ en el que se satisfacen todas las restricciones siendo cada una de ellas descrita mediante una desigualdad lineal.

Un problema para nutricionistas

Podemos modelizar este problema como sigue. Tenemos una variable (incógnita) x_i para cada uno de los 77 alimentos, que representa la cantidad que usaremos del mismo. Tenemos una "función objetivo" (precio) que queremos minimizar. Nota: la función objetivo es lineal.

Nuestro "espacio factible" es el subconjunto de $\mathbb{R}^{77}$ en el que se satisfacen todas las restricciones siendo cada una de ellas descrita mediante una desigualdad lineal.

Un problema para nutricionistas

Podemos modelizar este problema como sigue. Tenemos una variable (incógnita) x_i para cada uno de los 77 alimentos, que representa la cantidad que usaremos del mismo. Tenemos una “función objetivo” (precio) que queremos minimizar. Nota: la función objetivo es lineal.

Nuestro “espacio factible” es el subconjunto de $\mathbb{R}^{77}$ en el que se satisfacen todas las restricciones siendo cada una de ellas descrita mediante una desigualdad lineal.

Un problema para nutricionistas

Podemos modelizar este problema como sigue. Tenemos una variable (incógnita) x_i para cada uno de los 77 alimentos, que representa la cantidad que usaremos del mismo. Tenemos una "función objetivo" (precio) que queremos minimizar. Nota: la función objetivo es lineal.

Nuestro "espacio factible" es el subconjunto de $\mathbb{R}^{77}$ en el que se satisfacen todas las restricciones siendo cada una de ellas descrita mediante una desigualdad lineal.

Un problema para nutricionistas

producto	tamaño	energía	proteína	calcio	precio
pan	28 g	110	4	2	10
pollo	100 g	205	32	12	85
huevo	2 u	160	13	54	30
leche	237 cm^3	160	8	285	20
tarta fresa	170 g	420	4	22	75
papas con carne	260 g	260	14	80	72

$$
\begin{array}{lrrrrrrcl}
\min & 10x_1 & +85x_2 & +30x_3 & +20x_4 & +75x_5 & +72x_6 & & \\
 & 110x_1 & +205x_2 & +160x_3 & +160x_4 & +420x_5 & +260x_6 & \geq & 2000 \\
 & 4x_1 & +32x_2 & +13x_3 & +8x_4 & 4x_5 & +14x_6 & \geq & 55 \\
 & 2x_1 & +12x_2 & +54x_3 & +285x_4 & +22x_5 & +80x_6 & \geq & 800 \\
 & x_1 & & & & & & \leq & 4 \\
 & & x_2 & & & & & \leq & 3 \\
 & & & x_3 & & & & \leq & 2 \\
 & & & & x_4 & & & \leq & 8 \\
 & & & & & x_5 & & \leq & 2 \\
 & & & & & & x_6 & \leq & 2 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

Un problema para nutricionistas

producto	tamaño	energía	proteína	calcio	precio
pan	28 g	110	4	2	10
pollo	100 g	205	32	12	85
huevo	2 u	160	13	54	30
leche	237 cm^3	160	8	285	20
tarta fresa	170 g	420	4	22	75
papas con carne	260 g	260	14	80	72

$$
\begin{array}{lllllllll}
\min & 10x_1 & +85x_2 & +30x_3 & +20x_4 & +75x_5 & +72x_6 & & \\
 & 110x_1 & +205x_2 & +160x_3 & +160x_4 & +420x_5 & +260x_6 & \geq & 2000 \\
 & 4x_1 & +32x_2 & +13x_3 & +8x_4 & 4x_5 & +14x_6 & \geq & 55 \\
 & 2x_1 & +12x_2 & +54x_3 & +285x_4 & +22x_5 & +80x_6 & \geq & 800 \\
 & x_1 & & & & & & \leq & 4 \\
 & & x_2 & & & & & \leq & 3 \\
 & & & x_3 & & & & \leq & 2 \\
 & & & & x_4 & & & \leq & 8 \\
 & & & & & x_5 & & \leq & 2 \\
 & & & & & & x_6 & \leq & 2 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

Un problema para transportistas

Ejemplo2

Una empresa tiene 30 almacenes repartidos por España y 150 tiendas a las que atender. Al comenzar la temporada, debe llevar suministros (digamos de diez tipos distintos) desde los almacenes a las tiendas. Cada tienda le dice cuánto suministro necesita de cada tipo.
¿Cuál es la mejor manera de hacerlo?

Se trata de transportar todo el material con el menor costo posible; a cada tienda querríamos llevar material desde el almacén más cercano, pero puede ser que ese almacén no tenga stock o capacidad de transporte suficiente para atender a todas las tiendas que le tocan.

Un problema para transportistas

Ejemplo2

Una empresa tiene 30 almacenes repartidos por España y 150 tiendas a las que atender. Al comenzar la temporada, debe llevar suministros (digamos de diez tipos distintos) desde los almacenes a las tiendas. Cada tienda le dice cuánto suministro necesita de cada tipo.
¿Cuál es la mejor manera de hacerlo?

Se trata de transportar todo el material con el menor costo posible; a cada tienda querríamos llevar material desde el almacén más cercano, pero puede ser que ese almacén no tenga stock o capacidad de transporte suficiente para atender a todas las tiendas que le tocan.

Un problema para transportistas

Modelo matemático: Usamos una variable x_i para cada terna (almacén, tienda, tipo de suministro). Tenemos como función objetivo el precio total de llevar esos suminsitros a esas tiendas. La función objetivo es, de nuevo, lineal.

Nuestro "espacio factible" es el subconjunto de $\mathbb{R}^{150\times 30\times 10}$ en el que se satisfacen todas las restricciones siendo cada una de ellas descrita mediante una desigualdad lineal: "El suministro de tipo i que puede salir del almacén j es como mucho tanto".

Un problema para transportistas

Modelo matemático: Usamos una variable x_i para cada terna (almacén, tienda, tipo de suministro). Tenemos como función objetivo el precio total de llevar esos suminsitros a esas tiendas. La función objetivo es, de nuevo, lineal.

Nuestro “espacio factible” es el subconjunto de $\mathbb{R}^{150\times 30\times 10}$ en el que se satisfacen todas las restricciones siendo cada una de ellas descrita mediante una desigualdad lineal: “El suministro de tipo i que puede salir del almacén j es como mucho tanto”.

Un problema para transportistas

Modelo matemático: Usamos una variable x_i para cada terna (almacén, tienda, tipo de suministro). Tenemos como función objetivo el precio total de llevar esos suminsitros a esas tiendas. La función objetivo es, de nuevo, lineal.

Nuestro “espacio factible” es el subconjunto de $\mathbb{R}^{150\times30\times10}$ en el que se satisfacen todas las restricciones siendo cada una de ellas descrita mediante una desigualdad lineal: “El suministro de tipo i que puede salir del almacén j es como mucho tanto”.

Modelo común: programación lineal

Un programa lineal es el problema de minimizar una función lineal en un dominio definido por restricciones también lineales. Esto es:

- Dada

  una matriz M de tamaño $n \times d$,
  un vector $b \in \mathbb{R}^n$
  un vector $z \in \mathbb{R}^d$ (coste, función objetivo)

- Encontrar el $x \in \mathbb{R}^d$ que minimiza $\langle z, x \rangle$
- Entre los que cumplen $Mx \leq b$.

Modelo común: programación lineal

Un programa lineal es el problema de minimizar una función lineal en un dominio definido por restricciones también lineales. Esto es:

- Dada
  - una matriz M de tamaño $n \times d$,
  - un vector $b \in \mathbb{R}^n$
  - un vector $z \in \mathbb{R}^d$ (coste, función objetivo)
- Encontrar el $x \in \mathbb{R}^d$ que minimiza $\langle z, x \rangle$
- Entre los que cumplen $Mx \leq b$.

Modelo común: programación lineal

Un programa lineal es el problema de minimizar una función lineal en un dominio definido por restricciones también lineales. Esto es:

- Dada
  una matriz M de tamaño $n \times d$,
  un vector $b \in \mathbb{R}^n$
  un vector $z \in \mathbb{R}^d$ (coste, función objetivo)
- Encontrar el $x \in \mathbb{R}^d$ que minimiza $\langle z, x \rangle$
- Entre los que cumplen $Mx \leq b$.

Modelo común: programación lineal

Un programa lineal es el problema de minimizar una función lineal en un dominio definido por restricciones también lineales. Esto es:

- Dada

  una matriz M de tamaño $n \times d$,
  un vector $b \in \mathbb{R}^n$
  un vector $z \in \mathbb{R}^d$ (coste, función objetivo)

- Encontrar el $x \in \mathbb{R}^d$ que minimiza $\langle z, x \rangle$
- Entre los que cumplen $Mx \leq b$.

Modelo común: programación lineal

Índice General

IX

Modelo común: programación lineal

La programación lineal "se usa para asignar recursos, planificar producción, organizar turnos de trabajo, diseñar carteras de inversión y formular estrategias de mercado, o militares. La versatilidad e ***impacto económico*** *de la programación lineal en el mundo industrial de hoy es verdaderamente* ***admirable****."*

(Eugene Lawler, 1979)

Modelo común: programación lineal

La programación lineal "se usa para asignar recursos, planificar producción, organizar turnos de trabajo, diseñar carteras de inversión y formular estrategias de mercado, o militares. La versatilidad e **impacto económico** *de la programación lineal en el mundo industrial de hoy es verdaderamente* **admirable***."*

(Eugene Lawler, 1979)

Modelo común: programación lineal

"Conocí la programación lineal en 1958. Recién contratado como profesor en el centro de computación de Caltech, el director y yo hicimos un viaje por el país para averiguar cuáles eran los usos industriales más importantes de los ordenadores. En Nueva York, Mobil Oil acababa de instalar un nuevo sistema de computación multi-millonario. Nos contaron que Mobil había amortizado esta inversión en sólo dos semanas haciendo programación lineal [. . .] que les permitía tomar decisiones óptimas de producción que antes tomaban los vicepresidentes."

(Joel Franklin, 1981)

Modelo común: programación lineal

> *"Conocí la programación lineal en 1958. Recién contratado como profesor en el centro de computación de Caltech, el director y yo hicimos un viaje por el país para averiguar cuáles eran los usos industriales más importantes de los ordenadores. En Nueva York, Mobil Oil acababa de instalar un nuevo sistema de computación multi-millonario. Nos contaron que Mobil había amortizado esta inversión en sólo dos semanas haciendo programación lineal [...] que les permitía tomar decisiones óptimas de producción que antes tomaban los vicepresidentes."*
>
> (Joel Franklin, 1981)

Modelo común: programación lineal

“Conocí la programación lineal en 1958. Recién contratado como profesor en el centro de computación de Caltech, el director y yo hicimos un viaje por el país para averiguar cuáles eran los usos industriales más importantes de los ordenadores. En Nueva York, Mobil Oil acababa de instalar un nuevo sistema de computación multi-millonario. Nos contaron que Mobil había amortizado esta inversión en sólo dos semanas haciendo programación lineal [. . .] que les permitía tomar decisiones óptimas de producción que antes tomaban los vicepresidentes.”

(Joel Franklin, 1981)

Modelo común: programación lineal

"Si hiciéramos estadísticas sobre qué problema matemático está usando más tiempo de computación en este momento en el mundo (excluyendo problemas de manejo de bases de datos, como búsqueda u ordenación) la respuesta sería probablemente la linear programming."

(László Lovász, 1980)

Conexión con la conjetura de Hirsch

- El conjunto factible (soluciones posibles) del programa lineal en d variables y con n restricciones es un poliedro P de dimensión $\leq d$ y con $\leq n$ facetas.
- La solución óptima se alcanza siempre en un vértice.
- El método del símplice [Dantzig, 1947] resuelve un programa lineal buscando primero una solución factible arbitraria y luego moviéndose por el grafo del poliedro P de vértice a vértice, de manera monótona, hasta llegar al óptimo.
- En particular, la Conjetura de Hirsch está relacionada con cómo de bueno es, en teoría, el algoritmo del símplice.

Conexión con la conjetura de Hirsch

- El conjunto factible (soluciones posibles) del programa lineal en d variables y con n restricciones es un poliedro P de dimensión $\leq d$ y con $\leq n$ facetas.
- La solución óptima se alcanza siempre en un vértice.
- El método del símplice [Dantzig, 1947] resuelve un programa lineal buscando primero una solución factible arbitraria y luego moviéndose por el grafo del poliedro P de vértice a vértice, de manera monótona, hasta llegar al óptimo.
- En particular, la Conjetura de Hirsch está relacionada con cómo de bueno es, en teoría, el algoritmo del símplice.

Conexión con la conjetura de Hirsch

- El conjunto factible (soluciones posibles) del programa lineal en d variables y con n restricciones es un poliedro P de dimensión $\leq d$ y con $\leq n$ facetas.
- La solución óptima se alcanza siempre en un vértice.
- El método del símplice [Dantzig, 1947] resuelve un programa lineal buscando primero una solución factible arbitraria y luego moviéndose por el grafo del poliedro P de vértice a vértice, de manera monótona, hasta llegar al óptimo.
- En particular, la Conjetura de Hirsch está relacionada con cómo de bueno es, en teoría, el algoritmo del símplice.

Conexión con la conjetura de Hirsch

- El conjunto factible (soluciones posibles) del programa lineal en d variables y con n restricciones es un poliedro P de dimensión $\leq d$ y con $\leq n$ facetas.
- La solución óptima se alcanza siempre en un vértice.
- El método del símplice [Dantzig, 1947] resuelve un programa lineal buscando primero una solución factible arbitraria y luego moviéndose por el grafo del poliedro P de vértice a vértice, de manera monótona, hasta llegar al óptimo.
- En particular, la Conjetura de Hirsch está relacionada con cómo de bueno es, en teoría, el algoritmo del símplice.

Conexión con la conjetura de Hirsch

- El conjunto factible (soluciones posibles) del programa lineal en d variables y con n restricciones es un poliedro P de dimensión $\leq d$ y con $\leq n$ facetas.
- La solución óptima se alcanza siempre en un vértice.
- El método del símplice [Dantzig, 1947] resuelve un programa lineal buscando primero una solución factible arbitraria y luego moviéndose por el grafo del poliedro P de vértice a vértice, de manera monótona, hasta llegar al óptimo.
- En particular, la Conjetura de Hirsch está relacionada con cómo de bueno es, en teoría, el algoritmo del símplice.

Complejidad de algoritmos

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

El diámetro (combinatorio) de un politopo con n facetas y dimensión d no puede ser mayor que $n - d$.

¿A quién le importa?

3) A los informáticos teóricos

Complejidad de algoritmos

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

El diámetro (combinatorio) de un politopo con n facetas y dimensión d no puede ser mayor que $n - d$.

¿A quién le importa?

3) A los informáticos teóricos

Complejidad de algoritmos

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

El diámetro (combinatorio) de un politopo con n facetas y dimensión d no puede ser mayor que $n - d$.

¿A quién le importa?

3) A los informáticos teóricos

Complejidad de algoritmos

En informática teórica, un problema es la asignación de un cierto OUTPUT a cada INPUT de un cierto conjunto. (Podemos suponer que tanto INPUT como OUTPUT son secuencias finitas de números enteros).

Un algoritmo para un problema dado es una manera de resolverlo. O sea, un conjunto de instrucciones lógicas que garantizan que, para cada INPUT, obtendremos el OUTPUT correcto en un número finito de "pasos".

La complejidad (del caso peor) de un cierto algoritmo es la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(n) = \max \left\{ \begin{array}{c} \text{n. de pasos que el algoritmo necesita para} \\ \text{llegar al OUTPUT de un INPUT de tamaño } n \end{array} \right\}$$

Complejidad de algoritmos

En informática teórica, un problema es la asignación de un cierto OUTPUT a cada INPUT de un cierto conjunto. (Podemos suponer que tanto INPUT como OUTPUT son secuencias finitas de números enteros).

Un algoritmo para un problema dado es una manera de resolverlo. O sea, un conjunto de instrucciones lógicas que garantizan que, para cada INPUT, obtendremos el OUTPUT correcto en un número finito de "pasos".

La complejidad (del caso peor) de un cierto algoritmo es la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(n) = \max \left\{ \begin{array}{c} \text{n. de pasos que el algoritmo necesita para} \\ \text{llegar al OUTPUT de un INPUT de tamaño } n \end{array} \right\}$$

Complejidad de algoritmos

En informática teórica, un problema es la asignación de un cierto OUTPUT a cada INPUT de un cierto conjunto. (Podemos suponer que tanto INPUT como OUTPUT son secuencias finitas de números enteros).

Un algoritmo para un problema dado es una manera de resolverlo. O sea, un conjunto de instrucciones lógicas que garantizan que, para cada INPUT, obtendremos el OUTPUT correcto en un número finito de "pasos".

La complejidad (del caso peor) de un cierto algoritmo es la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(n) = \max \left\{ \begin{array}{c} \text{n. de pasos que el algoritmo necesita para} \\ \text{llegar al OUTPUT de un INPUT de tamaño } n \end{array} \right\}$$

Ejemplo: cálculo de determinantes

Tres algoritmos: por "la fórmula"; por filas; por Gauss;

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 12 - 18 - 16 - 1 = -13$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) = -13$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 11 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & \frac{13}{6} \end{vmatrix} = -13$$

Ejemplo: cálculo de determinantes

Tres algoritmos: por “la fórmula”; por filas; por Gauss;

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 12 - 18 - 16 - 1 = -13$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) = -13$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 11 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & \frac{13}{6} \end{vmatrix} = -13$$

Ejemplo: cálculo de determinantes

Tres algoritmos: por “la fórmula”; por filas; por Gauss;

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 12 - 18 - 16 - 1 = -13$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) = -13$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 11 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & \frac{13}{6} \end{vmatrix} = -13$$

Ejemplo: cálculo de determinantes

Tres algoritmos: por "la fórmula"; por filas; por Gauss;

- El algoritmo de Gauss es *polinómico*: en $O(n)$ pasos introducimos cada "cero" y el algoritmo consiste en introducir $O(n^2)$ ceros $\Rightarrow$ complejidad $O(n^3)$.
- El algoritmo de la fórmula es *exponencial*: la fórmula tiene $n!$ términos, y $n! \sim 2^{O(n \log n)}$.
- El desarrollo por filas también es exponencial. Es un algoritmo recursivo que conduce a $f(n) \sim n \cdot f(n-1)$, lo cual implica $f(n) \sim n!$

Nota: En este análisis n no es el tamaño del input, sino más bien la raíz cuadrada del mismo, puesto que el input es una matriz $n \times n$

Ejemplo: cálculo de determinantes

Tres algoritmos: por "la fórmula"; por filas; por Gauss;

- El algoritmo de Gauss es *polinómico*: en $O(n)$ pasos introducimos cada "cero" y el algoritmo consiste en introducir $O(n^2)$ ceros $\Rightarrow$ complejidad $O(n^3)$.
- El algoritmo de la fórmula es *exponencial*: la fórmula tiene $n!$ términos, y $n! \sim 2^{O(n \log n)}$.
- El desarrollo por filas también es exponencial. Es un algoritmo recursivo que conduce a $f(n) \sim n \cdot f(n-1)$, lo cual implica $f(n) \sim n!$

Nota: En este análisis n no es el tamaño del input, sino más bien la raíz cuadrada del mismo, puesto que el input es una matriz $n \times n$

Ejemplo: cálculo de determinantes

Tres algoritmos: por "la fórmula"; por filas; por Gauss;

- El algoritmo de Gauss es *polinómico*: en $O(n)$ pasos introducimos cada "cero" y el algoritmo consiste en introducir $O(n^2)$ ceros $\Rightarrow$ complejidad $O(n^3)$.
- El algoritmo de la fórmula es *exponencial*: la fórmula tiene $n!$ términos, y $n! \sim 2^{O(n \log n)}$.
- El desarrollo por filas también es exponencial. Es un algoritmo recursivo que conduce a $f(n) \sim n \cdot f(n-1)$, lo cual implica $f(n) \sim n!$

Nota: En este análisis n no es el tamaño del input, sino más bien la raíz cuadrada del mismo, puesto que el input es una matriz $n \times n$

Ejemplo: cálculo de determinantes

Tres algoritmos: por “la fórmula”; por filas; por Gauss;

- El algoritmo de Gauss es *polinómico*: en $O(n)$ pasos introducimos cada “cero” y el algoritmo consiste en introducir $O(n^2)$ ceros $\Rightarrow$ complejidad $O(n^3)$.
- El algoritmo de la fórmula es *exponencial*: la fórmula tiene $n!$ términos, y $n! \sim 2^{O(n \log n)}$.
- El desarrollo por filas también es exponencial. Es un algoritmo recursivo que conduce a $f(n) \sim n \cdot f(n-1)$, lo cual implica $f(n) \sim n!$

Nota: En este análisis n no es el tamaño del input, sino más bien la raíz cuadrada del mismo, puesto que el input es una matriz $n \times n$

Ejemplo: cálculo de determinantes

Tres algoritmos: por "la fórmula"; por filas; por Gauss;

- El algoritmo de Gauss es *polinómico*: en $O(n)$ pasos introducimos cada "cero" y el algoritmo consiste en introducir $O(n^2)$ ceros $\Rightarrow$ complejidad $O(n^3)$.
- El algoritmo de la fórmula es *exponencial*: la fórmula tiene $n!$ términos, y $n! \sim 2^{O(n \log n)}$.
- El desarrollo por filas también es exponencial. Es un algoritmo recursivo que conduce a $f(n) \sim n \cdot f(n-1)$, lo cual implica $f(n) \sim n!$

Nota: En este análisis n no es el tamaño del input, sino más bien la raíz cuadrada del mismo, puesto que el input es una matriz $n \times n$

Complejidad del algoritmo del símplice

- En el algoritmo del símplice, recorrer cada arista para ir de una solución a la siguiente se puede hacer en tiempo polinómico. (Cálculo de ciertos determinantes y productos escalares)
- El número de aristas a recorrer depende no sólo del poliedro P, sino también de la “regla de pivote” (del criterio local para elegir el vértice vecino).
- No se conoce ninguna “regla de pivote” local que garantize que podamos llegar al vértice óptimo recorriendo sólo un número polinómico de aristas. Es decir, no se sabe si el algoritmo del símplice tiene complejidad polinómica o exponencial. (Más exactamente: para la mayoría de las reglas de pivote que se han propuesto, ha sido siempre posible construir politopos “patológicos” en los que dicha regla conduce a un camino de longitud exponencial).

Complejidad del algoritmo del símplice

- En el algoritmo del símplice, recorrer cada arista para ir de una solución a la siguiente se puede hacer en tiempo polinómico. (Cálculo de ciertos determinantes y productos escalares)
- El número de aristas a recorrer depende no sólo del poliedro P, sino también de la “regla de pivote” (del criterio local para elegir el vértice vecino).
- No se conoce ninguna “regla de pivote” local que garantize que podamos llegar al vértice óptimo recorriendo sólo un número polinómico de aristas. Es decir, no se sabe si el algoritmo del símplice tiene complejidad polinómica o exponencial. (Más exactamente: para la mayoría de las reglas de pivote que se han propuesto, ha sido siempre posible construir politopos “patológicos” en los que dicha regla conduce a un camino de longitud exponencial).

Complejidad del algoritmo del símplice

- En el algoritmo del símplice, recorrer cada arista para ir de una solución a la siguiente se puede hacer en tiempo polinómico. (Cálculo de ciertos determinantes y productos escalares)
- El número de aristas a recorrer depende no sólo del poliedro P, sino también de la “regla de pivote” (del criterio local para elegir el vértice vecino).
- No se conoce ninguna “regla de pivote” local que garantize que podamos llegar al vértice óptimo recorriendo sólo un número polinómico de aristas. Es decir, no se sabe si el algoritmo del símplice tiene complejidad polinómica o exponencial. (Más exactamente: para la mayoría de las reglas de pivote que se han propuesto, ha sido siempre posible construir politopos “patológicos” en los que dicha regla conduce a un camino de longitud exponencial).

Complejidad del algoritmo del símplice

- En el algoritmo del símplice, recorrer cada arista para ir de una solución a la siguiente se puede hacer en tiempo polinómico. (Cálculo de ciertos determinantes y productos escalares)
- El número de aristas a recorrer depende no sólo del poliedro P, sino también de la “regla de pivote” (del criterio local para elegir el vértice vecino).
- No se conoce ninguna “regla de pivote” local que garantize que podamos llegar al vértice óptimo recorriendo sólo un número polinómico de aristas. Es decir, no se sabe si el algoritmo del símplice tiene complejidad polinómica o exponencial. (Más exactamente: para la mayoría de las reglas de pivote que se han propuesto, ha sido siempre posible construir politopos “patológicos” en los que dicha regla conduce a un camino de longitud exponencial).

Complejidad del algoritmo del símplice

- En el algoritmo del símplice, recorrer cada arista para ir de una solución a la siguiente se puede hacer en tiempo polinómico. (Cálculo de ciertos determinantes y productos escalares)
- El número de aristas a recorrer depende no sólo del poliedro P, sino también de la “regla de pivote” (del criterio local para elegir el vértice vecino).
- No se conoce ninguna “regla de pivote” local que garantize que podamos llegar al vértice óptimo recorriendo sólo un número polinómico de aristas. Es decir, no se sabe si el algoritmo del símplice tiene complejidad polinómica o exponencial. (Más exactamente: para la mayoría de las reglas de pivote que se han propuesto, ha sido siempre posible construir politopos “patológicos” en los que dicha regla conduce a un camino de longitud exponencial).

El cubo de Klee y Minty

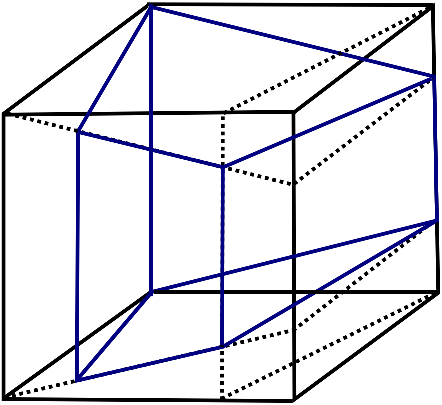
- Es un cubo de caras no paralelas en el que hay un camino monótono de longitud exponencial desde el mínimo al máximo. Se puede adaptar de modo que produce caminos exponenciales para diversas “reglas de pivote”:

El cubo de Klee y Minty

- Es un cubo de caras no paralelas en el que hay un camino monótono de longitud exponencial desde el mínimo al máximo. Se puede adaptar de modo que produce caminos exponenciales para diversas “reglas de pivote”:

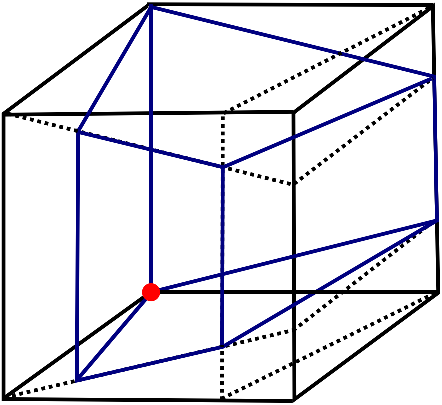
El cubo de Klee y Minty

- Es un cubo de caras no paralelas en el que hay un camino monótono de longitud exponencial desde el mínimo al máximo. Se puede adaptar de modo que produce caminos exponenciales para diversas “reglas de pivote”:



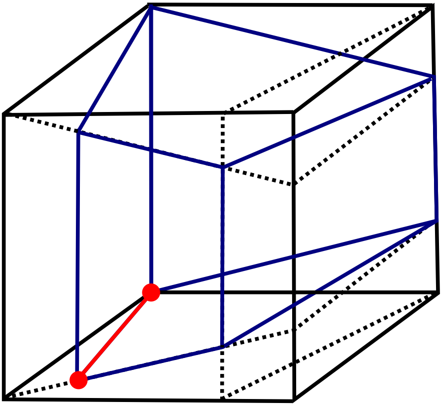
El cubo de Klee y Minty

- Es un cubo de caras no paralelas en el que hay un camino monótono de longitud exponencial desde el mínimo al máximo. Se puede adaptar de modo que produce caminos exponenciales para diversas “reglas de pivote”:



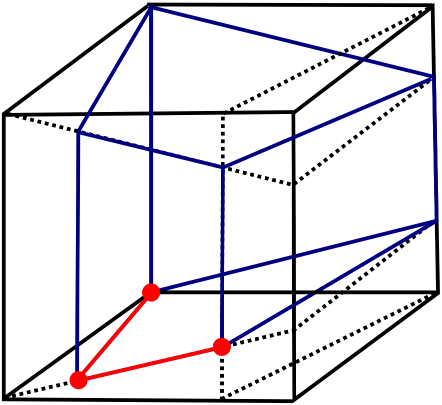
El cubo de Klee y Minty

- Es un cubo de caras no paralelas en el que hay un camino monótono de longitud exponencial desde el mínimo al máximo. Se puede adaptar de modo que produce caminos exponenciales para diversas “reglas de pivote”:



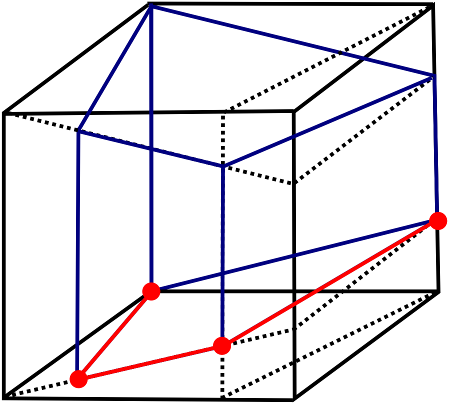
El cubo de Klee y Minty

- Es un cubo de caras no paralelas en el que hay un camino monótono de longitud exponencial desde el mínimo al máximo. Se puede adaptar de modo que produce caminos exponenciales para diversas "reglas de pivote":



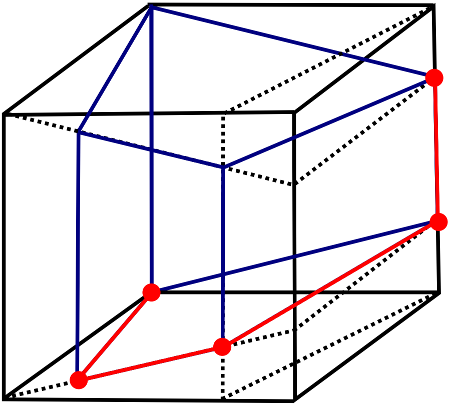
El cubo de Klee y Minty

- Es un cubo de caras no paralelas en el que hay un camino monótono de longitud exponencial desde el mínimo al máximo. Se puede adaptar de modo que produce caminos exponenciales para diversas "reglas de pivote":



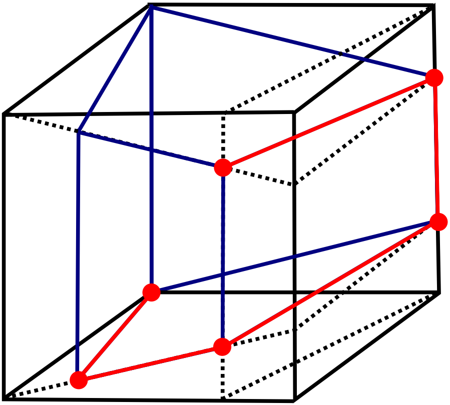
El cubo de Klee y Minty

- Es un cubo de caras no paralelas en el que hay un camino monótono de longitud exponencial desde el mínimo al máximo. Se puede adaptar de modo que produce caminos exponenciales para diversas “reglas de pivote”:



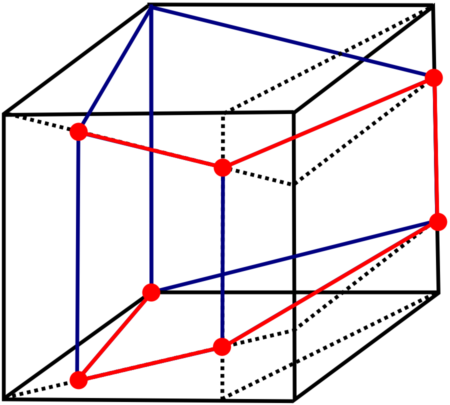
El cubo de Klee y Minty

- Es un cubo de caras no paralelas en el que hay un camino monótono de longitud exponencial desde el mínimo al máximo. Se puede adaptar de modo que produce caminos exponenciales para diversas “reglas de pivote”:



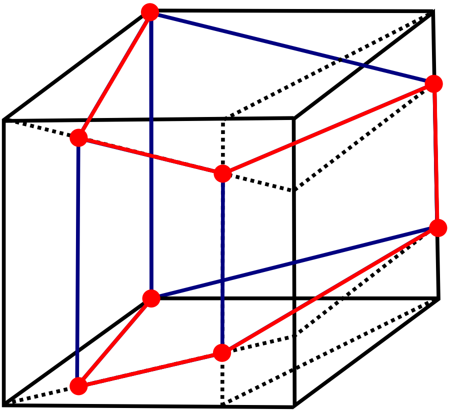
El cubo de Klee y Minty

- Es un cubo de caras no paralelas en el que hay un camino monótono de longitud exponencial desde el mínimo al máximo. Se puede adaptar de modo que produce caminos exponenciales para diversas “reglas de pivote”:



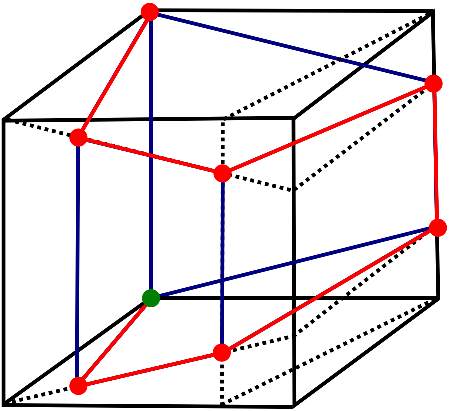
El cubo de Klee y Minty

- Es un cubo de caras no paralelas en el que hay un camino monótono de longitud exponencial desde el mínimo al máximo. Se puede adaptar de modo que produce caminos exponenciales para diversas "reglas de pivote":



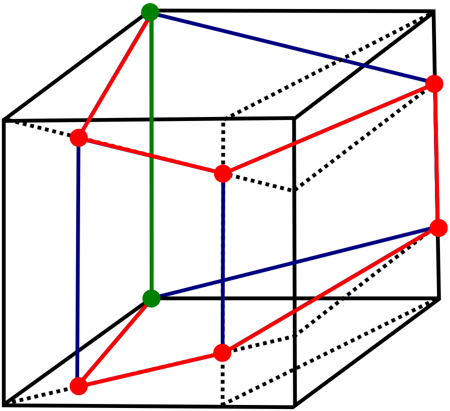
El cubo de Klee y Minty

- Es un cubo de caras no paralelas en el que hay un camino monótono de longitud exponencial desde el mínimo al máximo. Se puede adaptar de modo que produce caminos exponenciales para diversas “reglas de pivote”:



El cubo de Klee y Minty

- Es un cubo de caras no paralelas en el que hay un camino monótono de longitud exponencial desde el mínimo al máximo. Se puede adaptar de modo que produce caminos exponenciales para diversas "reglas de pivote":



Relación con la conjetura de Hirsch:

- Si se demuestra que el diámetro de todo politopo es polinómico, cabe la posibilidad de que existan reglas de pivote polinómicas.
- Si, en cambio, hay politopos de diámetro exponencial, la complejidad del aldoritmo del símplice será intrínsecamente exponencial.

Relación con la conjetura de Hirsch:

- Si se demuestra que el diámetro de todo politopo es polinómico, cabe la posibilidad de que existan reglas de pivote polinómicas.
- Si, en cambio, hay politopos de diámetro exponencial, la complejidad del aldoritmo del símplice será intrínsecamente exponencial.

Complejidad de la programación lineal

El caso es que existen algoritmos más recientes para resolver la programación lineal que sí se sabe que son polinómicos (elipsoide [1979], puntos interiores [1984]). Pero el algoritmo del símplice sigue siendo uno de los más usados:

Complejidad de la programación lineal

El caso es que existen algoritmos más recientes para resolver la programación lineal que sí se sabe que son polinómicos (elipsoide [1979], puntos interiores [1984]). Pero el algoritmo del símplice sigue siendo uno de los más usados:

Complejidad de la programación lineal

El caso es que existen algoritmos más recientes para resolver la programación lineal que sí se sabe que son polinómicos (elipsoide [1979], puntos interiores [1984]). Pero el algoritmo del símplice sigue siendo uno de los más usados:

> *"El número de pasos para resolver un problema con m desigualdades en n variables es casi siempre un múltiplo pequeño de m, digamos* $3m$*".*
>
> *"El método del símplice sigue siendo, si no "el" método a elegir, sí "uno de los" métodos a elegir, generalmente tan bueno, y en ciertas clases de problemas mejor, que otras aproximaciones más modernas".*
>
> (M. Todd, 2010)

Complejidad de la programación lineal

El caso es que existen algoritmos más recientes para resolver la programación lineal que sí se sabe que son polinómicos (elipsoide [1979], puntos interiores [1984]). Pero el algoritmo del símplice sigue siendo uno de los más usados:

“El número de pasos para resolver un problema con m desigualdades en n variables es casi siempre un múltiplo pequeño de m, digamos $3m$*”.*

“El método del símplice sigue siendo, si no “el” método a elegir, sí “uno de los” métodos a elegir, generalmente tan bueno, y en ciertas clases de problemas mejor, que otras aproximaciones más modernas”.

(M. Todd, 2010)

Complejidad de la programación lineal

El caso es que existen algoritmos más recientes para resolver la programación lineal que sí se sabe que son polinómicos (elipsoide [1979], puntos interiores [1984]). Pero el algoritmo del símplice sigue siendo uno de los más usados:

En el año 2000, la revista *Computing in Science and Engineering* elaboró una lista de los "10 algoritmos con mayor influencia en el desarrollo y la práctica de la ciencia y la ingeniería en el siglo XX". El algoritmo del símplice fue uno de los elegidos.

Complejidad de la programación lineal

Incluso desde el punto de vista teórico, la complejidad de la programación lineal no está del todo cerrada. Los algoritmos de puntos interiores y del elipsoide son polinómicos en el "modelo bit", pero no son "fuertemente polinómicos". (Es decir, son polinómicos cuando en el tamaño del input se considera la longitud bit de cada coeficiente, pero no son polinómicos en el sentido de realizar un número polinómico de operaciones aritméticas con los números del INPUT. Dicho de otro modo, no son polinómicos en el modelo de "máquina real" [Blum et al. 1989])

Complejidad de la programación lineal

Incluso desde el punto de vista teórico, la complejidad de la programación lineal no está del todo cerrada. Los algoritmos de puntos interiores y del elipsoide son polinómicos en el "modelo bit", pero no son "fuertemente polinómicos". (Es decir, son polinómicos cuando en el tamaño del input se considera la longitud bit de cada coeficiente, pero no son polinómicos en el sentido de realizar un número polinómico de operaciones aritméticas con los números del INPUT. Dicho de otro modo, no son polinómicos en el modelo de "máquina real" [Blum et al. 1989])

Complejidad de la programación lineal

Incluso desde el punto de vista teórico, la complejidad de la programación lineal no está del todo cerrada. Los algoritmos de puntos interiores y del elipsoide son polinómicos en el "modelo bit", pero no son "fuertemente polinómicos". (Es decir, son polinómicos cuando en el tamaño del input se considera la longitud bit de cada coeficiente, pero no son polinómicos en el sentido de realizar un número polinómico de operaciones aritméticas con los números del INPUT. Dicho de otro modo, no son polinómicos en el modelo de "máquina real" [Blum et al. 1989])

Complejidad de la programación lineal

Incluso desde el punto de vista teórico, la complejidad de la programación lineal no está del todo cerrada. Los algoritmos de puntos interiores y del elipsoide son polinómicos en el "modelo bit", pero no son "fuertemente polinómicos". (Es decir, son polinómicos cuando en el tamaño del input se considera la longitud bit de cada coeficiente, pero no son polinómicos en el sentido de realizar un número polinómico de operaciones aritméticas con los números del INPUT. Dicho de otro modo, no son polinómicos en el modelo de "máquina real" [Blum et al. 1989])

Complejidad de la programación lineal

- En su lista de "problemas matemáticos para el siglo XXI" del año 2000, S. Smale incluyó entre ellos el de encontrar algoritmos fuertemente polinómicos para la programación lineal. Una regla de pivot polinómica para el algoritmo del símplice resolvería este problema.
- D. Spielmann acaba de recibir (Agosto 2010) el Premio Nevanlinna de la Unión Matemática Internacional por sus trabajos de "smoothed analysis", en los que demuestra que si se nos permite "perturbar" ligeramente nuestro programa lineal aleatoriamente, casi siempre se convertirá en uno en que el método del símplice es polinómico.

Complejidad de la programación lineal

- En su lista de “problemas matemáticos para el siglo XXI" del año 2000, S. Smale incluyó entre ellos el de encontrar algoritmos fuertemente polinómicos para la programación lineal. Una regla de pivot polinómica para el algoritmo del símplice resolvería este problema.
- D. Spielmann acaba de recibir (Agosto 2010) el Premio Nevanlinna de la Unión Matemática Internacional por sus trabajos de “smoothed analysis”, en los que demuestra que si se nos permite “perturbar” ligeramente nuestro programa lineal aleatoriamente, casi siempre se convertirá en uno en que el método del símplice es polinómico.

Complejidad de la programación lineal

- En su lista de "problemas matemáticos para el siglo XXI" del año 2000, S. Smale incluyó entre ellos el de encontrar algoritmos fuertemente polinómicos para la programación lineal. Una regla de pivot polinómica para el algoritmo del símplice resolvería este problema.
- D. Spielmann acaba de recibir (Agosto 2010) el Premio Nevanlinna de la Unión Matemática Internacional por sus trabajos de "smoothed analysis", en los que demuestra que si se nos permite "perturbar" ligeramente nuestro programa lineal aleatoriamente, casi siempre se convertirá en uno en que el método del símplice es polinómico.

Polynomial Hirsch conjecture

Quizá más interesante que la conjetura de Hirsch en sí es la siguiente versión polinómica:

Conjetura de Hirsch polinómica

Existe una función polinómica $f(n, d)$ tal que el diámetro de todo poliedro de dimensión d con n facetas es a lo sumo $f(n, d)$.

Polynomial Hirsch conjecture

Quizá más interesante que la conjetura de Hirsch en sí es la siguiente versión polinómica:

Conjetura de Hirsch polinómica

Existe una función polinómica $f(n, d)$ tal que el diámetro de todo poliedro de dimensión d con n facetas es a lo sumo $f(n, d)$.

Dos resultados clásicos (1980) de Kalai-Kleitman y de Barnette-Larman dan las siguientes cotas para $f(n, d)$:

1. $f(n, d) \in O(n^{\log d})$ (cota, “casi-polinómica”).
2. $f(n, d) = n2^{d-3}$ (cota “lineal en dimensión fija”).

Polynomial Hirsch conjecture

Quizá más interesante que la conjetura de Hirsch en sí es la siguiente versión polinómica:

Conjetura de Hirsch polinómica

Existe una función polinómica $f(n, d)$ tal que el diámetro de todo poliedro de dimensión d con n facetas es a lo sumo $f(n, d)$.

El interés en este problema es tal que Gil Kalai acaba de lanzar en su blog un proyecto “PolyMath” para intentar responder a esa pregunta de forma colectiva. En el proyecto colaboran (entre otros) Terence Tao (medalla fields 2006) y Tim Gowers (medalla fields 1998). Ver:

`http://gilkalai.wordpress.com/2010/09/29/polymath-3-polynomial-hirsch-conjecture/`

`http://polymathprojects.org/`

El contraejemplo

La construcción del contraejemplo tiene dos partes:

1. Un "Teorema de los *d* pasos para prismatoides"
2. La construcción de un prismatoide de dimensión 5 con "anchura" 6.

El contraejemplo

La construcción del contraejemplo tiene dos partes:

1. Un "Teorema de los d pasos para prismatoides"
2. La construcción de un prismatoide de dimensión 5 con "anchura" 6.

El contraejemplo

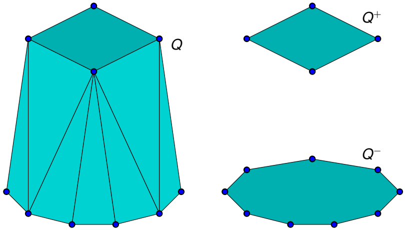
La construcción del contraejemplo tiene dos partes:

1. Un “Teorema de los *d* pasos para prismatoides”
2. La construcción de un prismatoide de dimensión 5 con “anchura” 6.

Prismatoides

Definición

Un *prismatoide* es un politopo Q con dos facetas Q^+ y Q^- que contienen a todos los vértices (las llamamos bases).



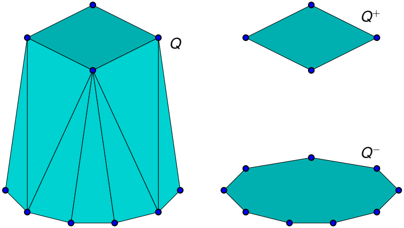
Definición

La *anchura* (combinatoria) de un primatoide is el número de pasos necesarios para ir de una base a la otra.

Prismatoides

Definición

Un *prismatoide* es un politopo Q con dos facetas Q^+ y Q^- que contienen a todos los vértices (las llamamos bases).



Definición

La *anchura* (combinatoria) de un primatoide is el número de pasos necesarios para ir de una base a la otra.

El Teorema de los d pasos para prismatoides

Teorema de los d pasos para prismatoides

Si un prismatoide Q de dimensión d tiene anchura mayor que d entonces a partir de él se puede construir un politopo (de dimensión $n - d$ y con $2n - 2d$ facetas) que viola la conjetura de Hirsch.

Este Teorema (y su demostración) son en cierto modo una extensión del "Teorema de los d pasos" demostrado por Klee y Walkup en 1967.

El Teorema de los *d* pasos para prismatoides

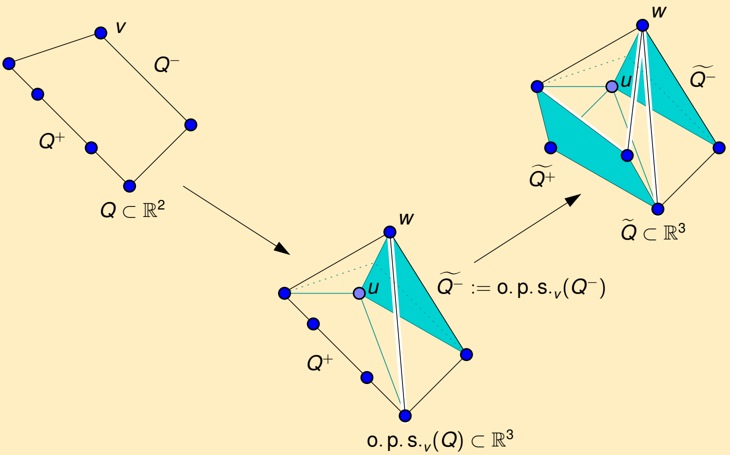
Teorema de los *d* pasos para prismatoides

Si un prismatoide Q de dimensión d tiene anchura mayor que d entonces a partir de él se puede construir un politopo (de dimensión $n - d$ y con $2n - 2d$ facetas) que viola la conjetura de Hirsch.

Este Teorema (y su demostración) son en cierto modo una extensión del "Teorema de los d pasos" demostrado por Klee y Walkup en 1967.

El Teorema de los d pasos para prismatoides

Proof.



$\square$

El prismatoide con 48 vértices

$$
Q := \operatorname{conv} \left\{
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1^+ \\ 2^+ \\ 3^+ \\ 4^+ \\ 5^+ \\ 6^+ \\ 7^+ \\ 8^+ \\ 9^+ \\ 10^+ \\ 11^+ \\ 12^+ \\ 13^+ \\ 14^+ \\ 15^+ \\ 16^+ \\ 17^+ \\ 18^+ \\ 19^+ \\ 20^+ \\ 21^+ \\ 22^+ \\ 23^+ \\ 24^+ \end{array} &
\begin{pmatrix}
18 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-18 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 18 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -18 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 45 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -45 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 45 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -45 & 1 \\
15 & 15 & 0 & 0 & 1 \\
-15 & 15 & 0 & 0 & 1 \\
15 & -15 & 0 & 0 & 1 \\
-15 & -15 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 30 & 30 & 1 \\
0 & 0 & -30 & 30 & 1 \\
0 & 0 & 30 & -30 & 1 \\
0 & 0 & -30 & -30 & 1 \\
0 & 10 & 40 & 0 & 1 \\
0 & -10 & 40 & 0 & 1 \\
0 & 10 & -40 & 0 & 1 \\
0 & -10 & -40 & 0 & 1 \\
10 & 0 & 0 & 40 & 1 \\
-10 & 0 & 0 & 40 & 1 \\
10 & 0 & 0 & -40 & 1 \\
-10 & 0 & 0 & -40 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\quad
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1^- \\ 2^- \\ 3^- \\ 4^- \\ 5^- \\ 6^- \\ 7^- \\ 8^- \\ 9^- \\ 10^- \\ 11^- \\ 12^- \\ 13^- \\ 14^- \\ 15^- \\ 16^- \\ 17^- \\ 18^- \\ 19^- \\ 20^- \\ 21^- \\ 22^- \\ 23^- \\ 24^- \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 18 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -18 & -1 \\
0 & 0 & 18 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -18 & 0 & -1 \\
45 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-45 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 45 & 0 & 0 & -1 \\
0 & -45 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 15 & 15 & -1 \\
0 & 0 & 15 & -15 & -1 \\
0 & 0 & -15 & 15 & -1 \\
0 & 0 & -15 & -15 & -1 \\
30 & 30 & 0 & 0 & -1 \\
-30 & 30 & 0 & 0 & -1 \\
30 & -30 & 0 & 0 & -1 \\
-30 & -30 & 0 & 0 & -1 \\
40 & 0 & 10 & 0 & -1 \\
40 & 0 & -10 & 0 & -1 \\
-40 & 0 & 10 & 0 & -1 \\
-40 & 0 & -10 & 0 & -1 \\
0 & 40 & 0 & 10 & -1 \\
0 & 40 & 0 & -10 & -1 \\
0 & -40 & 0 & 10 & -1 \\
0 & -40 & 0 & -10 & -1
\end{pmatrix}
\end{array}
\right\}
$$

El prismatoide con 28 vértices

Teorema

El siguiente prismatoide de dimensión 5 tiene anchura 6.

$$Q := \mathrm{conv}\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \multicolumn{5}{c}{\left(\begin{array}{ccccc} \pm 18 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \pm 30 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 30 & 1 \\ 0 & \pm 5 & 0 & \pm 25 & 1 \\ 0 & 0 & \pm 18 & \pm 18 & 1 \end{array}\right)} \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \multicolumn{5}{c}{\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \pm 18 & 0 & -1 \\ 0 & \pm 30 & 0 & 0 & -1 \\ \pm 30 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \pm 25 & 0 & 0 & \pm 5 & -1 \\ \pm 18 & \pm 18 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)} \end{array} \right\}$$

Corolario

Hay un politopo de dimensión 23 y con 46 facetas que viola la conjetura de Hirsch.

El prismatoide con 28 vértices

Teorema

El siguiente prismatoide de dimensión 5 tiene anchura 6.

$$Q := \mathrm{conv}\left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \pm 18 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \pm 30 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 30 & 1 \\ 0 & \pm 5 & 0 & \pm 25 & 1 \\ 0 & 0 & \pm 18 & \pm 18 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 18 & 0 & -1 \\ 0 & \pm 30 & 0 & 0 & -1 \\ \pm 30 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \pm 25 & 0 & 0 & \pm 5 & -1 \\ \pm 18 & \pm 18 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

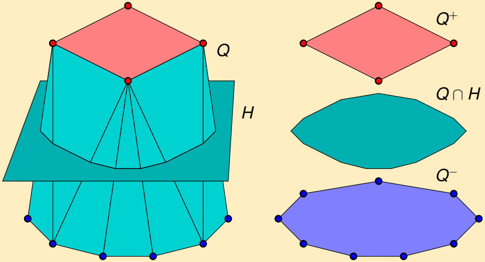
Corolario

Hay un politopo de dimensión 23 y con 46 facetas que viola la conjetura de Hirsch.

La construcción

Y ¿cómo construye uno un politopo de dimensión cinco?

La combinatoria de un prismatoide de dimensión d se puede estudiar en una "esfera de dimensión $d-2$. . . .



. . . así que la construcción es básicamente 3-dimensional.

Conclusión

- El contraejemplo a la conjetura de Hirsch rompe una “barrera psicológica”, ...
- ...pero sigue siendo asintóticamente lineal ($1.04(n-d)$). Desde el punto de vista de las aplicaciones esto es absolutamente irrelevante
- Como ya dijeron Klee y Kleinschmidt en 1987:

> *Finding a counterexample will be merely a small first step in the line of investigation related to the conjecture.*
>
> (V. Klee and P. Kleinschmidt, 1987)

Conclusión

- El contraejemplo a la conjetura de Hirsch rompe una "barrera psicológica", ...
- ...pero sigue siendo asintóticamente lineal ($1.04(n-d)$). Desde el punto de vista de las aplicaciones esto es absolutamente irrelevante
- Como ya dijeron Klee y Kleinschmidt en 1987:

> *Finding a counterexample will be merely a small first step in the line of investigation related to the conjecture.*
>
> (V. Klee and P. Kleinschmidt, 1987)

Conclusión

- El contraejemplo a la conjetura de Hirsch rompe una "barrera psicológica", ...
- ...pero sigue siendo asintóticamente lineal ($1.04(n-d)$). Desde el punto de vista de las aplicaciones esto es absolutamente irrelevante
- Como ya dijeron Klee y Kleinschmidt en 1987:

> *Finding a counterexample will be merely a small first step in the line of investigation related to the conjecture.*
>
> (V. Klee and P. Kleinschmidt, 1987)

Conclusión

- El contraejemplo a la conjetura de Hirsch rompe una "barrera psicológica", ...
- ...pero sigue siendo asintóticamente lineal ($1.04(n-d)$). Desde el punto de vista de las aplicaciones esto es absolutamente irrelevante
- Como ya dijeron Klee y Kleinschmidt en 1987:

> *Finding a counterexample will be merely a small first step in the line of investigation related to the conjecture.*
>
> (V. Klee and P. Kleinschmidt, 1987)

Conclusión

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

El diámetro (combinatorio) de un politopo con n facetas y dimensión d no puede ser mayor que $n - d$.

¿A quién le importa?

4) A todos ustedes, aparentemente (y a algunos periodistas).

Conclusión

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

El diámetro (combinatorio) de un politopo con n facetas y dimensión d no puede ser mayor que $n - d$.

¿A quién le importa?

4) A todos ustedes, aparentemente (y a algunos periodistas).

Conclusión

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

El diámetro (combinatorio) de un politopo con n facetas y dimensión d no puede ser mayor que $n - d$.

¿A quién le importa?

4) A todos ustedes, aparentemente (y a algunos periodistas).

Fín

G R A C I A S !