EXAMEN DE FISICA I (I.I. e I.Q.) 9-9-2006

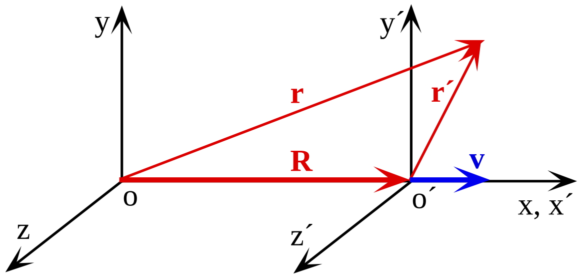
CUESTIONES

---

1) Relación entre las coordenadas espaciales, velocidades y aceleraciones en el movimiento relativo de traslación uniforme (Transformaciones Galileanas). ¿Cuando no se pueden utilizar estas trasformaciones, y hay que utilizar las de Lorentz? Da una idea de porqué.

SOLUCION

Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia con los ejes paralelos y uno moviéndose respecto al otro a lo largo de la dirección x con una velocidad : **v** = v**i**



Supongamos también que para t = 0 el origen de coordenadas de ambos sistemas o y o´ coinciden.
En un cierto instante de tiempo la separación entre los dos orígenes será **R** = **oo´** = **v**t = vt **i**
La posición de una partícula respecto al sistema o viene descrita por un vector de posición **r**, mientras que respecto al sistema o´ el vector de posición será **r´**.

La relación entre los vectores de posición en ambos sistemas es $\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'} \Rightarrow \begin{cases} x = vt + x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

Solo es diferente la coordenada x. Derivando la relación vectorial de las posiciones:

$$\mathbf{V} = d\mathbf{r}/dt = d\mathbf{R}/dt + d\mathbf{r}'/dt = \mathbf{v} + \mathbf{V}' \Rightarrow \begin{cases} V_x = v + V'_x \\ V_y = V'_y \\ V_z = V'_z \end{cases}$$

Solo es diferente la componente x de la velocidad. Derivando la relación vectorial de las velocidades:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{V}/dt = d\mathbf{v}/dt + d\mathbf{V}'/dt$$

Pero al ser un movimiento de traslación uniforme: d**v**/dt = 0 y d**V**´/dt = **a**´ por lo que $\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}'}$

Este es un resultado muy importante, ya que la aceleración es un invariante en los sistemas que se mueven con velocidades uniformes unos respecto de otros (sistemas inerciales).

Las transformaciones de Galileo dejan de ser validas cuando las velocidades entre los sistemas de referencia se acercan a la velocidad de la luz. En ese caso tenemos que utilizar las transformaciones de Lorentz. La razón esta en que la luz tiene que llevar la misma velocidad para los dos sistemas de referencia, y esto solo se cumple si aplicamos las transformaciones de Lorentz.

Para velocidades de desplazamiento entre sistemas pequeñas (v << c) aunque apliquemos las transformaciones de Galileo, la luz lleva prácticamente la misma velocidad c para los dos sistemas. Sin, embargo, si v tiende a c, al aplicar las transformaciones de Galileo, encontraríamos claramente diferentes velocidades para la luz en los dos sistemas y ello nos obliga a utilizar Lorentz.

---

2) Choque central entre dos partículas:

a) ¿Cuál es el valor máximo y mínimo del coeficiente de restitución e? ($e = -\dfrac{v'_B - v'_A}{v_B - v_A}$).

Comenta qué le pasa a las partículas después del choque en ambos casos.

b) Demuestra que cuando e = 1 se conserva la energía cinética del sistema.

SOLUCION

a) El valor máximo es 1 y el es mínimo 0. En el primer caso, el choque es elástico, y las partículas se separan entre si con una velocidad máxima. En el segundo caso el choque es inelástico, y las partículas se quedan “pegadas”, moviéndose con la misma velocidad.

b)

Por la conservación del momento: $m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$ $\quad \boxed{m_A (v_A - v'_A)} = \boxed{m_B (v'_B - v_B)}$

Si e = 1 $\quad (v_B - v_A) = -(v'_B - v'_A)$ $\quad \boxed{v_A + v'_A} = \boxed{v_B + v'_B}$

El producto de los términos de la izquierda de las ecuaciones anteriores, tiene que ser igual al producto de los términos de la derecha.:

$m_A (v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = m_B (v'_B - v_B)(v_B + v'_B)$ $\qquad m_A v_A^2 - m_A v'^2_A = m_B v'^2_B - m_B v_B^2$

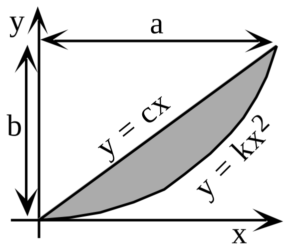
Multiplicando los dos miembros de esta última ecuación por (1/2) y despejando los términos iniciales a la izquierda y los finales a la derecha de la ecuación se transforma en :

$$\boxed{(1/2)\, m_A v_A^2 + (1/2)\, m_B v_B^2 = (1/2)\, m_A v'^2_A + (1/2)\, m_B v'^2_B}$$

que es la ecuación de conservación de la energía cinética.

---

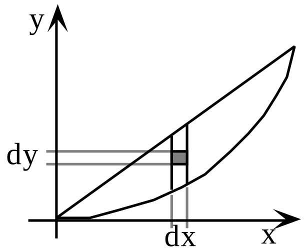
3) Determinar el centro de gravedad de las placa de la figura.



SOLUCION

Recordando la definición de centro de masas de una superficie homogénea

$x_{CM} = \dfrac{\int x\,da}{\int da}$ y teniendo en cuenta que $da = dx\,dy$, donde este diferencial de área se integra en el área sombreada delimitada por una recta y una parábola de coeficientes $c = b/a$ y $k = b/a$ respectivamente, llegamos a la ecuación de partida:



$$\boxed{x_{CM}} = \frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_0^a x\,dx \int_{kx^2}^{cx} dy}{\int_0^a dx \int_{kx^2}^{cx} dy} = \frac{\int_0^a x\,dx\,\left[y\right]_{kx^2}^{cx}}{\int_0^a dx\,\left[y\right]_{kx^2}^{cx}} = \frac{\int_0^a x\,dx\,(cx - kx^2)}{\int_0^a dx(cx - kx^2)} =$$

donde primero hemos integrado dy entre la parábola (kx^2) y la recta (cx) y posteriormente integraremos la variable x entre o y a.

$$= \frac{\int_0^a (cx^2 - kx^3)\,dx}{\int_0^a (cx - kx^2)\,dx} = \frac{\left[c\frac{x^3}{3}\right]_0^a - \left[k\frac{x^4}{4}\right]_0^a}{\left[c\frac{x^2}{2}\right]_0^a - \left[k\frac{x^3}{3}\right]_0^a} = \frac{c\frac{a^3}{3} - k\frac{a^4}{4}}{c\frac{a^2}{2} - k\frac{a^3}{3}} = \frac{\frac{b}{a}\frac{a^3}{3} - \frac{b}{a^2}\frac{a^4}{4}}{\frac{b}{a}\frac{a^2}{2} - \frac{b}{a^2}\frac{a^3}{3}} =$$

$$= \frac{ba^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}{ba\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{12}ba^2}{\frac{1}{6}ba} = \boxed{\frac{1}{2}a}$$

Procediendo de forma análoga para la coordenada y:

$$\boxed{y_{CM}} = \frac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_0^a dx \int_{kx^2}^{cx} y\,dy}{\int_0^a dx \int_{kx^2}^{cx} dy} = \frac{\int_0^a dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_{kx^2}^{cx}}{\int_0^a dx\left[y\right]_{kx^2}^{cx}} = \frac{\int_0^a dx\,\frac{(c^2x^2 - k^2x^4)}{2}}{\int_0^a dx(cx - kx^2)} =$$

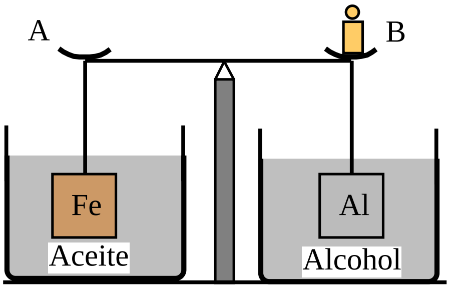
$$= \frac{\left[\frac{c^2}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^a - \left[\frac{k^2}{2}\frac{x^5}{5}\right]_0^a}{\left[c\frac{x^2}{2}\right]_0^a - \left[k\frac{x^3}{3}\right]_0^a} = \frac{\frac{c^2}{2}\frac{a^3}{3} - \frac{k^2}{2}\frac{a^5}{5}}{c\frac{a^2}{2} - k\frac{a^3}{3}} = \frac{\frac{b^2/a^2}{2}\frac{a^3}{3} - \frac{b^2/a^4}{2}\frac{a^5}{5}}{\frac{b}{a}\frac{a^2}{2} - \frac{b}{a^2}\frac{a^3}{3}} =$$

$$= \frac{b^2a\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right)}{ba\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{2}{30}b^2a}{\frac{1}{6}ba} = \frac{6}{15}\,b = \boxed{0.4\,b}$$

4) a) Enunciar el principio de Arquímedes.

b) Del platillo A de una balanza hidrostática se suspende un cubo macizo de Fe de arista 7 cm y del platillo B se suspende un cubo macizo de Al de arista 10 cm. Sumergimos el cubo de Fe en aceite y el de Al en alcohol. En estas condiciones hay que añadir al platillo B una masa de 496 g para equilibrar la balanza. Calcular la densidad del aceite.

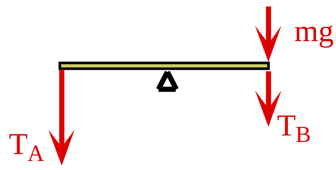
Datos: $\rho_{Fe} = 7{,}8\ g / cm^3$, $\rho_{Al} = 2{,}67\ g / cm^3$, $\rho_{Alcohol} = 0{,}91\ g / cm^3$



SOLUCION

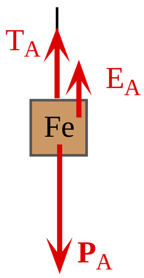
a) El principio de Arquímedes dice que todo cuerpo sumergido en el seno de un fluido experimenta una fuerza ascensorial (empuje) igual al peso del volumen desalojado.

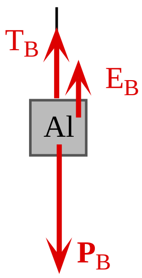
b) Sobre el brazo de la balanza solo actúan las tensiones de las cuerdas y el peso colocado en B. Como está en equilibrio, se tiene que cumplir que



$$T_A = T_B + mg \qquad (1)$$

Para calcular las tensiones, aplicamos el Principio de Arquímedes a cada uno de los cuerpos:





Cuerpo A: $T_A + E_A - P_A = 0 \qquad T_A = P_A - E_A = V_A \rho_A g - V_A \rho_{aceite} g$

Cuerpo B: $T_B + E_B - P_B = 0 \qquad T_B = P_B - E_B = V_B \rho_A g - V_B \rho_{alcohol} g$

Sustituyendo estas tensiones en la ecuación (1) :

$$V_A \rho_A \cancel{g} - V_A \rho_{aceite} \cancel{g} = V_B \rho_A \cancel{g} - V_B \rho_{alcohol} \cancel{g} + m\cancel{g}$$

$$V_A \rho_A - V_A \rho_{aceite} = V_B (\rho_A - \rho_{alcohol}) + m$$

$$V_A \rho_{aceite} = V_A \rho_A - V_B (\rho_A - \rho_{alcohol}) - m$$

$$\rho_{aceite} = [V_A \rho_A - V_B (\rho_A - \rho_{alcohol}) - m] / V_A$$

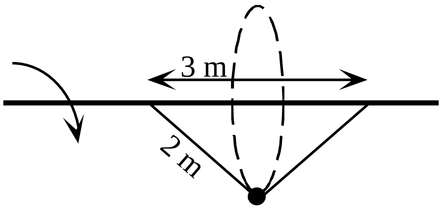
$$\boxed{\rho_{aceite} = [(0.07)^3\ 7.8\ 10^3 - (0.1)^3\ (2.67 - 0.91)\ 10^3 - 0.496] / (0.07)^3 = 1.22\ 10^3\ Kg/m^3}$$

PROBLEMAS

---

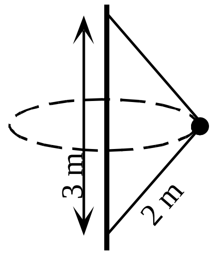
1) a) Una masa de 4 kg está sujeta a una barra horizontal, como indica la figura. Las cuerdas están bajo tensión cuando la barra gira alrededor de su eje. Si la velocidad de la masa es constante e igual a 4 m/s.
Calcula la tensión de las cuerdas cuando la masa está:

- **a1)** en su punto mas bajo.
- **a2)** en su punto mas alto.



b) Si colocamos la barra vertical y la velocidad de la masa es ahora de 6 m/s,

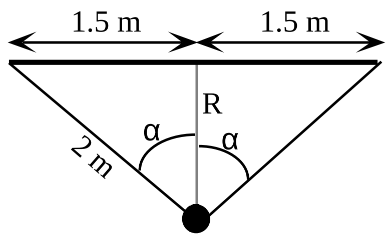
- **b1)** Calcula las tensiones de las cuerdas superior e inferior.



Nota: en los tres apartados anteriores, como paso previo para resolverlos, representa todas las fuerza que actúan sobre la masa y calcula la aceleración centrípeta de la misma.

SOLUCION

a1) Primero calculamos los ángulos del triángulo formado por las cuerdas y la barra:

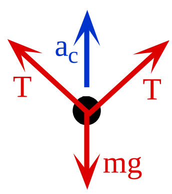


$$\text{Sen}(\alpha) = 1.5/2 \qquad \boxed{\alpha = 48.59^{\circ}}$$

La distancia de la masa a la barra es $R = 2\cos(\alpha) = 1.323$ m

La aceleración centrípeta vale $\boxed{a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{4^2}{1.323} = 12.09 \text{ m/s}^2}$

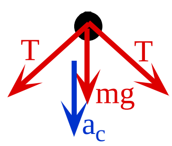
Como la velocidad es constante, la aceleración centrípeta vale lo mismo en la parte superior e inferior.
Si la masa está en su punto mas bajo, las fuerzas que actúan son:



Aplicando la 2ª ley de Newton ∑**F** = m**a** a lo largo de la dirección vertical y teniendo en cuenta que por simetría las tensiones de las dos cuerdas son iguales

$$2T\cos(\alpha) - mg = ma_c \qquad a_c = \frac{m(a_c + g)}{2\cos(\alpha)} = \frac{4\,(12.09+9.81)}{2\cos(48.59)} = \boxed{66.22 \text{ N}}$$

a2) Cuando la masa está en su punto mas alto, las fuerzas que actúan son



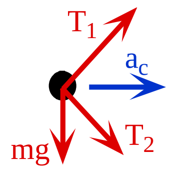
Aplicando la 2ª ley de Newton ∑**F** = m**a** a lo largo de la dirección vertical y teniendo en cuenta que por simetría las tensiones de las dos cuerdas son iguales

$$2T\cos(\alpha) + mg = ma_c \qquad \boxed{a_c = \frac{m(a_c - g)}{2\cos(\alpha)} = \frac{4\,(12.09-9.81)}{2\cos(48.59)} = 6.89 \text{ N}}$$

b1) En este caso la velocidad es diferente, por la que la aceleración centrípeta vale

$$\boxed{a_c} = \frac{v^2}{R} = \frac{6^2}{1.323} = \boxed{27.21\ \text{m/s}^2}$$

Las tensiones no valen lo mismo en las dos cuerdas, y las fuerzas que actúan son:



$$x:\ T_1 \cos(\alpha) + T_2 \cos(\alpha) = ma_c \qquad T_1 = \frac{ma_c}{\cos(\alpha)} - T_2 \qquad (1.1)$$

$$y:\ T_1 \operatorname{sen}(\alpha) - T_2 \operatorname{sen}(\alpha) - mg = 0 \qquad (1.2)$$

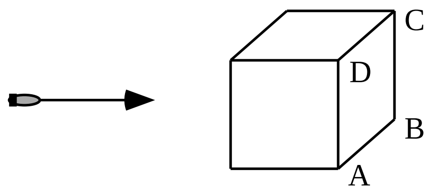
Sustituyendo el valor de T_1 en la ecuación 1.2 : $\left(\frac{ma_c}{\cos(\alpha)} - T_2\right) \operatorname{sen}(\alpha) - T_2 \operatorname{sen}(\alpha) - mg = 0$

$$ma_c \operatorname{tg}(\alpha) - 2\,T_2 \operatorname{sen}(\alpha) - mg = 0 \qquad \boxed{T_2} = \frac{m\,(a_c \operatorname{tg}(\alpha) - g)}{2 \operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{4\,(27.21 \operatorname{tg}(48.59) - 9.81)}{2 \operatorname{sen}(48.59)} = \boxed{56.11\ \text{N}}$$

Finalmente, sustituyendo este valor en la ecuación (1.1): $\boxed{T_1} = \frac{4\ 27.21}{\cos(48.59)} - 56.11 = \boxed{107.7\ \text{N}}$

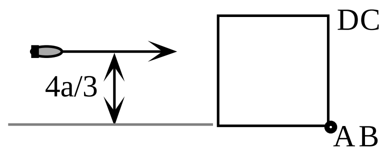
---

2) Un cubo sólido de madera de lados de longitud 2a y masa M descansa sobre una superficie horizontal. El cubo está restringido a girar alrededor de un eje AB.



a) Determinar el momento de inercia del cubo respecto al eje AB.

Se dispara una bala de masa m con una velocidad v sobre la cara opuesta a ABCD a una altura de 4a/3.



b) Determina el momento angular de la bala respecto a un punto del eje AB.

La bala se queda incrustada en el bloque. Si suponemos que m<<M:

c) Determina la velocidad angular inicial del bloque.

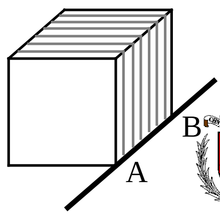
d) Encuentra el mínimo valor de v para que el cubo rote hasta caer sobre la cara ABCD.

En los apartados anteriores, las soluciones tienen que quedar en función de M, m, a, v y g.

e) Si ahora suponemos que M = 10 kg, m = 5 g y a = 10 cm, determina numéricamente las magnitudes de los apartados a) y d).

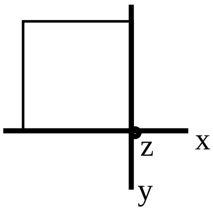
SOLUCION

a) Un cubo se puede considerar una superposición de laminas cuadradas de lado 2a. Si el momento de inercia de una lámina respecto al eje AB es $dI = dm\, Kb^2$, con K una constante a determinar, el momento de inercia del cubo será la suma de los momentos de inercia de las láminas:



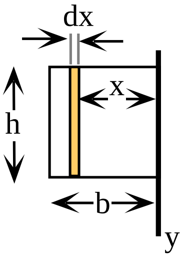
$$I = \sum dI = \sum (dm\, Kb^2) = \sum (dm)\, Kb^2 = m\, Kb^2$$

Por lo que la expresión del momento de inercia es similar para el cubo y para la lámina, cambiando únicamente la masa.



En teoría se ha visto que, cuando tenemos una lámina plana, el momento de inercia respecto a un eje perpendicular a la misma, I_z, es la suma de los momentos de inercia de la lámina respecto a dos ejes contenidos en el plano de la misma, que sean perpendiculares entre si, I_x e I_y, y que se corten en el punto por donde pasa el eje I_z.

$$I_z = I_x + I_y = 2\, I_x = 2\, I_y$$

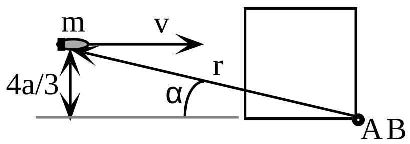


$$I_y = \int_0^b dm\, x^2 = \int_0^b \sigma\, ds\, x^2 = \int_0^b \sigma\, h dx\, x^2 = \sigma h \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b = \sigma h \frac{b^3}{3} = \frac{1}{3} \sigma\, hb\, b^2 = \frac{1}{3} m\, b^2$$

$$I_z = 2\, I_y = 2\, \frac{1}{3} m\, b^2 = \frac{2}{3} m\, b^2$$

El momento de inercia del cubo es similar, pero cambiando b por 2a y la masa ,m, por la del cubo, M:

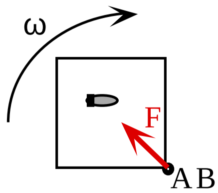
$$\boxed{I_{AB}} = I_z = \frac{2}{3}\, M\, (2a)^2 = \boxed{\frac{8}{3} M\, a^2}$$



b) El momento angular se define como $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = m\, (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$

$$|\mathbf{L}| = m\, |\mathbf{r}|\, |\mathbf{v}| \operatorname{sen}\alpha$$

Teniendo en cuenta que $|\mathbf{r}| \operatorname{sen}\alpha = 4a/3$ $\quad \boxed{|\mathbf{L}| = (4/3)\, a\, m\, |\mathbf{v}|}$



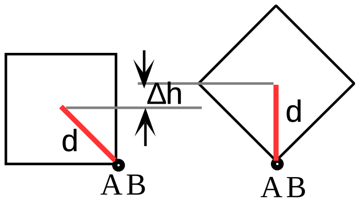
c) Al impactar la bala contra la masa, la única fuerza externa que actúa, es en el eje AB. Como esta fuerza pasa por el eje, no origina ningún momento externo, y por lo tanto, el momento angular se conserva (el momento lineal no se conserva, ya que esta fuerza si produce una variación del momento lineal del sistema). El suponer que m<<M implica que despreciamos la contribución de la bala (ya incrustada) al momento de inercia del cubo, es decir que el momento de inercia del cubo con la bala dentro es igual al momento del cubo calculado anteriormente.

Una vez que la bala está incrustada en el cubo, el cubo comienza a girar con una velocidad angular ω_0. El momento angular inicial del cubo es $L = I\, \omega_0$.

Por la conservación del momento angular: $(4/3)\, a\, m\, |\mathbf{v}| = (8/3)\, Ma^2\, \omega_0$ $\qquad \omega_0 = \dfrac{m\,|v|}{2Ma}$

d) Cuando el cubo rota, el centro de masas, que al ser uniforme está situado en el centro, cambia su altura. El incremento de altura entre la posición inicial y cuando está en al vertical es:

$$\Delta h = d - d\cos(45) = \sqrt{2}\,a - \sqrt{2}\,a\,\frac{1}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2} - 1)\,a$$



Para que el cubo caiga sobre el lado ABCD, la energía cinética de rotación inicial, tiene que ser superior a la energía potencial necesaria para que el centro de masas pase por el punto mas alto:

$$(1/2)\, I\omega_0^2 \geq M\,g\,\Delta h \qquad (1/2)\ \frac{8}{3} M\,a^2 \left(\frac{m\,|v|}{2Ma}\right)^2 \geq M\,g\,(\sqrt{2} - 1)\,a$$

$$\boxed{|v| \geq \sqrt{\frac{3M^2 g(\sqrt{2} - 1)\,a}{m^2}}}$$

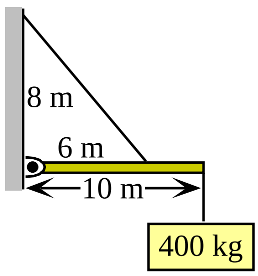
e)

$$\boxed{I_{AB}} = \frac{8}{3} M\,a^2 = \frac{8}{3}\,10\,(0.1)^2 = \boxed{0.2667\ \text{kgm}^2}$$

$$\boxed{|v| \geq} \sqrt{\frac{3M^2 g(\sqrt{2} - 1)\,a}{m^2}} = \sqrt{\frac{3\;10^2\;9.81(\sqrt{2} - 1)\;0.1}{(0.005)^2}} = \boxed{2208\ \text{m/s}}$$

---

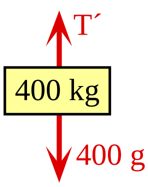
3) Un extremo de una viga uniforme de 100 kg y 10 m de longitud cuelga mediante una bisagra de una pared vertical. Se mantiene horizontalmente mediante un cable que sujeta la viga a una distancia de 6 m desde la pared, como muestra la figura. Del extremo libre de la viga se suspende un peso de 400 kg.



a) Representa todas las fuerzas que actúan sobre la viga.
b) ¿Qué tensión soporta el cable?
c) ¿Cuál es la fuerza que ejerce la viga sobre la bisagra?

Si el cable lo dejamos sujeto a la pared 8 m por encima de la bisagra, pero permitimos que su longitud varíe de modo que pueda conectarse a la viga a diversas distancias x de la pared:
d) ¿A qué distancia de la pared debe sujetarse para que la fuerza sobre la bisagra no tenga componente vertical?

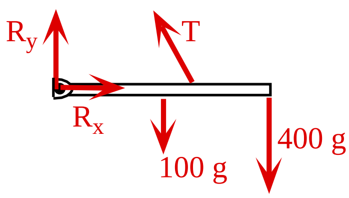
SOLUCION



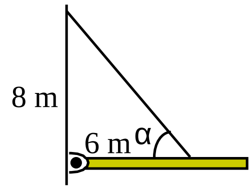
a) Como los 400 kg están en reposo, el cable que los sujeta soporta una fuerza de T´ = 400 g. Esta fuerza

se propaga por el cable hasta la viga

Las fuerzas que actúan sobre la viga son:



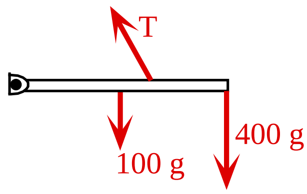
b) Como paso previo calculamos el ángulo α que forma el cable con la viga:



$$\text{sen}\ \alpha = \frac{8}{\sqrt{8^2+6^2}} = \frac{8}{100} = 0.8$$

$$\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{8^2+6^2}} = \frac{6}{100} = 0.6 \qquad \alpha = 53.13°$$

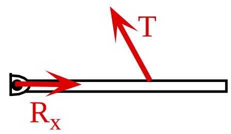
Para determinar las fuerzas, lo mas sencillo es comenzar con $\sum M = 0$, calculando los momentos respecto al gozne:



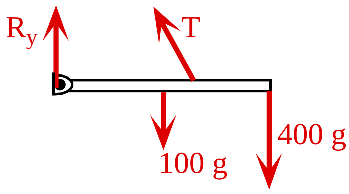
$$T\ 6\ \text{sen}\ \alpha - 100\ g\ 5 - 400\ g\ 10 = 0$$

$$\boxed{T = \frac{4500\ g}{6\ \text{sen}\alpha} = \frac{4500\ 9.81}{6\ \ 0.8} = 9196.9\ N}$$

c) Primero determinamos las fuerzas que ejerce la bisagra sobre la viga



$\sum Fx = 0 \qquad Rx - T\cos\alpha = 0 \qquad \boxed{Rx = T\cos\alpha = 9196.9\ \ 0.6 = 5518\ N}$

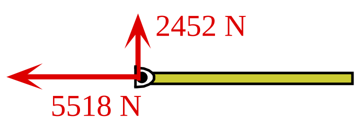


$\sum Fy = 0 \qquad Ry + T\text{sen}\ \alpha - 100\ g - 400\ g = 0$

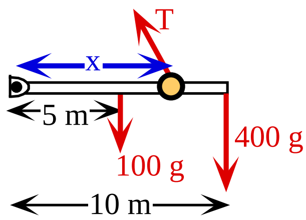
$$\boxed{Ry = 500\ \ 9.81 - 9196.9\ \ 0.8 = -2452.5\ N}$$

El que salga negativo significa que el sentido es el contrario al representado en la figura, es decir, va dirigida hacia abajo.

Las fuerzas que ejerce la viga sobre la bisagra son las opuestas (-Rx, -Ry), es decir:



d) Al variar x, se modifican el valor de T y el ángulo que forma con la viga. Si Ry = 0, la forma mas directa de calcular x, es la de suponer que $\sum M = 0$, calculando los momentos respecto al punto en que la cuerda engancha a la viga. Las únicas fuerzas que originan momentos diferentes de 0 son la tensión del cuerpo colgado y el peso de la viga:



$$400\ g\ (10 - x) - 100\ g\ (x - 5) = 0$$

$$4000 - 400\ x - 100\ x + 500 = 0 \qquad 500x = 4500 \qquad \boxed{x = 9\ m}$$