EXAMEN DE FISICA I (GTI) 14-1-2025

CUESTIONES

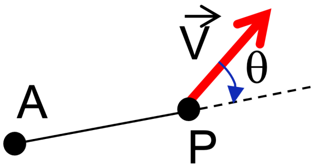
1) Definir el momento de un vector respecto de un punto (0.2). Demostrar que el momento es nulo si el punto está en la línea de acción del vector (0.3). Demostrar que el módulo del momento se puede escribir como el producto del módulo del vector por la mínima distancia del punto a la línea de acción del vector (0.5).

SOLUCION:

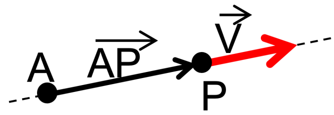
El momento de un vector **V**, situado en un punto P, respecto a un punto A es el producto vectorial del vector que va de A a P (**AP**) con el vector **V**:

$$\mathbf{M_A V} = \mathbf{AP} \wedge \mathbf{V},$$

por lo que su modulo será: $|\mathbf{M_A V}| = |\mathbf{AP}|\ |\mathbf{V}|\ \text{sen}\,\theta.$

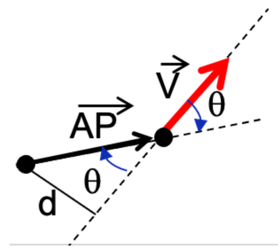


Si el punto A está en la línea de acción del vector, los vectores **AP** y **V** son paralelos, por lo que el ángulo que forman es de 0 grados, y como el seno de 0 es cero, el momento es nulo.



Si el punto A no está en la línea de acción del vector **V**, el módulo del vector **AP** por el seno del ángulo que forman **AP** y **V** es igual a la mínima distancia del punto A a la línea de acción del vector **V** (d):

$|\mathbf{AP}|\ \text{sen}\,\theta = d$, por lo que $\boxed{|\mathbf{M_A V}|} = |\mathbf{AP}|\ |\mathbf{V}|\ \text{sen}\,\theta. = \boxed{|\mathbf{V}|\ d}$



2) Suponer que un objeto sigue una trayectoria en espiral mientras viaja con una velocidad de módulo constante (suponer que parte del centro);

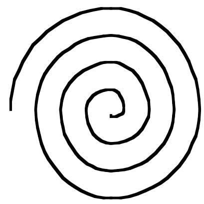
a) ¿Es constante la velocidad del objeto? **(0.2)**

b) ¿Es constante su aceleración? **(0.3)**

c) ¿Es constante el módulo de la aceleración? **(0.2)**

d) Si el módulo de la aceleración no fuese constante ¿Aumenta o disminuye? **(0.3)**

Razonar todas las respuestas.



SOLUCION:

a) No, la velocidad es un vector y aunque el módulo permanezca constante, la dirección de la velocidad cambia con el tiempo, ya que la velocidad es siempre tangente a la trayectoria.

b) No, ya que en un movimiento curvilíneo la aceleración es un vector dirigido hacia el interior de la trayectoria y a medida que el objeto gira, va cambiando de dirección.

c) No, la aceleración tiene dos componentes intrínsecas: la aceleración tangencial ($a_T = d|\mathbf{v}|/dT$)y la aceleración normal ($a_N = v^2/\rho$); la a_T es nula, pero la a_N es diferente de cero y va variando, ya que el radio de curvatura ρ depende de la posición, por lo que la a_N también depende de la posición y por lo tanto del tiempo.

d) Disminuye, ya que el módulo de la velocidad es constante, y el radio de curvatura ρ aumenta con el tiempo, por lo que la a_N ($= v^2/\rho$) se va haciendo más pequeña

3) Un bloque descansa sobre el tablero de una mesa que realiza un movimiento armónico simple de amplitud A y periodo T.

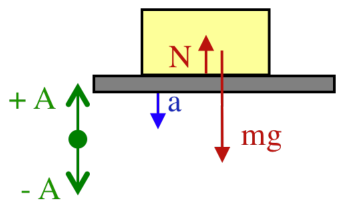
a) Si la oscilación es vertical ¿cuál es el máximo valor de A que permitirá al bloque permanecer siempre en contacto con la mesa? (0.5)

b) Si la oscilación es horizontal, y el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la mesa es μ, ¿cuál es el máximo valor de A para que el bloque no se deslice. (0.5)

SOLUCION

a) En un MAS,

$$x = A\cos\omega t$$
$$v = -A\omega \operatorname{sen}\omega t$$
$$a = -A\omega^2 \cos\omega t \quad \Rightarrow \quad a_{max} = A\omega^2$$

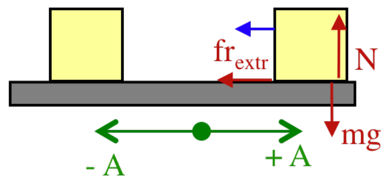


En la parte superior de la oscilación, aplicando la 2ª ley de Newton
$mg - N = ma \quad \Rightarrow \quad N = m\,(g - a)$

En esa parte la $a = a_{max}$, además, si el bloque permanece en reposo:

$$N \ge 0 \;\Rightarrow\; g - a_{max} \ge 0 \;\Rightarrow\; g - A\omega^2 \ge 0 \;\Rightarrow\; \boxed{A \le g/\omega^2 = g/(2\pi/T)^2 = gT^2/(4\pi^2)}$$

b) La fuerza que produce la aceleración es la fuerza de rozamiento,



$$fr = ma = m\,(-A\omega^2 \cos\omega t)$$

Esta fuerza tiene un valor máximo en los extremos de la trayectoria:

$$fr_{extr} = m\,A\omega^2$$

Además la fuerza de rozamiento siempre tiene que ser menor que la fuerza de rozamiento máxima ($=\mu N$):

$$fr_{extr} \le fr_{max} \;\Rightarrow\; m\,A\omega^2 \le \mu m g \;\Rightarrow\; \boxed{A \le \mu g/\omega^2 = \mu g/(2\pi/T)^2 = \mu g T^2/(4\pi^2)}$$

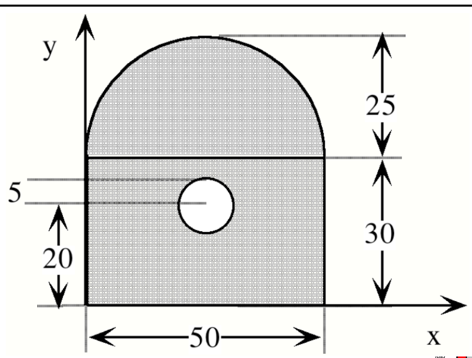
4) Determinar la posición del centro de masas de la placa homogénea de la figura . (1)

Nota, recordar que:

$S_{disco} = \pi R^2$

$S_{esfera} = 4\pi R^2$

$V_{esfera} = (4/3)\pi R^3$

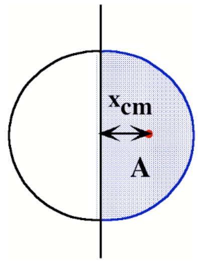


SOLUCION

La placa se supone la suma de dos placas, una rectangular y otra semicircular a las que restamos una placa circular.
Por simetría, los centros de masas de la placa rectangular y la circular están en el centro.

El centro de masas de la placa semicircular podemos determinarlo por el teorema de Pappus Guldin, que para un cuerpo de revolución dice que:

$$V = 2\pi x_{cm} A$$



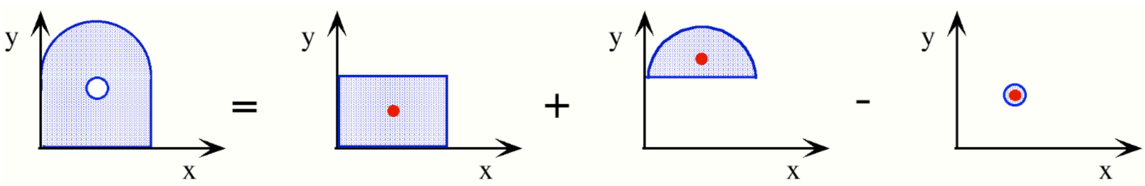
Con A = área de la placa $\Rightarrow$ $A = (1/2)\ \pi r^2$

y V = volumen de la esfera que genera $\Rightarrow$ $V = (4/3)\ \pi r^3$

Introduciendo estos valore en la ecuación: $(4/3)\ \pi r^3 = 2\pi x_{cm}\ (1/2)\ \pi r^2 \ \Rightarrow$

$$x_{cm} = (4r/3\pi) = (100/3\pi) = 10.61$$

A continuación descomponemos la placa en la suma de tres placas, y como son homogéneas, en lugar de utilizar masas, utilizamos áreas:



$A_1 = 50 \bullet 30 = 1500$	$A_2 = (1/2)\ \pi 25^2 = 981.75$	$A_3 = \pi 5^2 = 25\ \pi$
$x_{cm1} = 25$	$x_{cm2} = 25$	$x_{cm3} = 25$
$y_{cm1} = 15$	$y_{cm2} = 30 + 10.61$	$y_{cm3} = 20$

$$\boxed{x_{cm}} = \frac{\sum A_i\, x_{cmi}}{\sum A_i} = \boxed{25} \Leftarrow$$

También se puede deducir ya que hay un plano de simetría paralelo al eje y que pasa por x = 25

$$\boxed{y_{cm}} = \frac{\sum A_i\, y_{cmi}}{\sum A_i} = \frac{1500 \bullet 15 + 981.75 \bullet 40.61 - 25\pi \bullet 20}{1500 + 981.75 - 25\pi} = \frac{60798}{2403} = \boxed{25.3}$$

1) Un bloque de 1 kg se halla pendiente de un hilo de 1 m de longitud sujeto a un punto por su otro extremo. Lanzamos horizontalmente un proyectil de 20 g de masa que realiza un choque frontal con el bloque quedando empotrado en él. Calcular:

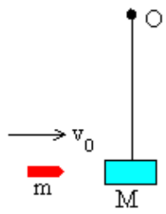
a) La mínima velocidad del proyectil para que realizado el choque ambas masas describan una circunferencia completa en el plano vertical. (0.8)

b) La máxima tensión del hilo (0.5), razonando en qué momento se produce. (0.5)

Si la velocidad del proyectil es de 644.08 km/h calcular:

c) Hasta que altura ascenderá el sistema después del choque. (0.4)

d) La tensión del hilo en el momento en que alcance dicha altura. (0.3)



a) Aplicando la 2ª Ley de Newton en la parte superior y tomando ***Mm* = (M + m)**:

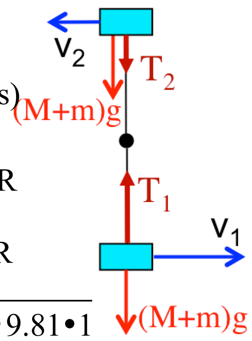
$$Mm\,g + T_2 = Mm\frac{v_2^2}{R} \Rightarrow T_2 = Mm\left(\frac{v_2^2}{R} - g\right) \quad \text{Si } T_2 \geq 0 \Rightarrow v_2 \geq \sqrt{gR} \quad (= 3.13 \text{ m/s})$$

Conservación de la energía: $\frac{1}{2}Mm\,v_1^2 = \frac{1}{2}Mm\,v_2^2 + Mm\,g2R \Rightarrow v_1^2 = v_2^2 + 4gR$

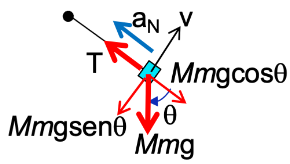
Tomando el mínimo valor de v_2, el mínimo valor de v_1 será $v_1^2 = gR + 4gR = 5gR$

Conservación de P: $mv_0 = Mm\,v_1 \Rightarrow v_0 = \frac{Mm}{m}v_1 = \frac{Mm}{m}\sqrt{5gR} = \frac{1+0.02}{0.02}\sqrt{5\cdot 9.81\cdot 1}$

$\Rightarrow$ $\boxed{v_0 = 357.18 \text{ m/s} = 1285.8 \text{ km/h}}$



b) Si el bloque forma un ángulo θ con la vertical y lleva una velocidad v, aplicando la 2º ley de Newton a la dirección radias: T-Mmgcos θ = ma_N, por lo que la T vale: T = *Mm*gcosθ + *Mm*v^2/r $\Rightarrow$ la T es máxima cuando θ es mínimo y la v maxima, esto sucede en la parte inferior , cuando θ = 0 y v = v_1



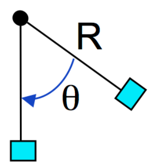
Si en esa posición a la tensión la llamamos T_1, y se cumple que:

$$T_1 - Mm\,g = Mm\frac{v_1^2}{R} \Rightarrow T_1 = Mm\left(g + \frac{v_1^2}{R}\right) \Rightarrow$$

Recordando que : $v_1 = \sqrt{5gR} = \sqrt{5\cdot 9.81\cdot 1} = 7.00$ m/s $\Rightarrow$ $\boxed{T_1 = 1.02\left(9.81 + \frac{7^2}{1}\right) = 59.99N}$

c) Si v_0 = 644.08 km/h = 178.91 m/s $\Rightarrow$ $v_1 = \frac{m}{Mm}v_0 = \frac{0.02}{1.02}\,178.91 = 3.508$ m/s

$$\frac{1}{2}Mm\,v_1^2 = Mm\,g\Delta h \Rightarrow \boxed{\Delta h = \frac{v_1^2}{2g} = 0.6272 \text{ m}}$$

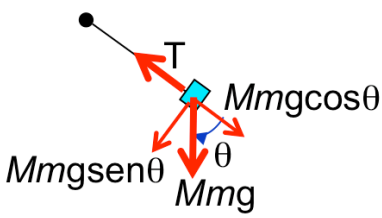


d) $\Delta h = 0.6272 = R - R\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 1 - 0.6272 = 0.3728 \Rightarrow \theta = 68.11°$

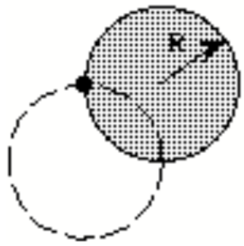
x´: *Mmg* senθ = *Mm*a_T

y´: T-*Mmg*cosθ = *Mm*v^2/r $\Rightarrow$ (como v = 0) $\Rightarrow$

$\boxed{T = Mmg\cos\theta = 1.02\ 9.81\cos(68.11) = 3.73 \text{ N}}$



2) Un disco sólido uniforme de radio R y masa m puede girar libremente sobre un pivote sin fricción que pasa por un punto de su borde (ver figura). Sabiendo que el momento de inercia del disco respecto a un eje perpendicular que pase por su centro es $(1/2)mR^2$:



a) Determina el momento de inercia respecto a un eje perpendicular al disco que pase por el borde. (0.2)

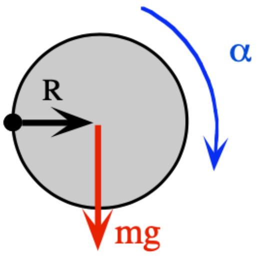
Si el disco se libera a partir del reposo en la posición mostrada en la figura:
b) ¿Cuál es la aceleración angular inicial del disco? (0.6)
c) Calcular la velocidad de su centro de masa cuando alcanza la posición indicada por el círculo de líneas de trazo. (0.6)
e) Calcular numéricamente los apartados a) , b) y c) para m = 1kg y R = 20 cm. (0.6)

SOLUCION:

a) Como los dos ejes son paralelos podemos aplicar el teorema de Stenier:

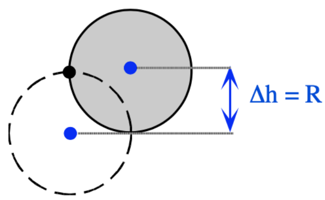
$$\boxed{I = I_{CM} + md^2 = (1/2)m R^2 + MR^2 = (3/2)m R^2} \qquad (3.1)$$

b) Aplicamos $\sum M = I\alpha$



Despejando α y teniendo en cuenta que respecto al eje de giro, el único momento es el del peso: $M = mgR$

$$\boxed{\alpha = \frac{\sum M}{I} = \frac{mgR}{\frac{3}{2}mR^2} = \frac{2}{3}\frac{g}{R}} \qquad (3.2)$$



c) Aplicamos el teorema de conservación de la energía entre las dos posiciones. En la inicial solo tenemos energía potencial gravitatoria (mgh), que se transforma en energía cinética de rotación $[(1/2)I\omega^2]$. La energía potencial se calcula en el centro de masas y suponemos que en la parte inferior la energía potencial es cero. La variación de altura es $\Delta h = R$

$$mgR = (1/2)\, I\, \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2mgR}{I}} = \sqrt{\frac{2mgR}{\frac{3}{2}mR^2}} = \sqrt{\frac{4g}{3R}}}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad lineal de un punto es el producto de la velocidad angular por la distancia de dicho punto al eje de giro. En este caso esa distancia es el radio R

$$\boxed{v = \omega\, R = \sqrt{\frac{4gR}{3}}} \qquad (3.3)$$

d) Si tomamos m = 1kg y R = 20 cm

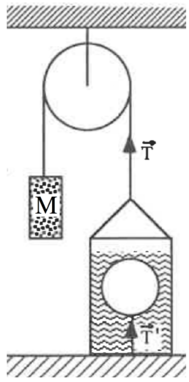
$$(3.1) \Rightarrow I = (3/2) m R^2 \quad \Rightarrow \quad I = (3/2)\, 1\cdot 0.2^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = 0.06\ kgm^2}$$

$$(3.2) \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}\frac{g}{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3}\,\frac{9.81}{0.2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha\ = 32.7\ rad/s^2}$$

$$(3.3) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4gR}{3}} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{4\cdot 9.81\cdot 0.2}{3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 1.62\ m/s}$$

---

3 **a)** Explica el Teorema de Arquímedes en el caso de que un cuerpo este sumergido en un fluido sometido a una aceleración vertical *a*. **(0.5)**



Dado el montaje de la figura, en el que una esfera de volumen $V_e = 250\ cm^3$ y masa $m_e = 150$ g está atada al fondo de un recipiente que contiene un volumen de agua Va = 200 cm^3, calcular la aceleración *a* y las tensiones T y T´ para los siguientes valores dela masa M del bloque:

b) M = 300 g **(0.6).**

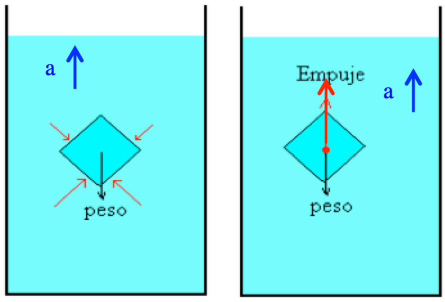
c) M = 800 g **(0.5).**

d) M = 4000 g **(0.4).**

Nota: considerar que el recipiente, las cuerdas y la polea tienen una masa despreciable.

SOLUCION

a) Cuando un recipiente que contiene un fluido experimenta una aceleración vertical a, si nos fijamos en un elemento de fluido imaginario, el resto del fluido tiene que ejercer una fuerza sobre dicho elemento que compensé el peso del fluido (m_{fluido} g) y que haga producir dicha aceleración, es decir, aplicando la 2ª ley de Newton en la dirección vertical:



$$\boxed{Empuje} = Peso + m_{fluido}\, a = \boxed{m_{fluido}\,(g + a)}$$

Es decir, el empuje es mayor que el peso del fluido desalojado. Si la aceleración fuese hacia abajo, el empuje sería menor que el peso: Empuje $= m_{fluido}\,(g - a)$

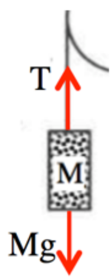
b) El recipiente tiene una masa total m que es la suma de la masa de la esfera m_e y la masa del agua m_a:

$$m = (m_e + m_a) = m_e + V_a\, \rho_a = 150\ g + 200\ cm^3 \cdot 1 g/cm^3 = 350\ g = 0.35\ kg$$

En este caso $M \leq m$, por lo que el recipiente sigue apoyado en el suelo y no hay movimiento, es decir la aceleración es cero:

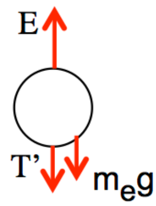
$$\boxed{a = 0}$$

Para determinar T aplicamos la 2ª ley de Newton a la masa M:



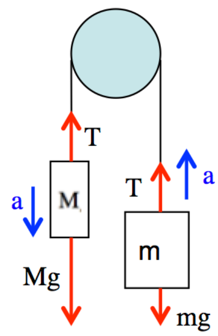
$$T - Mg = 0 \rightarrow \boxed{T = Mg = 0.3 \cdot 9.81 = 2.942\ \text{N}}$$

Para determinar T', aplicamos la 2ª ley de Newton a la esfera teniendo en cuenta que la masa de agua desalojada es: $\boxed{m_{ad} = V_e\, \rho_a = 250\ \text{cm}^3 \cdot 1\text{g/cm}^3 = 250\ \text{g} = 0.25\ \text{kg}}$:



$$E - m_e g - T' = 0 \rightarrow \boxed{T' = E - m_e\, g = m_{ad}\, g - m_e\, g = (m_{ad} - m_e)g = (0.25 - 0.15) \cdot 9.81 = 0.981\ \text{N}}$$

c) En este caso $M \geq m$ por lo que los cuerpos se moverán con una aceleración a. Para determinar la tensión y la aceleración, aplicamos la 2ª ley de Newton a los dos cuerpos:



$$\begin{cases} Mg - T = Ma \\ T - mg = ma \end{cases}$$

Despejando la segunda ecuación $\boxed{T = m\,(g + a)}$ (3.1)

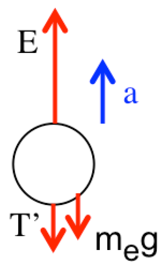
Y sumando las dos: $Mg - mg = Ma + ma \rightarrow (M - m)\, g = (M + m)\, a \rightarrow$

$$\boxed{a = \frac{M - m}{M + m}\, g} \quad (3.2)$$

Dando valores a la ecuación 3.2 $\boxed{a = \frac{0.8 - 0.35}{0.8 + 0.35}\, 9.81 = 3.839\ \text{m/s}^2}$

Aplicamos ahora la ecuación 3.1 $\boxed{T = 0.35\,(9.81 + 3.839) = 4.777\ \text{N}}$

Para determinar T' aplicamos la 2ª ley de Newton a la esfera: $E - m_e g - T' = m_e\, a \rightarrow$



$$\boxed{T' = E - m_e(g + a) = m_{ad}\,(g + a) - m_e(g + a) = (m_{ad} - m_e)\ (g + a)} \quad (3.3)$$

En este caso: $\boxed{T' = (0.25 - 0.15)\,(9.81 + 3.839) = 1.365\ \text{N}}$

d) Para M = 4000 g se sigue cumpliendo que $M \geq m$, por lo que las ecuaciones 3.1, 3.2 y 3.3 siguen siendo validas. Aplicándolas para este nuevo valor de M:

3.2 $\rightarrow \boxed{a = \frac{4 - 0.35}{0.8 + 0.35}\, 9.81 = 8.23\ \text{m/s}^2}$

3.1 $\rightarrow \boxed{T = 0.35\,(9.81 + 8.23) = 6.31\ \text{N}}$

3.3 $\rightarrow \boxed{T' = (0.25 - 0.15)\,(9.81 + 8.23) = 1.8\ \text{N}}$