EXAMEN DE FISICA I (GTI) 31-1-2024

1) Explica que son el tiempo propio y la longitud propia. ¿Cuándo se utilizan estos conceptos? Pon un ejemplo sencillo de aplicación donde intervenga el tiempo propio, y otro donde intervenga la longitud propia. **(1)**

Nota: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(v^2/c^2\right)}}$

SOLUCION:
Para un observador, el tiempo es propio (T´), cuando transcurre entre dos sucesos que ocurren en la misma posición.
Para un observador, la longitud es propia (L´) cuando las posiciones inicial y final entre las cuales estamos calculando la longitud, permanecen en reposo. (Si es la longitud de un cuerpo, este está en reposo para el observador).

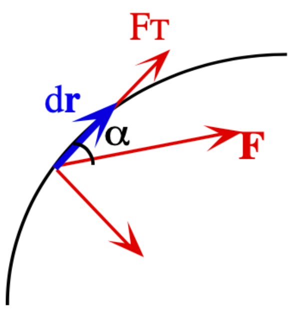
Estos conceptos se utilizan cuando el observador y/o los objetos se mueven a velocidades cercanas a la de la luz c, y por lo tanto las transformaciones de Galileo dejan de ser validas y hay que utilizar las transformaciones de Lorentz. En estos casos (v/c) se aproxima a 1 y el parámetro $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(v/c\right)^2\right)}}$ es mayor que 1: $\gamma > 1$

Ejemplo de Longitud propia: Si una nave espacial se mueve cerca de la Tierra a velocidades cercanas a la de la luz, la longitud de la nave vista desde la Tierra, L, es mucho menor que la longitud medida por un pasajero de la nave, L´ (longitud propia). Se produce un fenómeno conocido como contracción de longitudes. L< L´ (L= L´/γ).

Ejemplo de tiempo propio: En la misma nave, el tiempo transcurrido para un pasajero T´(tiempo propio) es mucho menor que el tiempo transcurrido en la Tierra, T , lo que se conoce como dilatación del tiempo, T >T´ (T= γ T´)..

2) Explica y deduce de forma sencilla la relación que existe entre la fuerza y la energía potencial. Pon un ejemplo simple en el que partiendo de la energía potencial encuentras la fuerza asociada. **(1)**

SOLUCION:



El diferencial de trabajo realizado por una fuerza **F** a lo largo de un d**r** es:

$$dW = \mathbf{F}d\mathbf{r} = |\mathbf{F}||d\mathbf{r}| \operatorname{sen}\alpha = |\mathbf{F}| \operatorname{sen}\alpha \; |d\mathbf{r}| = Ft \; ds$$

donde ds = |d**r**|

Además, si es una fuerza conservativa, el trabajo realizado es igual a la disminución de su energía potencial dW = - dEp

Igualando ambas expresiones: $\quad Ft\, ds = -\, dEp \;\Rightarrow\; Ft = -\dfrac{dEp}{ds}$

Si elegimos como dirección tangente la x: $Fx = -\dfrac{dEp}{dx}$

De igual forma, si elegimos la y o la z, $Fy = -\dfrac{dEp}{dy}$ o $Fz = -\dfrac{dEp}{dz}$

Por lo que podemos escribir $\boxed{\mathbf{F} = -\nabla Ep = -\left(\frac{\partial Ep}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial Ep}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial Ep}{\partial z}\,\mathbf{k}\right)}$

Un ejemplo sencillo es considerar la energía potencias gravitatoria en la superficie terrestre como $\boxed{Ep = mgz}$.

La fuerza asociada será: $\mathbf{F} = -(\nabla mgz) = -\left(\frac{\partial (mgz)}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial (mgz)}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial (mgz)}{\partial z}\,\mathbf{k}\right) = -(0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + mg\,\mathbf{k}) \Rightarrow$

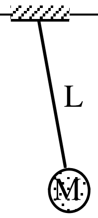
$$\boxed{\mathbf{F} = -mg\,\mathbf{k}}$$

---

3) Construimos un péndulo suspendiendo una masa M de un hilo de longitud L y masa despreciable.

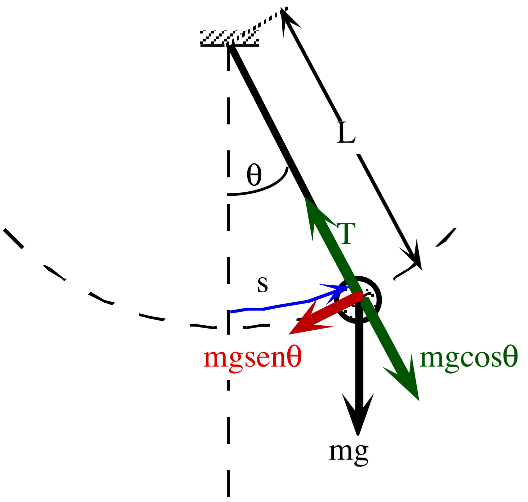
a) Demostrar el tipo de movimiento que realiza para pequeños ángulos. **(0.6)**

b) Encontrar su período. **(0.4)**



SOLUCION:

a) Al desplazar la masa de su posición de equilibrio, la componente tangencial del peso, origina una aceleración tangencial. Si aplicamos la 2º ley de Newton:



$$F_T = m\,a_T = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2 s}{dt^2} = mL\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow$$

$$-\,mg\,\mathrm{sen}\theta = mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

El signo (-) de la fuerza se introduce ya que cuando el ángulo θ es (+) la fuerza es (-): La fuerza se opone al aumento del ángulo.

Si $\theta < 10°$ $\mathrm{sen}\theta = \theta$ $\Rightarrow$ La ecuación anterior se transforma en:

$$-\,g\theta = L\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0}$$

Es una ecuación diferencial de 2º grado cuya solución es $\boxed{\theta = \theta_0 \cos\left(\sqrt{g/L}\;t + \alpha\right)}$

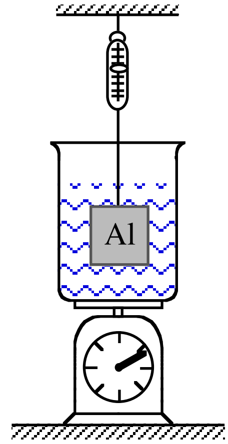
Por lo que realizara un movimiento periódico armónico simple de amplitud θ_0, fase inicial α y frecuencia angular $\omega = \sqrt{g/L}$

b) teniendo en cuenta la relación entre el período y la frecuencia angular $T = 2\pi/\omega$ $\Rightarrow$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{L/g}}$$

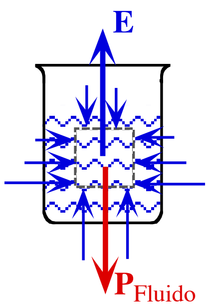
4) a) Enunciar y razonar el principio de Arquímedes. **(0.4)**

b) Tenemos un bloque de aluminio de 2 kg (densidad 2.7 g/cm^3) colgado de una balanza de muelle (ver figura). Sobre una balanza de platillo descansa un recipiente de 1.5 kg en cuyo interior hay 1kg de agua. ¿Cuales serán las lecturas de las balanzas de muelle y de platillo cuando se sumerja el bloque de aluminio en el agua como se indica en la figura? **(0.6)**

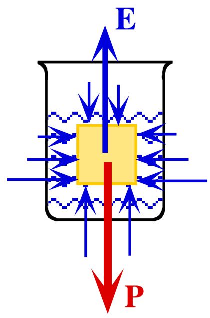


SOLUCION

a) El principio de Arquímedes dice que todo cuerpo sumergido en el seno de un fluido experimenta una fuerza ascensorial (empuje) igual al peso del volumen desalojado.



Una demostración sencilla es considerar un fluido en reposo en el que aislamos mentalmente un volumen de fluido igual al volumen del objeto. Ese volumen de fluido esta en reposo, y sin embargo tiene un peso que actúa sobre su centro de masas. Este volumen imaginario esta en equilibrio debido a las fuerzas de la presión que ejerce el resto del fluido sobre su superficie: la presión es mayor en la parte inferior originando una fuerza neta (el empuje) que se opone al peso.

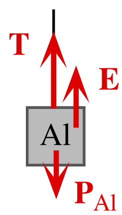


Si ahora sustituimos nuestro volumen imaginario por el objeto de igual forma, la presión en el fluido no cambia, por lo que las fuerzas que origina sobre la superficie del objeto son las mismas que en caso anterior y por lo tanto son iguales al peso del fluido desalojado, llevando sentido contrario.

b) Primero calculamos el empuje sobre el bloque de aluminio. Para calcularlo, hay que determinar el volumen del aluminio: $V_{al} = m_{al}/\rho_{al} = 2 / 2700 = 7.407\ 10^{-4}$ m^3

$$\boxed{E = V_{al}\ \rho_{ag}\ g = 7.4\ 10^{-4}\ 1000\ g = 0.74\ g\ \ N}$$

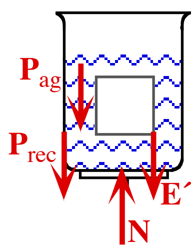
Sobre el bloque de aluminio actúan tres fuerzas, la tensión, el peso y el empuje. Como está en equilibrio se cumple:



$$T + E - P_{al} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = P_{al} - E\ = 2\ g - 0.74\ g = 1.26\ g\ N}$$

Lo que marca la balanza de muelle en kg es la T/g $\Rightarrow$ $\boxed{m_{muelle} = 1.26\ kg}$

Si el agua ejerce un empuje E sobre el aluminio, el aluminio ejerce una reacción E´ sobre el agua. Las fuerzas que actúan sobre al base del platillo son el peso del agua, el peso del recipiente, E´ y la normal N.



$$N - P_{ag} - P_{rec} - E' = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = P_{ag} + P_{rec} + E' = 1\ g + 1.5\ g + 0.74\ g = 3.24\ g\ N}$$

Lo que marca la balanza de platillo en kg es la N/g $\Rightarrow$ $\boxed{m_{platillo} = 3.24\ kg}$

Como comprobación, entre las dos balanzas tienen que soportar todo el peso (aluminio, recipiente y agua. Efectivamente, la masa total de los tres objetos es de 4.5 kg, y lo que marcan las balanzas es

$$3.24 + 1.26 = 4.5\ kg$$

PROBLEMAS

1) Un atleta lanza una bola a cierta distancia sobre el suelo plano con velocidad de 12.0 m/s, 51.0° sobre la horizontal. La bola golpea el suelo 2.08 s después. Ignore la resistencia del aire.

a) ¿Cuáles son las componentes de la velocidad de la bola al final de su trayectoria? **(0.4)**

b) ¿A qué distancia horizontal llegó la bola? **(0.2)**

c) ¿A qué altura sobre el suelo se lanzó la bola? **(0.4)**

d) ¿Cuál es el radio de curvatura de la trayectoria parabólica en el punto más alto? **(0.4)**

e) ¿Cuales son las componentes intrínsecas de la aceleración de la bola justo antes de impactar con el suelo? **(0.3+0.3)**

SOLUCION:

a) Si tomamos los ejes de coordenadas de forma que la velocidad inicial tenga componentes $v_{0,x}$ y $v_{0,y}$ positivas, con el origen en el suelo a los pies del atleta y ponemos a cero el cronómetro al lanzar la bola:

$$\left.\begin{aligned} v_x(t) &= v_{0,x} \\ v_y(t) &= v_{0,y} - gt \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} v_x(t_{suelo}) &= v_{0,x} = v_0\cos\theta = \boxed{7.55\,\mathrm{m/s}} \\ v_y(t_{suelo}) &= v_{0,y} - gt_{suelo} = v_0\mathrm{sen}\theta - gt_{suelo} = \boxed{-11.06\,\mathrm{m/s}} \end{aligned}\right.$$

b) Para la coordenada *x*: $x(t) = v_{0,x}t \quad \Rightarrow \quad x(t_{suelo}) = v_{0,x}t_{suelo} = \boxed{15.71\,\mathrm{m}}$

c) Para la coordenada *y*:

$$y(t) = h + v_{0,y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad y(t_{suelo}) = h + v_{0,y}t_{suelo} - \frac{1}{2}gt_{suelo}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{1}{2}gt_{suelo}^2 - v_{0,y}t_{suelo} = \boxed{1.80\,\mathrm{m}}$$

d) En el punto más alto la aceleración es perpendicular a la velocidad, con lo que sólo habrá componente normal de la aceleración y será la aceleración de la gravedad:

$$g = a_{normal} = \frac{v_{arriba}^2}{R_{curvatura}} = \frac{v_{0,x}^2}{R_{curvatura}} \quad \Rightarrow \quad R_{curvatura} = \frac{v_{0,x}^2}{g} = \boxed{5.82\,\mathrm{m}}$$

Observación: en el punto más alto **¡el radio de curvatura NO es la altura de la bola sobre el suelo!**

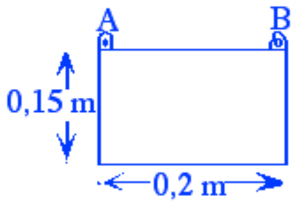
e) Al llegar al suelo sabemos perfectamente cual es la orientación de la velocidad, apartado a), y la orientación de la aceleración, la de la gravedad. Hallar las componentes intrínsecas de la aceleración de la bolita es simplemente proyectar su aceleración en las direcciones paralela y perpendicular a la velocidad:

$$a_{tangencial} = \vec{a}\cdot\hat{v} = \vec{a}\cdot\left(\frac{\vec{v}}{v}\right) = \boxed{8.09\,\mathrm{m/s^2}}$$

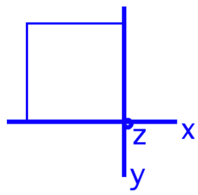
$$g = a = \sqrt{a_{tangencial}^2 + a_{normal}^2} \quad \Rightarrow \quad a_{normal} = \sqrt{g^2 - a_{tangencial}^2} = \boxed{5.53\,\mathrm{m/s^2}}$$

---

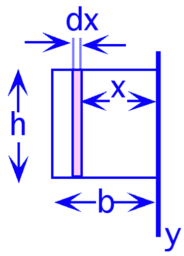
2) Una placa rectangular de 20 kg de masa está suspendida de los puntos A y B, como indica la figura.
a) Determinar el momento de inercia de la placa respecto un eje perpendicular a la misma que pasa por el punto B. Suponer que la placa es uniforme. **(0.5)**
Si se rompe el pasador A:
b) ¿Cuál será la aceleración angular de la placa en el instante inicial? **(0.5)**
c) ¿Cuál será la velocidad angular de la misma cuando pase por la posición de equilibrio? **(0.5)**
d) ¿Cuál será la fuerza que ejerce el eje que pasa por B sobre la placa en ese instante**? (0.5**)



SOLUCION:
a) En teoría se ha visto que cuando tenemos una lámina plana, el momento de inercia respecto a un eje perpendicular a la misma, I_Z, es la suma de los momentos de inercia de la lámina respecto a dos ejes contenidos en el plano de la misma, que sean perpendiculares entre si, I_X e I_Y, y que se corten en el punto por donde pasa el eje I_Z.



$$I_Z = I_X + I_Y$$



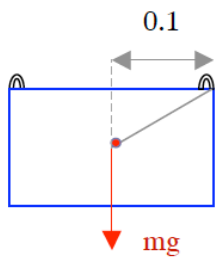
$$\boxed{I_Y = \int_0^b dm\, x^2 = \int_0^b \sigma\, ds\, x^2 = \int_0^b \sigma\, h dx\, x^2 = \sigma h\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b = \sigma h \frac{b^3}{3} = \frac{1}{3}\sigma h b\, b^2 = \frac{1}{3} m\, b^2}$$

Por analogía, el momento de inercia respecto al eje x, será: $\boxed{I_X = \frac{1}{3} m\, h^2}$

El momento de inercia respecto al eje z será:

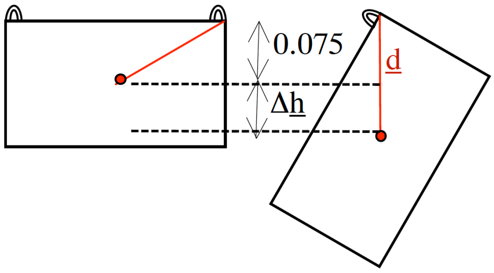
$$\boxed{I_Z = \frac{1}{3} m\, b^2 + \frac{1}{3} m\, h^2 = \frac{1}{3} m\, (b^2+h^2) = \frac{1}{3} 20\, (0.2^2+0.15^2) = 0.4167\ \mathrm{kg\ m^2}}$$

b) Para calcular la aceleración angular aplicamos $\sum \mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\alpha}$, todo respecto al punto B. La única fuerza que origina momento respecto del punto B es el peso aplicado en el centro de masas $\Rightarrow$ la ecuación anterior se transforma en



$$mg\ 0.1 = 0.4167\ \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 20 \bullet 9.81 \bullet 0.1 / 0.4167 = \boxed{47.09\ \mathrm{rad/s^2}}$$

c) Cuando la placa rota, el centro de masas, que al ser uniforme está situado en el centro, cambia su altura. La variación de altura entre la posición inicial y cuando el centro de masas está en la posición mas baja es:



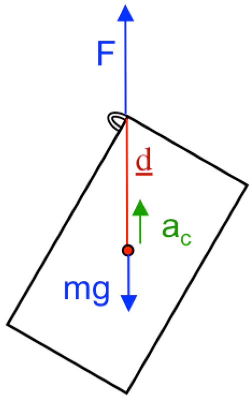
$$\Delta h = d - 0.075 = \sqrt{0.1^2 + 0.075^2} = 0.125 - 0.75 = 0.05 \text{ m}$$

La energía potencial gravitatoria se transforma en energía cinética de rotación:

$$mg\Delta h = 1/2\, I\, \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2mg\Delta h}{I}} = \sqrt{\frac{2 \bullet 20 \bullet 9.81 \bullet 0.05}{0.467}} = 6.86 \text{ rad/s}$$

d) El centro de masas está realizando un movimiento circular, de radio R = d, en torno al eje.

Aplicando $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_{cm}$ y teniendo en cuenta que tanto las fuerzas como la $\mathbf{a}_{cm}$ están en la dirección del eje vertical

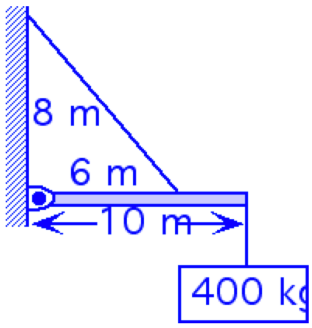


$$\Rightarrow \; F - mg = mv^2/R \; = \; m\omega^2 d$$

$$\Rightarrow \; F = m\,(g + \omega^2 d) \; = 20\,(9.81 + 6.86^2\, 0.125) = 313.8 \text{ N}$$

---

3) Un extremo de una viga uniforme de 100 kg y 10 m de longitud cuelga mediante una bisagra de una pared vertical. Se mantiene horizontalmente mediante un cable que sujeta la viga a una distancia de 6 m desde la pared, como muestra la figura. Del extremo libre de la viga se suspende un peso de 400 kg.



a) Representa todas las fuerzas que actúan sobre la viga (0.2).

b) ¿Qué tensión soporta el cable? (0.2).

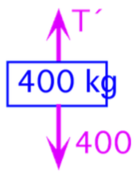
c) ¿Cuál es la fuerza que ejerce la viga sobre la bisagra? (0.8).

Si el cable lo dejamos sujeto a la pared 8 m por encima de la bisagra, pero permitimos que su longitud varíe de modo que pueda conectarse a la viga a diversas distancias x de la pared,

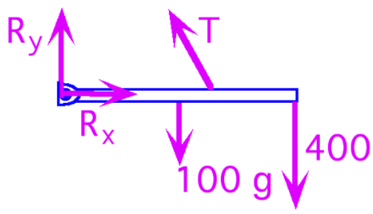
d) ¿a qué distancia de la pared debe sujetarse para que la fuerza sobre la bisagra no tenga componente vertical? (0.8).

SOLUCION:

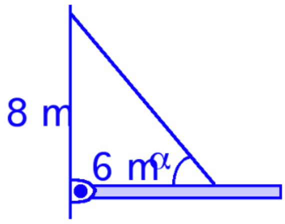
a) Como los 400 kg están en reposo, el cable que los sujeta soporta una fuerza de T´ = 400 g. Esta fuerza se propaga por el cable hasta la viga



Las fuerzas que actúan sobre la viga son:



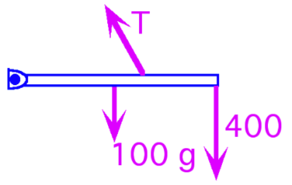
b) Como paso previo calculamos el ángulo α que forma el cable con la viga:



$$\text{sen}\ \alpha = \frac{8}{\sqrt{8^2+6^2}} = \frac{8}{100} = 0.8$$

$$\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{8^2+6^2}} = \frac{6}{100} = 0.6 \Rightarrow \alpha = 53.13°$$

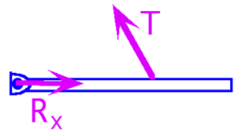
Para determinar las fuerzas, lo más sencillo es comenzar con $\sum M = 0$,
calculando los momentos respecto al gozne:



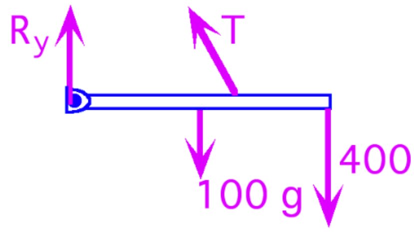
$$T\ 6\ \text{sen}\ \alpha - 100\ g\ 5 - 400\ g\ 10 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{T = \frac{4500\ g}{6\ \text{sen}\alpha} = \frac{4500\ 9.81}{6\ \ 0.8} = 9196.9\ \text{N}}$$

c) Primero determinamos las fuerzas que ejerce la bisagra sobre la viga



$$\sum Fx = 0 \ \Rightarrow \ Rx - T\cos\alpha = 0 \ \Rightarrow \ \boxed{Rx = T\cos\alpha = 9196.9\ \ 0.6 = 5518\ \text{N}}$$

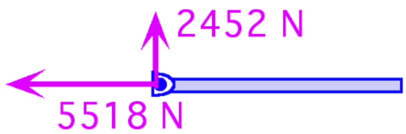


$$\sum Fy = 0 \ \Rightarrow \ Ry + T\text{sen}\ \alpha - 100\ g - 400\ g = 0 \ \Rightarrow$$

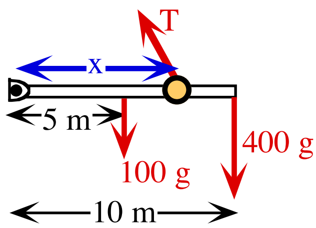
$$\boxed{Ry = 500\ \ 9.81 - 9196.9\ \ 0.8 = -2452.5\ \text{N}}$$

El que salga negativo significa que el sentido es el contrario al representado en la figura, es decir, va dirigida hacia abajo.

Las fuerzas que ejerce la viga sobre la bisagra
son las opuestas (-Rx, -Ry), es decir:



d) Al variar x se modifican el valor de T y el ángulo que forma T con la viga. Si Ry = 0 la forma más directa de calcular x es la de suponer que $\sum M = 0$, calculando los momentos respecto al punto en que la cuerda engancha a la viga. Las únicas fuerzas que originan momentos diferentes de 0 son la tensión del cuerpo colgado y el peso de la viga:



$$400\ g\ (10 - x)\ - 100\ g\ (x - 5) = 0 \ \Rightarrow$$

$$4000 - 400\ x - 100\ x + 500 = 0 \Rightarrow \quad 500x = 4500 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 9\ \text{m}}$$