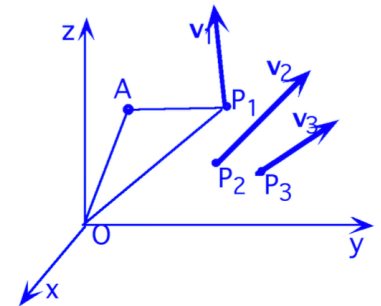


1) Demostrar que un sistema de fuerzas cuya resultante es nula ($\sum \mathbf{F} = 0$), el momento de fuerzas resultante ($\sum \mathbf{M}_p$) es independiente del punto respecto al cual se calcula (1).

SOLUCION:

Vamos a calcular el momento resultante respecto a un punto cualquiera A y lo relacionaremos con el obtenido respecto al origen.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \sum \mathbf{AP}_i \wedge \mathbf{V}_i = \sum (\mathbf{AO} + \mathbf{OP}_i) \wedge \mathbf{V}_i = \sum (-\mathbf{OA} + \mathbf{OP}_i) \wedge \mathbf{V}_i = \\ &= \sum (-\mathbf{OA} \wedge \mathbf{V}_i) + \sum (\mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{V}_i) = -\mathbf{OA} \wedge \sum (\mathbf{V}_i) + \sum (\mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{V}_i) = \\ &= -\mathbf{OA} \wedge \mathbf{R} + \sum (\mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{V}_i) = -\mathbf{OA} \wedge \mathbf{R} + \mathbf{M}_O \end{aligned}$$



Es lo que se denomina campo de momentos.

Si la resultante es nula ($\mathbf{R} = 0$) $\Rightarrow \mathbf{M}_A = \mathbf{M}_O$ lo que significa que el momento resultante es igual cuando lo calculamos respecto al origen o respecto aun punto cualquiera A, y por lo tanto es independiente del punto respecto al cual se calcula.

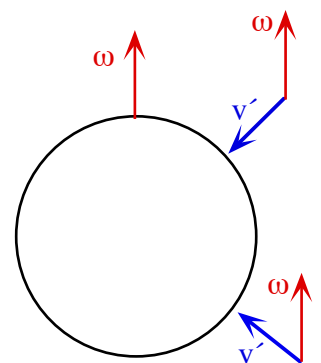
2) Recordando que la relación entre la aceleración de la gravedad observada desde la Tierra ($\vec{g}$) y la que ve un observador inercial ($\vec{g}_0$) es: $\vec{g} = \vec{g}_0 - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

- a) Explica los efectos observados desde la Tierra cuando un objeto cae verticalmente por la acción de la gravedad (0.4).
 - b) ¿Son iguales dichos efectos en el hemisferio norte y en el sur? (0.3).
 - c) ¿En qué partes de la Tierra son máximos y mínimos dichos efectos? (0.3).
- Haga dibujos que le ayuden a explicar los apartados anteriores y razone todas las respuestas.

SOLUCION:

a) En esta cuestión solamente consideraremos los efectos asociados a $\mathbf{v}'$, que dan lugar a la aceleración de Coriolis, y no describiremos los asociados a la posición " $\mathbf{r}$ " que dan lugar a la aceleración centrífuga.

Si la figura representa un corte de la Tierra, el producto vectorial de $(\vec{\omega} \times \vec{v}')$, es un vector perpendicular al papel que sale hacia nosotros. Como la aceleración de Coriolis lleva un signo menos, el vector entrara hacia el papel, es decir, va dirigido hacia el Este.



b) Esto sucede tanto en el Hemisferio Norte como en el Sur, es decir los efectos son iguales.

c) Como ω es constante, para un mismo valor de $\mathbf{v}'$, la aceleración de Coriolis será máxima cuando ω y $\mathbf{v}'$ formen 90 grados, es decir en el ecuador y mínima cuando formen 0 o 180 grados, es decir en los Polos.

- 3) MUELLE VERTICAL:** Colgamos un muelle de longitud inicial L_0 y masa despreciable de un techo.
 Si en la parte inferior del muelle situamos una masa M de modo que el conjunto queda en reposo.
a) ¿Cuánto se estira el muelle? (0.2)
 Si desplazamos la masa una distancia b de esta nueva posición de equilibrio y soltamos
b) Explica el tipo de movimiento que realiza (0.2).
c) Encuentra la ecuación del movimiento (0.6).

SOLUCION:

- a)** El muelle estará en equilibrio estático para una posición y_0 que cumpla:

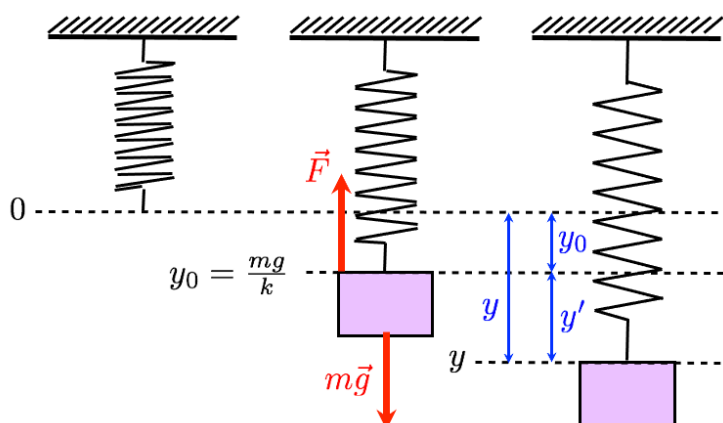
$$mg - ky_0 = 0 \quad (3.1)$$

$$y_0 = \frac{mg}{k}$$

- b)** La masa realizará un movimiento armónico simple (MAS) entorno a la nueva posición de equilibrio, por lo que la amplitud será b . Además, la frecuencia angular es como la de una masa unida a un muelle

horizontal: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- c)** Para encontrar la ecuación del movimiento aplicamos la segunda ley de Newton cuando la masa está oscilando en una posición cualquiera $y = y_0 + y'$



$$mg - k y = m a \Rightarrow mg - k (y_0 + y') = m a \Rightarrow mg - k y_0 - k y' = m a$$

Teniendo en cuenta la ecuación (3.1)

$$-k y' = m \frac{d^2 y}{dt^2} = m \frac{d^2 (y_0 + y')}{dt^2} = m \frac{d^2 y'}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 y'}{dt^2} + \frac{k}{m} y' = 0$$

Nos queda una ecuación diferencial de 2º orden cuya solución es $y' = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \alpha \right)$

El efecto de la gravedad es desplazar la posición de equilibrio. El muelle realizará un MAS entorno a esta nueva posición de equilibrio (y_0) con el mismo T que el de un muelle horizontal. En este caso, si respecto a esta posición hemos estirado el muelle una longitud b , la amplitud será $A = b$ y por lo tanto:

$$y' = b \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \alpha \right)$$



4) Explicar los distintos tipos de choque según el valor del coeficiente de restitución ($e = -\frac{v'_B - v'_A}{v_B - v_A}$) resaltando que magnitudes físicas permanecen constantes en cada caso (0.4). Si deseas calcular el coeficiente de restitución entre una pelota de tenis y el suelo, y solo dispones de una regla, explica como podrías hacerlo. Encuentra la ecuación que relaciona e con las magnitudes que tu puedes medir (0.6)

SOLUCION:

El coeficiente de restitución tiene valores comprendidos entre 0 y 1. Cualquiera que sea el valor de e , siempre se conserva el momento lineal, por lo que el valor de e solo afecta a la energía.

Si $e = 1$ el choque es elástico y se conserva la energía mecánica. Las diferencias de velocidades entre los dos cuerpos antes y después del choque son las mismas.

Si $e < 1$ el choque es inelástico, hay pérdida de energía y las velocidades relativas entre las partículas después del choque es menor que antes del choque.

Si $e = 0$, el choque es el más inelástico posible, es cuando más energía mecánica se pierde y las partículas quedan “pegadas” después del choque, llevando la misma velocidad.

Suponiendo que tenemos un choque central directo y llamando V_p a la velocidad de la pelota y V_s a la velocidad del suelo:

$$e = -\frac{v'_p - v'_s}{v_p - v_s}$$

Teniendo en cuenta que el suelo tiene masa infinita, y las velocidades antes y después del choque valen 0:

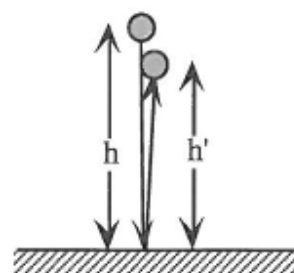
$V_s = V'_s = 0$, por lo tanto:

$$e = -\frac{v'_p}{v_p}$$

Ahora tenemos que relacionar V y V' con longitudes que pueda medir la regla.

Si soltamos una pelota desde una altura h con una velocidad inicial 0, la velocidad con la que llega al suelo la podemos calcular con ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2 a e \Rightarrow v_p^2 - 0 = 2 g h \Rightarrow v_p = \sqrt{2 g h}$$



Si la pelota sale inmediatamente después del choque, con una velocidad v'_p , la

altura hasta la que sube (h') estará relacionada con esta velocidad por la ecuación: $v'_p = \sqrt{2 g h'}$ y

tendrá el signo contrario a v_p por lo que:

$$e = -\frac{v'_p}{v_p} = -\frac{-\sqrt{2 g h'}}{\sqrt{2 g h}} = \sqrt{\frac{h'}{h}}$$



PROBLEMAS

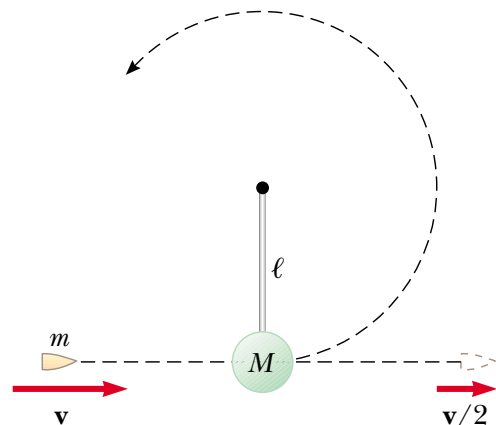
1) Una bala de masa m y rapidez v atraviesa completamente el disco de un péndulo de masa M . La bala emerge con una rapidez $v/2$. El disco del péndulo está suspendido por una cuerda de longitud l y masa despreciable.

a) ¿Cuál es la rapidez del disco justo después de que haya salido la bala? (0.2).

b) ¿Cuál es el valor mínimo de v para que el disco del péndulo pueda dar una vuelta vertical completa? (0.5).

c) ¿En qué momento la tensión de la cuerda es máxima y cuánto vale dicha tensión? (para la v mínima calculada en el apartado anterior) (0.4).

d) ¿la respuesta al apartado b) sería la misma si en vez de una cuerda en el péndulo tuviésemos una varilla caso de ser diferente, determinar el valor de la v mínima (0.5).



En los apartados anteriores dejar todo en función de m , M , v y l .

e) Si tomamos $m = 10$ gramos, $M = 0.25$ Kg, $l = 20$ cm y para el apartado a) $v = 200$ m/s, determinar numéricamente el valor de las magnitudes que se piden en las apartados a), b), c) y d) (0.4).

SOLUCION:

a) Aplicando la conservación del momento lineal (las velocidades son las componentes a lo largo de la dirección de choque):

$$mv = m\frac{v}{2} + MV_{abaja} \Rightarrow V_{abaja} = \left(\frac{m}{2M}\right)v$$

b) La velocidad crítica para el péndulo en la parte superior es aquella para la cual la fuerza normal en dicho punto (tensión) se anula. La única fuerza que actúa sobre el cuerpo es su peso que está dirigido

hacia el centro del movimiento circular: $Mg = Ma_n = M \frac{V_{arriba, mínima}^2}{R} \Rightarrow V_{arriba, mínima} = \sqrt{gl}$

Aplicando la conservación de la energía al péndulo entre la parte superior e inferior, podemos calcular la velocidad mínima del péndulo en la parte inferior:

$$\frac{1}{2}MV_{arriba, min}^2 + Mgh_{arriba} = \frac{1}{2}MV_{abaj, min}^2 + Mgh_{abaj} \Rightarrow V_{abaj, min} = \sqrt{V_{arriba, min}^2 + 2g(h_{arriba} - h_{abaj})} = \sqrt{5gl}$$

Utilizando ahora el resultado del apartado a) podemos calcular cual debería ser la velocidad mínima de la bala:

$$v_{mínima} = \left(\frac{2M}{m}\right)V_{abaj, mínima} = \left(\frac{2M}{m}\right)\sqrt{5gl}$$

c) Aplicando la 2ª ley de Newton al péndulo tenemos que: $\vec{T} + M\vec{g} = M\vec{a} \Rightarrow \vec{T} = M(\vec{a} - \vec{g})$

luego la tensión será mayor en situaciones en que la magnitud de la aceleración sea mayor y sea de sentido opuesto al peso. Ambas cosas ocurren en la parte inferior del movimiento del péndulo:

$$\vec{T}_{máxima} = M(\vec{a}_{abajo} - \vec{g}) \Rightarrow T_{máxima} = M\left[\frac{V_{abajo}^2}{l} + g\right] = M\left[\left(\frac{m}{2M}\right)^2 \frac{v^2}{l} + g\right]$$



y en el caso de mínima velocidad de la bala para que el péndulo de la vuelta dicha tensión máxima valdría: $T_{\text{máxima, caso crítico}} = 6Mg$

También podríamos llegar a este resultado substituyendo directamente en la V_{abajo} el valor de la $V_{\text{abajo, mínima}}$ de $\sqrt{5gl}$:

$$T_{\text{máxima, caso crítico}} = M \left[\frac{V_{\text{abajo}}^2}{l} + g \right] = M \left[\frac{5gl}{l} + g \right] = 6Mg$$

d) No sería lo mismo, ya que al contrario que la cuerda que sólo puede ejercer una tensión hacia el centro del movimiento, la varilla puede tirar del péndulo hacia el centro como una tensión, o empujar hacia fuera (es rígida) → la fuerza neta sobre el péndulo en la parte superior puede ser todo lo pequeña que queramos y por lo tanto su aceleración normal y su velocidad también, no hay por lo tanto una velocidad crítica. La velocidad mínima en la parte superior para dar la vuelta es nula, y repitiendo los cálculos del apartado b) tenemos que:

$$Mgh_{\text{arriba}} = \frac{1}{2} M V_{\text{abajo, mínima}}^2 + Mgh_{\text{abajo}} \Rightarrow V_{\text{abajo, mínima}} = \sqrt{2g(h_{\text{arriba}} - h_{\text{abajo}})} = \sqrt{4gl}$$

Y la velocidad mínima de la bala: $v_{\text{mínima}} = \left(\frac{2M}{m} \right) V_{\text{abajo, mínima}} = \left(\frac{2M}{m} \right) \sqrt{4gl}$

e) $V_{\text{abajo}} = \left(\frac{m}{2M} \right) v = \left(\frac{0.01}{2 \cdot 0.25} \right) 200 = 4 \text{ m/s}$

$$V_{\text{mínima}} = \left(\frac{2M}{m} \right) \sqrt{5gl} = \left(\frac{2 \cdot 0.25}{0.01} \right) \sqrt{5 \cdot 9.81 \cdot 0.2} = 156.6 \text{ m/s}$$

$$T_{\text{máxima, caso crítico}} = 6Mg = 6 \cdot 0.25 \cdot 9.81 = 14.715 \text{ N}$$

$$V_{\text{mínima}} = \left(\frac{2M}{m} \right) \sqrt{4gl} = \left(\frac{2 \cdot 0.25}{0.01} \right) \sqrt{4 \cdot 9.81 \cdot 0.2} = 140.07 \text{ m/s}$$

2) Una placa rectangular de 20 kg de masa está suspendida de los puntos A y B, como indica la figura.

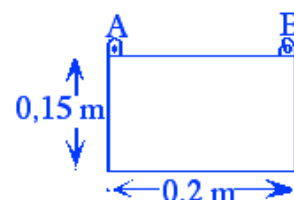
a) Determinar el momento de inercia de la placa respecto un eje perpendicular a la misma que pasa por el punto B. Suponer que la placa es uniforme (0.5).

Si se rompe el pasador A:

b) ¿Cuál será la aceleración angular de la placa en el instante inicial?(0.5).

c) ¿Cuál será la velocidad angular de la misma cuando pase por la posición de equilibrio?(0.5).

d) ¿Cuál será la fuerza que ejerce el eje que pasa por B sobre la placa en ese instante?(0.5).

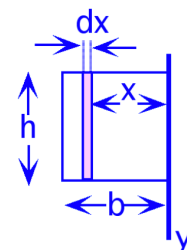
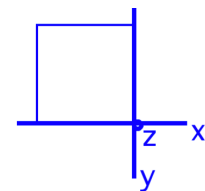


SOLUCION:

a) En teoría se ha visto que cuando tenemos una lámina plana, el momento de inercia respecto a un eje perpendicular a la misma, I_z , es la suma de los momentos de inercia de la lámina respecto a dos ejes contenidos en el plano de la misma, que sean perpendiculares entre si, I_x e I_y , y que se corten en el punto por donde pasa el eje I_z .

$$I_z = I_x + I_y$$

$$I_y = \int_0^b dm x^2 = \int_0^b \sigma ds x^2 = \int_0^b \sigma h dx x^2 = \sigma h \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^b = \sigma h \frac{b^3}{3} = \frac{1}{3} \sigma h b^2 = \frac{1}{3} m b^2$$



Por analogía, el momento de inercia respecto al eje x, será: $I_x = \frac{1}{3} m h^2$

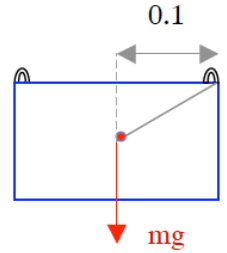
El momento de inercia respecto al eje z será:



$$I_z = \frac{1}{3} m b^2 + \frac{1}{3} m h^2 = \frac{1}{3} m (b^2 + h^2) = \frac{1}{3} 20 (0.2^2 + 0.15^2) = 0.4167 \text{ kg m}^2$$

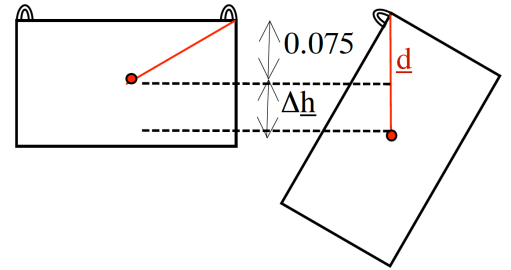
b) Para calcular la aceleración angular aplicamos $\Sigma \mathbf{M} = I \alpha$, todo respecto al punto B. La única fuerza que origina momento respecto del punto B es el peso aplicado en el centro de masas $\Rightarrow$ la ecuación anterior se transforma en

$$mg \cdot 0.1 = 0.4167 \alpha \Rightarrow \alpha = 20 \cdot 9.81 \cdot 0.1 / 0.4167 = 47.09 \text{ rad/s}^2$$



c) Cuando la placa rota, el centro de masas, que al ser uniforme está situado en el centro, cambia su altura. La variación de altura entre la posición inicial y cuando el centro de masas está en la posición mas baja es:

$$\Delta h = d - 0.075 = \sqrt{0.1^2 + 0.075^2} - 0.075 = 0.125 - 0.075 = 0.05 \text{ m}$$



La energía potencial gravitatoria se transforma en energía cinética de rotación:

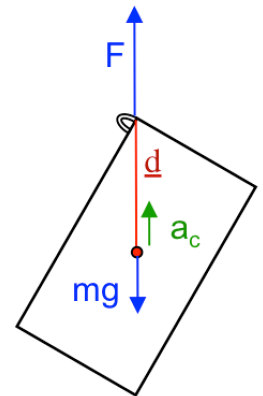
$$mg\Delta h = \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2mg\Delta h}{I}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 9.81 \cdot 0.05}{0.467}} = 6.86 \text{ rad/s}$$

d) El centro de masas esta realizando un movimiento circular, de radio $R = d$, en torno al eje.

Aplicando $\Sigma \mathbf{F} = m \mathbf{a}_{cm}$ y teniendo en cuenta que tanto las fuerzas como la $\mathbf{a}_{cm}$ están en la dirección del eje vertical

$$\Rightarrow F - mg = mv^2/R = m\omega^2 d$$

$$\Rightarrow F = m(g + \omega^2 d) = 20(9.81 + 6.86^2 \cdot 0.125) = 313.8 \text{ N}$$



3) La figura representa la sección transversal de una presa cuya longitud perpendicular al diagrama es de 30 m. la profundidad del agua situada detrás de la presa es de 10 m, el material con el que se ha construido la presa tiene una densidad $\rho = 3000 \text{ kg / m}^3$. Determinar:

a) La presión absoluta en el fondo del embalse (0.2).

b) La fuerza ejercida sobre el cristal de un reloj sumergible de 3 cm de diámetro si en su interior hay aire a presión atmosférica y el reloj se encuentra en el fondo del embalse (0.3).

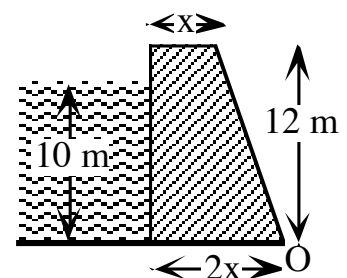
c) Determinar la fuerza resultante que ejerce el agua sobre la presa y el punto de aplicación de dicha fuerza (0.7).

d) Hallar el valor de x si el peso de la presa es 10 veces mayor que la fuerza horizontal ejercida por el agua sobre ella (0.2).

e) Calcular A que distancia del punto O en la dirección horizontal se encuentra el centro de masas de la presa?; tened en cuenta que la distancia es la misma que la de la placa rayada de la figura (0.3).

Nota: el centro de masas de una placa triangular se encuentra a $1/3$ de la base y a $2/3$ del vértice opuesto, cualquiera que sea el lado elegido como base.

f) ¿Puede volcar la presa alrededor del borde que pasa por O? (0.3).



SOLUCION:

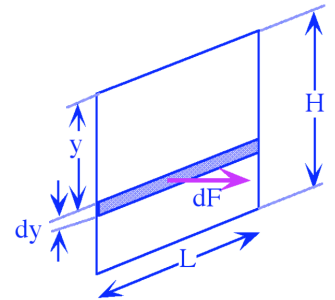
a) La presión absoluta es la suma de la presión atmosférica (P_{atm}) mas la debida al agua:

$$P = P_{atm} + \rho g H = 1.013 \cdot 10^5 + 10^3 \cdot 9.81 \cdot 10 = 1.013 \cdot 10^5 + 0.981 \cdot 10^5 \Rightarrow \boxed{P = 1.944 \cdot 10^5 \text{ Pascales}}$$

b) Como el reloj en su interior esta a P_{atm} , la fuerza neta que actúa sobre el cristal es la debida a la presión del agua: $F = (P_{ext} - P_{int}) \text{ Area} = \rho g H \text{ Area} = 10^3 \cdot 9.81 \cdot 10 \cdot \pi (0.015)^2 \Rightarrow \boxed{F = 69.34 \text{ N}}$

c) Como P_{atm} actúa en ambos lados de la presa, la fuerza absoluta sobre la misma será únicamente debida a la presión ejercida por el agua, que a una profundidad y es $P = \rho g y$. Si consideramos una franja de la presa de altura dy y longitud L , toda ella situada a una profundidad y , la fuerza que actúa sobre la misma será:

$$dF = P ds = PL dy = \rho g y L dy$$



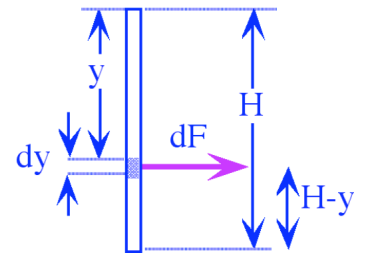
Para calcular la fuerza total sobre la presa debemos integrar dF entre la superficie del agua y el extremo inferior de la presa:

$$\boxed{F = \int_0^H \rho g y L dy = \rho g L \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^H = \frac{(1/2) \rho g L H^2} \Rightarrow \boxed{F = (1/2) 10^3 \cdot 9.81 \cdot 30 \cdot 10^2 = 14.715 \cdot 10^6 \text{ N}}$$

El punto de aplicación de la fuerza F sobre la presa será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos)

El momento respecto a un punto del fondo de un dF actuando sobre una franja a una profundidad y será:

$$dM = dF(H-y) = \rho g y L dy (H-y)$$



donde hemos tomado el valor de dF calculado en el apartado anterior. Para calcular el momento total, integramos entre el borde superior e inferior de la presa:

$$M = \int_0^H \rho g y L (H-y) dy = \rho g L \int_0^H (Hy - y^2) dy = \rho g L \left(H \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^H - \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^H \right) = \rho g L \left(\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3} \right)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{M = (1/6) \rho g L H^3}$$



Si el punto de aplicación está a una altura d respecto a la parte inferior de la presa, tiene que verificarse que

$$Fd = M \Rightarrow d = \frac{M}{F} = \frac{(1/6) \rho g L H^3}{(1/2) \rho g L H^2} \Rightarrow d = (1/3) H = 3.3333 \text{ m}$$

Nota: en los apartados anteriores H es la altura del agua; la de la presa la llamaremos h .

d) El peso de la presa es mg , con la masa igual al volumen por la densidad ($m = V\rho$), el volumen la sección por la longitud ($V = S L$) y la Sección la de un rectángulo + la de un triángulo:

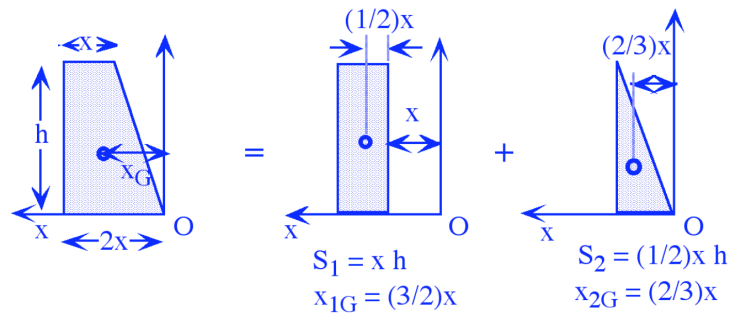
$$S = xh + (1/2) xh = (3/2) xh.$$

Sustituyendo todos estos valores: $m = (3/2) xhL\rho$, y planteando la igualdad $mg = 10F \Rightarrow$

$$(3/2) xh L\rho g = 10 F \Rightarrow x = 10 F / [(3/2) h L \rho g] = 10 \cdot 14.715 \cdot 10^6 / [(3/2) \cdot 12 \cdot 30 \cdot 3000 \cdot 9.81] \Rightarrow$$

$$x = 9.259 \text{ m}$$

e) El procedimiento más sencillo consiste en dividir la presa en dos partes, una de sección rectangular y otra de sección triangular, cuyas componentes x de los centros de masas son conocidas: (podemos utilizar las secciones o las masas totales)



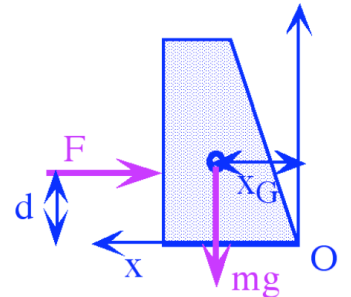
$$x_G = \frac{\sum m_i x_{Gi}}{\sum m_i} = \frac{(3/2) x xh L\rho + (2/3) x (1/2) xhL\rho}{xh L\rho + (1/2) xhL\rho} = \frac{(3/2 + 1/3)x}{3/2} = \frac{11/6 x}{3/2} = (11/9)x \Rightarrow$$

$$x_G = 11.317 \text{ m}$$

f) Si la presa está a punto de volcar respecto al borde que pasa por O , la única fuerza que ejercería el suelo sobre la presa actuaría en O , por lo que esta fuerza no originaría momento respecto dicho punto.

Las únicas fuerzas que producen momento respecto O serían la que ejerce el agua sobre la presa y la del peso de la presa aplicada en el punto X_G .

En la figura se representan las dos fuerzas que originan momento sobre la presa. La del agua origina un momento respecto a O que trata de volcarla (momento -), mientras que el momento del peso, la estabiliza (momento +). Si la suma de los momentos es positiva, la presa estará estable.



$$\sum M = mg x_G - F d = 10F \cdot 11.317 - F \cdot 3.333 = 109.8 F \Rightarrow M \geq 0 \Rightarrow \text{la presa estará estable}$$

