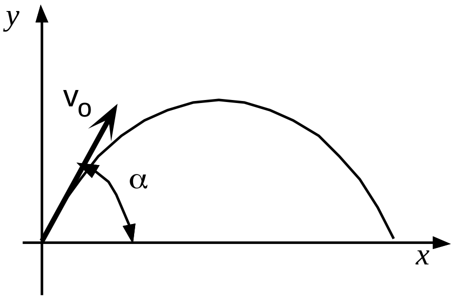
EXAMEN DE FISICA I (I.I. e I.Q.) 11-2-2006

CUESTIONES

1) Una partícula describe el movimiento parabólico de la figura. Obtener las expresiones para la máxima altura y el alcance a lo largo del eje *X*. Demostrar que se obtiene el mismo alcance con el ángulo α y su complementario (90º–α).



SOLUCION:

Teniendo en cuenta que para un movimiento uniformemente acelerado $\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{v_0}t + (1/2)\,\mathbf{a}t^2 \\ \mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{a}t \end{cases}$

y que en este caso $\begin{cases} \mathbf{a} = -g\,\mathbf{j} \\ \mathbf{v_0} = v_0 \cos\alpha\,\mathbf{i} + v_0 \,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathbf{j} \\ \mathbf{r} = 0 \end{cases}$

$\mathbf{v} = v_0 \cos\alpha\,\mathbf{i} + [v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha - gt]\,\mathbf{j}$ **(1.1)**

$\mathbf{r} = v_0 \cos\alpha\; t\,\mathbf{i} + [v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha\; t - (1/2)gt^2]\,\mathbf{j}$ **(1.2)**

a) En la altura máxima $v_y = 0$ $\quad [v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha - g\,t(y_{max})] = 0 \quad t(y_{max}) = v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha / g$

Y sustituyendo este valor en la componente y de **r**, ecuación 1.2,

$$y_{max} = v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha t - (1/2)gt^2 \;=\; v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha\; v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha / g - (1/2)g\,(v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha / g)^2 = (v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2 / 2g$$

b) en el alcance máximo y = 0 $\quad v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha\; t(x_{max}) - (1/2)gt(x_{max})^2 = 0 \quad t(x_{max}) = 2v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha / g$

Y sustituyendo este valor en la componente x de **r**, ecuación 1.2

$$x_{max} = v_0 \cos\alpha \;\; 2v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha / g \qquad x_{max} = 2\,v_0^2\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\cos\alpha / g \;=\; v_0^2\,\mathrm{sen}\,2\alpha / g$$

Si el ángulo es (90-α) utilizamos la ecuación anterior sustituyendo α por (90 - α) el alcance sería:

$$x_{max}(90-\alpha) = \; v_0^2\,\mathrm{sen}\,(180-2\alpha) / g = \; v_0^2\,\mathrm{sen}\,2\alpha / g = x_{max}(\alpha)$$

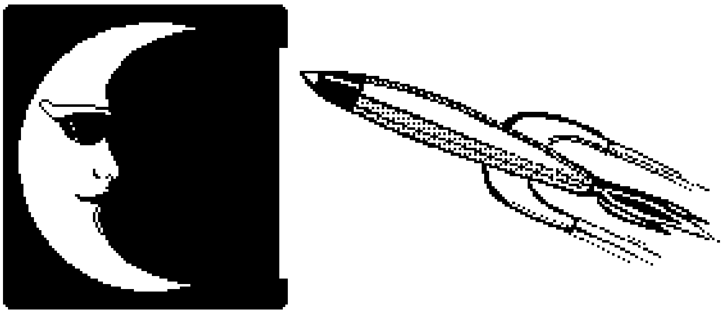
donde hemos aplicado que el sen (θ) = sen (180 - θ)

2) Una nave espacial que se dirige hacia a la Luna pasa la Tierra con una velocidad relativa de 0.8 c. Suponiendo la distancia Tierra-Luna = $3.84\ 10^8$ m

a) ¿Cuánto tiempo dura el viaje de la Tierra a la Luna, de acuerdo a un observador terrestre?

b) ¿Cuál es la distancia Tierra-Luna de acuerdo a un pasajero de la nave?

c) ¿Cuánto tiempo dura el viaje de acuerdo con el pasajero?



Nota: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}$

SOLUCION:

a) Aplicando v = e/t, el tiempo será: $\boxed{t = e / v = (3.84\cdot 10^8) / (0.8\cdot 3\cdot 10^8) = 1.6 \text{ s}}$

b) De acuerdo con el pasajero, la distancia Tierra-Luna no es propia, y por lo tanto está contraida: $L = L' / \gamma$:

Considerando que $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(0.8^2)}} = 1.666$

nos queda: $\boxed{L = 3.84\cdot 10^8 / 1.6666 = 2.3\cdot 10^8 \text{ m}}$

c) Podemos aplicar de nuevo la ecuación t = e / v con e igual al valor de L calculado en el apartado anterior. Otra posibilidad es transforma el tiempo medido desde la Tierra (t, no propio) en el tiempo de la nave (t´, propio)

$\boxed{t' = t / \gamma = 1.6 / 1.666 = 0.96 \text{ s}}$

3) MUELLE VERTICAL: Colgamos un muelle de longitud inicial Lo y masa despreciable de un techo. Si en la parte inferior del muelle situamos una masa M de modo que el conjunto queda en reposo,

a) ¿Cuánto se estira el muelle?

Si desplazamos la masa una distancia **b** de esta nueva posición de equilibrio y soltamos

b) Explica el tipo de movimiento que realiza.

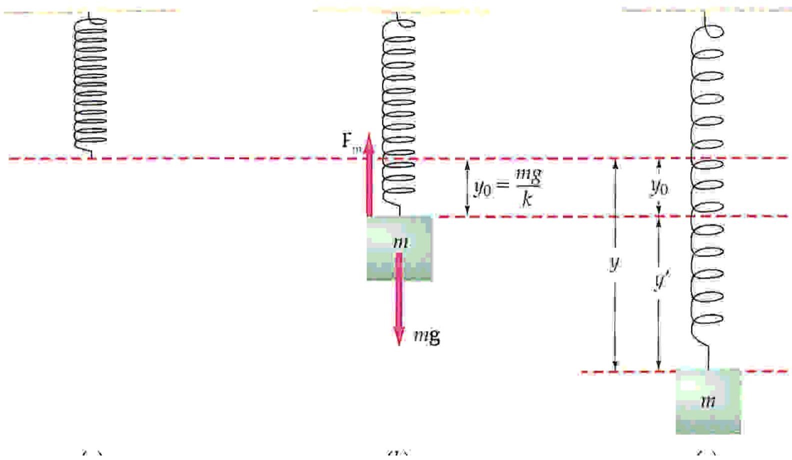
c) Encuentra la ecuación del movimiento.

SOLUCION:

El muelle estará en equilibrio estático para una posición y_0 que cumpla:

$$mg - ky_0 = 0 \qquad (3.1)$$

$$\boxed{y_0 = \frac{mg}{k}}$$



Cuando oscila:

$$mg - k\,y = m\,a \qquad mg - k\,(y_0 + y') = m\,a \qquad mg - k\,y_0 - ky' = m\,a$$

Teniendo en cuenta la ecuación (3.1)

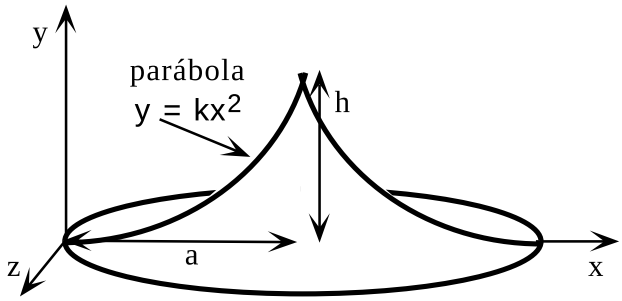
$$-ky' = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{d^2(y_0 + y')}{dt^2} = m\frac{d^2y'}{dt^2} \qquad \frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{k}{m}y' = = 0$$

Nos queda una ecuación diferencial de 2º orden cuya solución es $y' = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \alpha\right)$

El efecto de la gravedad es desplazar la posición de equilibrio. El muelle realizara un MAS entorno a esta nueva posición de equilibrio (y_0) con el mismo T que el de un muelle horizontal. En este caso, si respecto a esta posición hemos estirado el muelle una longitud b, la amplitud será A = b y por lo tanto:

$$\boxed{y' = b\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \alpha\right)}$$

4) Determina la posición del centro de masas del cuerpo homogéneo de la figura.



SOLUCION:

Como el cuerpo tiene un eje de simetría paralelo al eje y en la posición (a,y,0), el centro de masas estará a lo largo de dicho eje por lo que tendrá unas coordenadas: $x_{cm} = a$, $z_{cm} = 0$

Solo nos queda conocer la altura a la que se encuentra. Para ello, descomponemos el cuerpo en la suma de discos de radio r y volumen $dV = \pi r^2 dy$, cuyo centro de masas estará en el centro del disco situado a una altura y.

El radio de estos discos depende de la altura y: $r = a - x = a - \sqrt{(y/k)}$

Por definición,
$$y_{cm} = \frac{\int y\,dv}{\int dv} = \frac{\int_0^h y\pi r^2 dy}{\int_0^h \pi r^2 dy} = \frac{\int_0^h y\pi (a - \sqrt{y/k})^2 dy}{\int_0^h \pi (a - \sqrt{y/k})^2 dy} = \frac{\int_0^h \pi (ya^2 + y^2/k - 2ya\sqrt{y/k})dy}{\int_0^h \pi (a^2 + y/k - 2a\sqrt{y/k})dy} =$$

$$= \frac{\pi \left(a^2 \left[(1/2)y^2\right]_0^h + (1/k)\left[(1/3)y^3\right]_0^h - (2a/\sqrt{k})\left[(2/5)y^{5/2}\right]_0^h \right)}{\pi \left(a^2 \left[y\right]_0^h + (1/k)\left[(1/2)y^2\right]_0^h - (2a/\sqrt{k})\left[(2/3)y^{3/2}\right]_0^h \right)} =$$

$$= \frac{\pi \left(a^2(1/2)h^2 + (1/k)(1/3)h^3 - (2a/\sqrt{k})(2/5)y^{5/2} \right)}{\pi \left(a^2 h + (1/k)(1/2)h^2 - (2a/\sqrt{k})(2/3)h^{3/2} \right)} =$$

Y teniendo en cuenta que en el vértice de la cuerpo se cumple $h = ka^2$ $\quad k = h/a^2$

$$= \frac{\pi \left(a^2(1/2)h^2 + (a^2/h)(1/3)h^3 - (2aa/\sqrt{h})(2/5)h^{5/2} \right)}{\pi \left(a^2 h + (a^2/h)(1/2)h^2 - (2aa/\sqrt{h})(2/3)h^{3/2} \right)} = \frac{\pi \left((1/2)a^2h^2 + (1/3)a^2h^2 - (4/5)a^2h^2 \right)}{\pi \left(a^2 h + (1/2)a^2h - (4/3)a^2h \right)} =$$

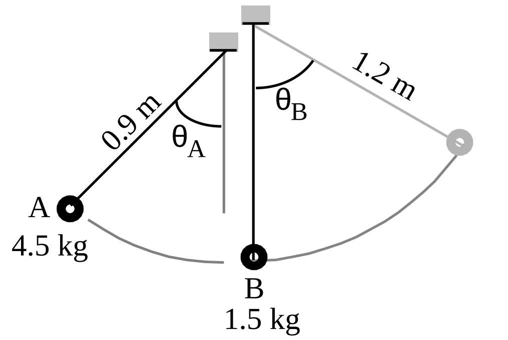
$$= \frac{\pi a^2 h^2 \left((1/2) + (1/3) - (4/5) \right)}{\pi a^2 h \left(1 + (1/2) - (4/3) \right)} = \frac{\pi a^2 h^2 \left((1/2) + (1/3) - (4/5) \right)}{\pi a^2 h \left(1 + (1/2) - (4/3) \right)} = \frac{\pi a^2 h^2 (1/30)}{\pi a^2 h (1/6)}$$

$$\boxed{y_{cm} = \frac{1}{5} h}$$

PROBLEMAS

1) La esfera A parte del reposo desde un ángulo θ_A = 60°, y tras dejarla caer libremente golpea a la B, siendo el coeficiente de restitución e = 0.9. Determinar:

a) La velocidad de A antes del choque.
b) La tensión que soporta el hilo de A justo antes del choque.
c) La altura que alcanza la bola B.
d) La energía perdida en el choque.
e) El ángulo θ_A desde el que debe dejarse caer A para que el ángulo θ_B sea de 90°.



SOLUCION:

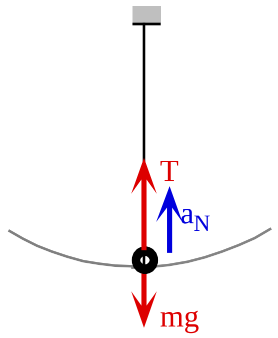
a) La perdida de energía potencial gravitatoria se convierte en energía cinética:

$$-\Delta Ep = \Delta Ec \qquad mg\,(-\Delta h) = (1/2)\,mv^2 \qquad (1.1)$$

$$v_A = \sqrt{2g\,(-\Delta h)} = \sqrt{2g\,(0.9 - 0.9\cos 60)} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 0.45}$$

$$\boxed{v_A = 2.9714 \text{ m/s}}$$

b) La masa A está realizando un movimiento circular, por lo que esta poseerá una aceleración normal (a_N). Las dos únicas fuerzas que actúan sobre la misma son el peso y la tensión. Como la a_N lleva la dirección de la tensión, significa que la tensión es mayor que el peso:



$$T - mg = m\,a_N \qquad T = mg + mv^2/r = 4.5\,(9.81 + 2.97^2/0.9) \qquad \boxed{T = 88.29 \text{ N}}$$

c) Conservación del momento: $m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \qquad m_A v_A = m_A v'_A + m_B v'_B \qquad (1.2)$

Coeficiente de restitución: $e = -\dfrac{v'_B - v'_A}{v_B - v_A} \quad : \quad e = -\dfrac{v'_B - v'_A}{0 - v_A} \qquad (1.3)$

Despejando la ecuación (1.3) $\qquad v'_A = -e\,v_A + v'_B \qquad (1.4)$
e introduciendo este valor en la ecuación (1.2):

$$m_A\,v_A = m_A\,(-e\,v_A + v'_B) + m_B\,v'_B \qquad (m_A + e\,m_A)\,v_A = (m_A + m_B)\,v'_B$$

$$v'_B = \frac{(1+e)\,m_A}{m_A + m_B}\,v_A = \frac{(1+0.9)\,4.5}{4.5 + 1.5}\,v_A \qquad v'_B = 1.425\,v_A \qquad (1.5)$$

$$\boxed{v'_B = 4.234 \text{ m/s}}$$

Una vez adquirida esta velocidad, la bola B comienza a oscilar ganando altura hasta que transforma toda su energía cinética en potencial

$$(1/2)\, m_B\, v'^2_B = m_B\, g\, \Delta h \qquad \Delta h = v'^2_B/2g = (4.234)^2/2\cdot 9.81 \qquad \boxed{\Delta h = 0.9137 \text{ m}}$$

Este incremento de altura equivale a un ángulo de θ_B tal que

$$L_B - L_B \cos\theta_B = \Delta h \qquad L_B\,(1-\cos\theta_B) = \Delta h \qquad \cos\theta_B = 1 - \Delta h / L_B \qquad \boxed{\theta_B = 76.2°}$$

d) La energía perdida en el choque será la diferencia entre la energía cinética justo antes del choque y la de justo después del choque: $\Delta E = Ec_A' + Ec_B' - Ec_A$

$$\Delta E = (1/2)\, m_A\, v'^2_A + (1/2)\, m_B\, v'^2_B - (1/2)\, m_A\, v_A^2$$

Conocemos todos los datos menos v'_A , que la podemos obtener de la ecuación (1.4):

$$v'_A = -\, e\, v_A + v'_B = -0.9\cdot 2.9714 + 4.234 = 1.56 \text{ m/s}$$

$$\boxed{\Delta E = (1/2)\, 4.5\cdot 1.56^2 + (1/2)\, 1.5\cdot 4.234^2 - (1/2)\, 4.5\cdot 2.9714^2 = 5.48 + 13.45 - 19.87 = -0.94 \text{ J}}$$

e) Si $\theta_B = 90°$ $\Delta h = 1.2$ m y utilizando la ecuación $(1/2)\, m_B\, v'^2_B = m_B\, g\, \Delta h$

$$v'_B = \sqrt{2g\,\Delta h} = \sqrt{2\cdot 9.81\cdot 1.2} = 4.8522 \text{ m/s}$$

El choque se produce en las mismas condiciones que en el apartado c, por lo que podemos utilizar las mismas ecuaciones, en particular la (1.5) $v'_B = 1.425\, v_A$ que nos permite calcular cual debería ser la velocidad v_A de la bola A antes del choque

$$v_A = v'_B/1.425 = 4.8522/1.425 = 3.405 \text{ m/s}$$

Aplicando la conservación de la energía, ecuación (1.1) $mg\,(-\Delta h) = (1/2)\, mv^2$ $-\Delta h = v'^2_B/2g$

$$L_A - L_A \cos\theta_A = v'^2_A/2g \qquad L_A(1-\cos\theta_A) = v'^2_A/2g \qquad \cos\theta_A = 1 - v'^2_A/2g\, L_A$$

$$\cos\theta_A = 1 - 3.405^2/2\cdot 9.81\cdot 0.9 = 0.3434 \qquad \boxed{\theta_A = 69.9°}$$

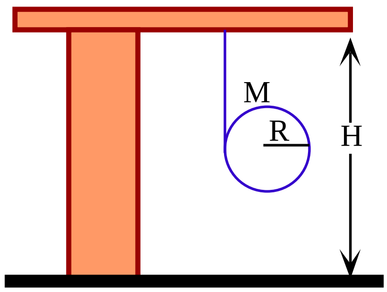
2) Se construye un “yo-yo” con una cuerda enrollada alrededor de un disco uniforme de radio R y masa M. Se libera desde el reposo con la cuerda vertical y su extremo superior fijado a la parte inferior de una mesa de altura H. Determinar en función de M, H, R y/o g:

a) La tensión de la cuerda.

b) La aceleración del centro de masas.

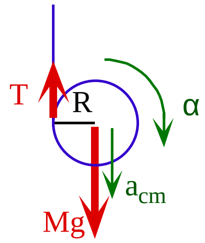
c) La velocidad del centro de masas al llegar al suelo.

d) Determinar los valores numéricos de los tres apartados anteriores tomando M = 2 kg, H = 0.5 m y R = 10cm.



SOLUCION:

a)



Traslación: $Mg - T = Ma_{cm}$ $\qquad a_{cm} = (Mg - T)/M \qquad$ (2.1)

Rotación: $TR = I\alpha$ $\qquad TR = (1/2)MR^2\,(a_{cm}/R) \qquad$ (2.2)

Hemos utilizado las relaciones $I = (1/2)mR^2$ y $\alpha = a_{cm}/R$. Sustituyendo a_{cm} (ecuación 2.1) en la ecuación 2.2:

$T\cancel{R} = (1/2)\cancel{M}\cancel{R}^2\,[(Mg - T)/\cancel{M}\cancel{R}]$ $\qquad T = (1/2)(Mg - T) \qquad 2T = Mg - T \qquad (3/2)\,T = Mg/2$

$$\boxed{T = (1/3)\,Mg} \qquad (2.3)$$

b) Sustituyendo la ecuación (2.3) en la (2.1) $\quad a_{cm} = (Mg - T)/M = (Mg - (1/3)\,Mg)/M = (2/3)\,Mg/M$

$$\boxed{a_{cm} = (2/3)\,g} \qquad (2.4)$$

c) La perdida de energía potencial gravitatoria del centro de masas, se convierte en energía cinética de traslación mas energía cinética de rotación:

$$\cancel{M}g\,(H - R - R) = (1/2)\,Mv^2 + (1/2)\,I\,\omega^2 = (1/2)\,\cancel{M}v^2 + (1/2)\,(1/2)\cancel{M}R^2\,(v/R)^2$$

Dividiendo por la masa y simplificando

$$g\,(H - 2R) = (1/2)\,v^2 + (1/4)\,v^2 = (3/4)\,v^2 \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{4}{3}\,g(H-2R}} \qquad (2.5)$$

d) Si tomamos M = 2 kg, H = 0.5 m y R = 10cm

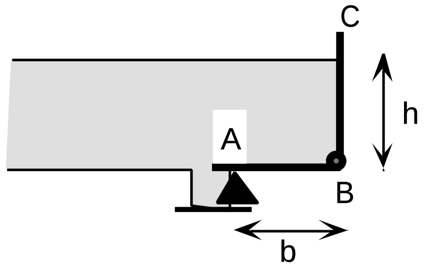
(2.3) $\quad T = (1/3)\,Mg \qquad T = (1/3)\,2\cdot 9.81 \qquad \boxed{T = 6.54\text{ N}}$

(2.4) $\quad a_{cm} = (2/3)\,g \qquad a_{cm} = (2/3)\,9.81 \qquad \boxed{a_{cm} = 6.54\text{m/s}^2}$

(2.5) $\quad v = \sqrt{\frac{4}{3}\,g(H-2R} \qquad v = \sqrt{\frac{4}{3}\,9.81(0.5-0.2} \qquad \boxed{v = 1.98\text{ m/s}}$

3) El extremo de un canal de agua está formado por una placa ABC que está articulada en B y tiene 1.2 m de ancho. Sabiendo que b = 600 mm y h = 450 mm, hallar:

a) La presión absoluta en el punto A.
b) La fuerza neta ejercida por el agua sobre el lado AB.
b) La fuerza neta ejercida por el agua sobre el lado BC y el punto de aplicación de la misma.
c) Las reacciones en A y B.
d) Calcular la relación h/b para la cual la reacción en A es nula.



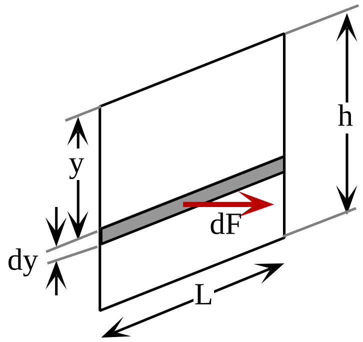
SOLUCION:

a) La presión absoluta es la suma de la presión atmosférica (Patm) mas la debida al agua:

$P = P_{atm} + \rho g H = 1.013 \cdot 10^5 + 10^3 \cdot 9.81 \cdot 0.45 = 1.013 \cdot 10^5 + 0.044 \cdot 10^5$ $\boxed{P = 1.057\ 10^5 \text{ Pascales}}$

b) Como por la parte inferior del lado AB actúa la Patm, la fuerza neta que actúa sobre ese AB es la debida a la presión del agua: $F_{AB} = (P - P_{atm})\ Area = \rho g h\ Area = 0.0441 \cdot 10^5 \cdot 0.6 \cdot 1.2$ $\boxed{F_{AB} = 3175\ N}$

c) Como Patm actúa en ambos lados de la parte BC, la fuerza absoluta sobre la misma será únicamente debida a la presión ejercida por el agua, que a una profundidad y es P= ρgy. Si consideramos una franja de la presa de altura dy y longitud L, toda ella situada a una profundidad y, la fuerza que actúa sobre la misma será:



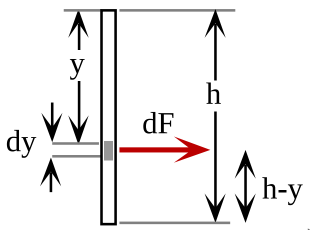
$$dF = Pds = PLdy = \rho g y\ L dy$$

Para calcular la fuerza total sobre la presa debemos integrar dF entre la superficie del agua y el extremo inferior de la presa:

$$\boxed{F_{BC} = \int_0^h \rho\, g\, y\, L\, dy = \rho\, g\, L \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h = (1/2)\rho\, g\, L\, h^2} \qquad \boxed{F_{BC} = (1/2)\, 10^3 \cdot 9.81 \cdot 1.2 \cdot (0.45)^2 = 1192\ N}$$

El punto de aplicación de la fuerza F sobre la presa será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos)

El momento <u>respecto a un punto del fondo</u> B de un dF actuando sobre una franja a una profundidad y será:



$$dM = dF(h-y) = \rho g y\, L dy\, (h-y)$$

donde hemos tomado el valor de dF calculado en el apartado anterior. Para calcular el momento total, integramos entre el borde superior e inferior de la presa:

$$M = \int_0^h \rho\, g y L\, (h-y)\, dy = \rho\, gL \int_0^h (h y - y^2)\, dy = \rho\, gL \left(h \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h \right) = \rho\, gL \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right)$$

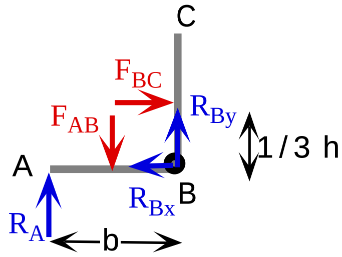
$$\boxed{M = (1/6)\, \rho g L h^3}$$

Si el punto de aplicación esta a una altura d respecto a la parte inferior de la presa, tiene que verificarse que

$$F_{BC} d = M$$

$$d = \frac{M}{F_{BC}} = \frac{(1/6)\ \rho\ g\ L\ h^3}{(1/2)\ \rho\ g\ L\ h^2} \qquad \boxed{d = (1/3)\ h\ =\ 0.15\ \text{m}}$$

c) Las fuerzas que actúa sobre la placa se muestran en la figura:



Calculando momentos respecto al punto B; $\sum M_B = 0$

$$R_A b + F_{BC}(h/3) - F_{AB}\,(b/2) = 0$$

$$R_A = F_{AB}/2 - F_{BC}(h/3b) = 3175 / 2 - 1192(0.45 / 3 \cdot 0.6) \qquad \boxed{R_A = 1289.5\ \text{N}}$$

$\sum F_x = 0 \qquad F_{BC} - R_{Bx} = 0 \qquad \boxed{R_{Bx} = F_{BC} = 1192\ \text{N}}$

$\sum F_y = 0 \qquad R_{By} + R_A - F_{AB} = 0 \qquad R_{By} = F_{AB} - R_A \qquad \boxed{R_{By} = 3175 - 1289.5 = 1885.5\ \text{N}}$

d) Si $R_A = 0 \qquad F_{BC}(h/3) - F_{AB}\,(b/2) = 0 \qquad (1/2)\,\rho\, g\, L\, h^2\,(h/3) = \rho\, g\, h\, L\, b\,(b/2)$

Dividiendo por $\rho\, g\, L$: $\qquad (1/6)\, h^3 = (1/2)\, b^2 h \qquad h^2 = 3\, b^2 \qquad \boxed{h = \sqrt{3}\, b}$