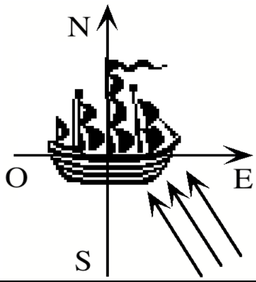
EXAMEN DE FISICA I (GTI) 1-2-2023

---

1) Un barco navega siguiendo el ecuador hacia el Este con una velocidad de 30 km/h. Desde el Sudeste hacia el ecuador sopla un viento con una velocidad de 15 km/h formando un ángulo de 60˚ con el ecuador.

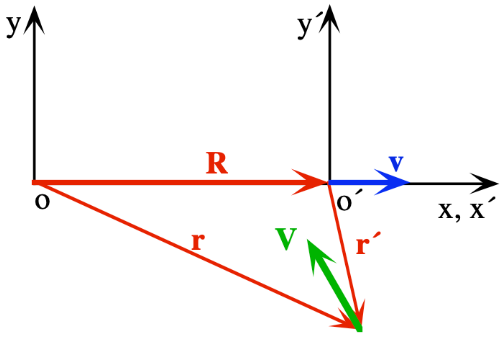
a) Hallar la velocidad del viento respecto al barco. **(0.6)**

b) Calcular el ángulo entre el ecuador y la dirección del viento en el sistema de referencia ligado al barco. **(0.4)**



SOLUCION:

a) Supongamos que tenemos un sistemas de referencia fijo (OXY) y otro situado en el barco (O´X´Y´) de forma que ambos tengan los ejes paralelos. Si el eje x es paralelo al ecuador, el sistema O´X´Y´ se moverá con una velocidad $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$.



Tal como vimos en teoría, la posición de una partícula respecto al sistema O viene descrita por un vector de posición **r**, mientras que respecto al sistema O´ el vector de posición será **r´**.

La relación entre los vectores de posición en ambos sistemas es $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$

Derivando obteníamos la relación vectorial entre las velocidades:

$$\mathbf{V} = d\mathbf{r}/dt = d\mathbf{R}/dt + d\mathbf{r}'/dt = \boxed{\mathbf{v} + \mathbf{V}'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{V}' = \mathbf{V} - \mathbf{v}} \qquad (2.1)$$

Con
$$\begin{cases} \mathbf{v} = 30\,\mathbf{i} \ \text{km/h} \\ \mathbf{V} = (-15\cos 60\,\mathbf{i} + 15\,\mathrm{sen}\,60\,\mathbf{j}) \ \text{km/h} \end{cases}$$

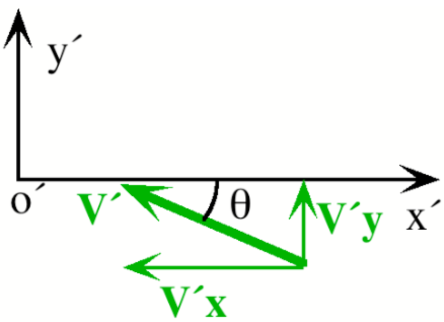
Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.1)

$$\boxed{\mathbf{V}'} = (-15\cos 60\,\mathbf{i} + 15\,\mathrm{sen}\,60\,\mathbf{j}) - 30\,\mathbf{i} = \boxed{(-37.5\,\mathbf{i} + 12.99\,\mathbf{j})\ \text{km/h.}} \quad \Rightarrow$$

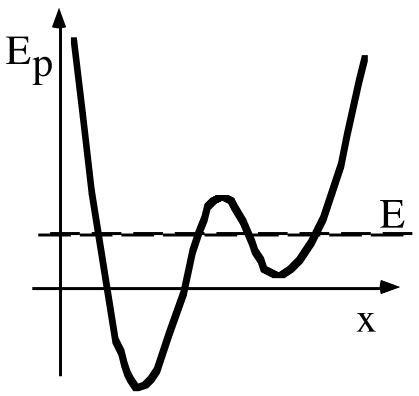
$$\boxed{|\mathbf{V}'| = 39.68 \text{ km/h}}$$

b) Si el ángulo que forma la dirección del viento con el ecuador es θ, su tangente vale:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{V'y}{|V'x|} = \frac{12.99}{37.7} = 0.3464 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 19.1°}$$



2) Tenemos una partícula realizando un movimiento unidimensional a lo largo del eje X y sometida a fuerzas conservativas cuya energía potencial viene representada en la gráfica.



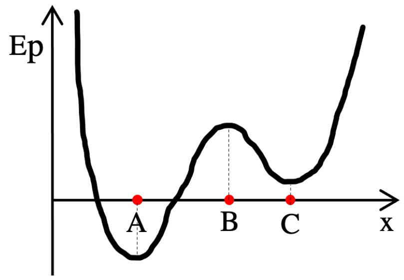
a) ¿En qué puntos del eje X la partícula se encontrará en equilibrio? Discutir de que tipo de equilibrio se trata. **(0.4)**

b) Indicar el sentido de la fuerza que actúa sobre la partícula en cualquier punto del eje X. **(0.2)**

c) Si la partícula tuviese una energía total E (ver gráfica) ¿qué tipo de movimiento realizaría la partícula? (indicar todo lo que se sepa sobre el movimiento) **(0.4)**

SOLUCION:

a) Los puntos de equilibrio se corresponden con máximos y mínimos en la energía potencial, por lo tanto, los puntos de equilibrio son los A, B y C.
Los de equilibrio estable se corresponden con mínimos en la energía, el A y el C ya que cuando la partícula se aleja de esos puntos la fuerza tiende a llevarlos hacia la posición de equilibrio.
Los de equilibrio inestable se corresponden a máximos de la energía potencial, el B, ya que la fuerza trata de alejarlos de ese punto.



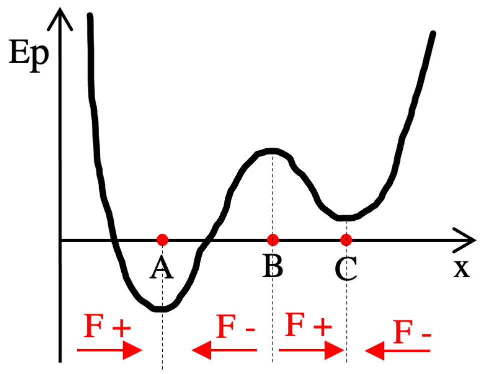
b) Como la fuerza es igual a menos el gradiente de la Ep (**F** = -∇Ep), cuando la Ep disminuye, la fuerza es positiva, y cuando la Ep aumenta la fuerza es negativa. Asi:

Entre el origen y el punto A $(0<x<x_A) \Rightarrow$ F +

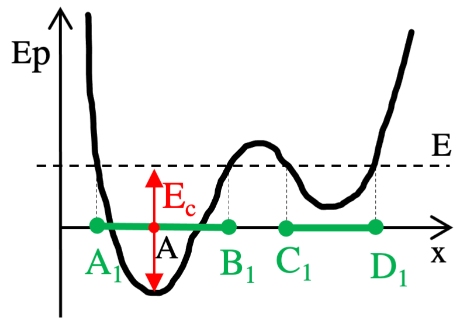
Entre el punto A y el B $(x_A<x<x_B) \Rightarrow$ F -

Entre el punto B y el C $(x_B<x<x_C) \Rightarrow$ F +

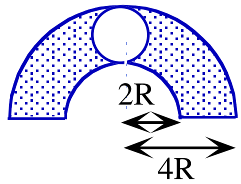
A partir del punto C $(x>x_C) \Rightarrow$ F -



c) móvil solo se puede mover entre A1 y B1 o entre C1 y D1. No tiene energía suficiente para pasar de una región a otra. La partícula está atrapada en un pozo de potencial.
Dentro de cada una de las regiones (o pozos de potencial), el movimiento sería periódico: Por ejemplo, si está en el primer pozo, en los puntos A1 y B1, la Ec es 0 y el móvil estará en reposo. La diferencia de alturas entre la energía total (E) y la Ep es la Ec, que será máxima en el punto A.
Si dejásemos libre el móvil en A1, este partiría del reposo hacia B1 acelerando. Al llegar a A alcanzaría la máxima velocidad, en dicho punto la aceleración es 0. Una vez superado A comienza a decelerar, llegando a B1 con velocidad 0. Aquí comienza a moverse de vuelta hacia A1. El móvil estaría moviéndose indefinidamente entre A1 y B1 de forma periódica. Lo mismo podríamos decir si se encontrase en el segundo pozo de potencial.



3) Calcular la posición del centro de masas de la placa homogénea de la figura. **(1)**



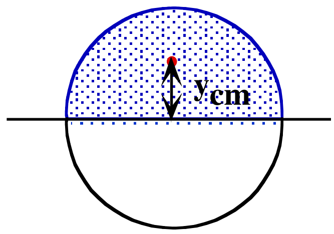
SOLUCION

La placa se puede suponer como una placa semicircular de radio 4R a la que le hemos restado una placa semicircular concéntrica de radio 2R y una placa circular de radio R.

Por simetría, el centro de masas de la placa circular está en el centro.

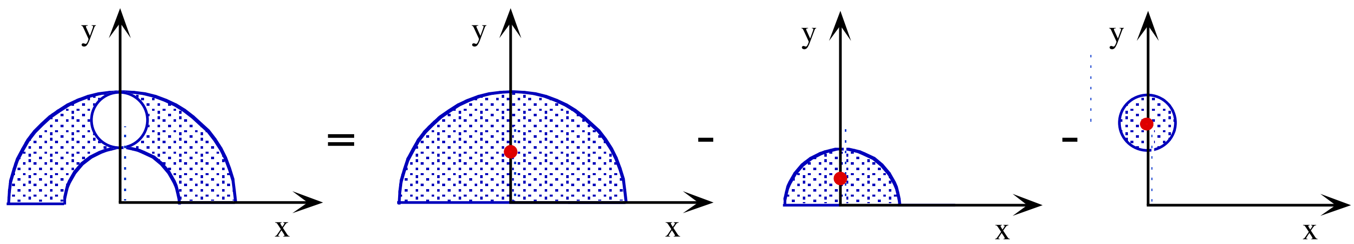
El centro de masas de una placa semicircular de radio R podemos determinarlo por el teorema de Pappus Guldin, que para un cuerpo de revolución dice que el volumen de un cuerpo de revolución (V) es igual al área generatriz (A) multiplicada por la distancia recorrida por el centro de masas del área cuando se engendra el volumen: $V = 2\pi\, y_{CM}\, A$

Aplicándolo a una placa semicircular de radio R:,



$$A = 1/2\ (\pi R^2) \quad y \quad V = 4/3\ \pi R^3 \;\Rightarrow\; \boxed{y_G = \frac{V}{2\pi A} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi \frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}}$$

Ahora descomponemos la placa en la suma de tres placas, y como son homogéneas, en lugar de utilizar masas, utilizamos áreas:



$A_1 = (1/2)\ \pi(4R)^2 = 8\ \pi R^2$	$A_2 = (1/2)\ \pi(2\ R)^2 = 2\ \pi\ R^2$	$A_3 = \pi\ R^2$
$X_{cm1} = 0$	$X_{cm2} = 0$	$X_{cm3} = 0$
$Y_{cm1} = 4\ (4R)/3\pi = 16R/3\pi$	$y_{cm2}n = 4\ (2R)/3\pi = 8R/3\pi$	$y_{cm3} = 3R$

$$\boxed{x_{cm} = \frac{\sum A_i\, x_{cmi}}{\sum A_i} = \frac{8\pi R^2 \bullet 0 - 2\pi R^2 \bullet 0 - \pi R^2 \bullet 0}{8\pi R^2 - 2\pi R^2 - \pi R^2} = \frac{0}{5\pi R^2} = 0}$$

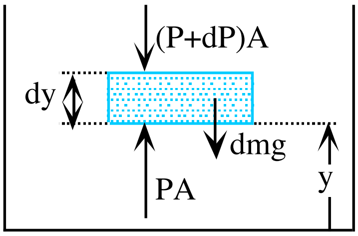
$$\boxed{y_{cm} = \frac{\sum A_i\, y_{cmi}}{\sum A_i} = \frac{8\pi R^2 \bullet 16R/3\pi - 2\pi R^2 \bullet 8R/3\pi - \pi R^2 \bullet 3R}{8\pi R^2 - 2\pi R^2 - \pi R^2} = 1.777\, R}$$

---

4) Explicar y deducir la Ecuación Fundamental de la Estática de Fluidos a partir de las leyes de Newton. **(1)**

SOLUCION:

Si tenemos un fluido que está en reposo, las fuerzas que se ejercen sobre un elemento cualquiera de dicho fluido deben de ser cero. Consideramos un elemento imaginario en forma de disco, con sus dos caras paralelas de superficie A perpendiculares a la dirección vertical, y un grosor dy. Sobre este elemento actúa la fuerza de la gravedad, como no se mueve, tiene que haber una fuerza que compense al peso. Esta fuerza solo puede estar originada por las diferencias de presión entre la parte inferior y superior del disco.
El peso del disco es: $dmg = \rho dVg = \rho Adyg$



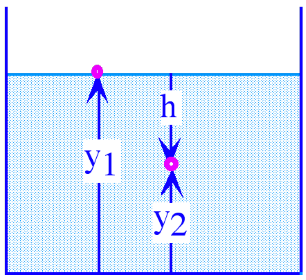
Si suponemos que a una altura y la presión es P y a una altura y+dy la presión es P+dP, las fuerzas que se ejercen sobre el disco son las mostradas en la figura.

Como $\sum Fy = 0 \;\Rightarrow PA - (P + dP)A - \rho Adyg = 0 \;\Rightarrow dP = -\rho\, g\, dy = 0 \;\Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dy} = -\rho g}$

Esta es la ecuación fundamental de la hidrostática en su forma diferencial. El signo – indica que la presión disminuye al aumentar y o lo que es lo mismo, al aumentar la altura. Para calcular variaciones de presión dentro del fluido, tenemos que integrar entre dos puntos. Si consideramos el punto 1 (y_1) en la superficie libre y el punto 2 (y_2) a una profundidad h, la relación entre las presiones será:

$$dP = -\rho g\, dy = 0 \;\Rightarrow \int_1^2 dP = -\int_1^2 \rho\, g dy \;\Rightarrow\; P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \Rightarrow$$

$$P_2 = P_1 - \rho g(y_2 - y_1)$$



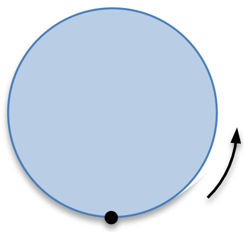
Si definimos la profundidad h como $h = -\Delta y = -(y_2 - y_1)$ la ecuación anterior se transforma en

$$\boxed{P_2 = P_1 + \rho gh}$$

PROBLEMAS

---

1) Un disco de un metro de radio situado en un plano vertical comienza a girar partiendo del reposo con una aceleración angular constante α desconocida. Una partícula pegada al disco, que inicialmente se encontraba en su punto más bajo (ver figura), participa del movimiento circular de éste. Cuando el disco ha girado un ángulo de 13 rad y su velocidad angular es de 4 rad/s la partícula se despega del disco e inicia una trayectoria en el aire. Determinar:



a) La aceleración angular del disco. **(0.2)**
b) El tiempo transcurrido desde que el disco empezó a girar hasta que se soltó la partícula. **(0.3)**
c) El vector velocidad de la partícula en el momento en que se despega del disco. **(0.3)**
d) El vector aceleración de la partícula **justo antes de despegarse** del disco. **(0.6)**
e) La máxima altura que alcanza la partícula por encima del centro del disco en su movimiento en el aire. **(0.3)**
f) El radio de curvatura de la trayectoria de la partícula en el punto de máxima altura. **(0.3)**

SOLUCION:

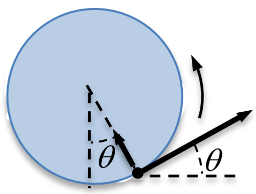
a) Utilizando las ecuaciones del movimiento circular uniformemente acelerado, midiendo ángulos respecto a la posición inicial (es decir $\theta_0 = 0$) y teniendo en cuenta que parte del reposo ($\omega_0 = 0$):

$$\omega_f^2 = \overline{\omega}_0^2 + 2\alpha\left(\theta_f - \overline{\theta}_0\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha} = \frac{\omega_f^2}{2\theta_f} = \boxed{0.615 \text{ rad/s}^2}$$

b) De nuevo, utilizando las ecuaciones del movimiento circular uniformemente acelerado y poniendo el cronómetro a cero en el instante en que empieza el movimiento:

$$\theta(t) = \overline{\theta}_0 + \overline{\omega}_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \Rightarrow \quad \theta_f = \theta\left(t_{despegue}\right) = \frac{1}{2}\alpha t_{despegue}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{despegue}} = \sqrt{\frac{2\theta_f}{\alpha}} = \boxed{6.5 \text{ s}}$$

c) Cuando el disco ha girado un ángulo θ la figura muestra la orientación de los vectores velocidad y vector unitario normal.
La velocidad de la partícula en el momento en que se despega del disco será (en componentes horizontales y verticales):



$$\boxed{\vec{v}_{despegue}} = \omega_f R\left(\cos\theta_f, \operatorname{sen}\theta_f\right) = \boxed{\left(3.630, 1.681\right) \text{m/s}}$$

d) El vector acel de la partícula justo antes de despegarse del disco (después de que se despega la acele de la partícula es la de la gravedad) se puede escribir como parte tangencial, orientada según el vector unitario tangencial $\hat{v}$, y parte normal, orientada según el vector unitario normal $\hat{n}$:

$$\boxed{\vec{a}_{despegue}} = a_t\hat{v} + a_n\hat{n} = \alpha R\left(\cos\theta_f, \operatorname{sen}\theta_f\right) + \omega_f^2 R\left(-\operatorname{sen}\theta_f, \cos\theta_f\right) = \boxed{\left(-6.164, 14.778\right)\text{m/s}^2}$$

e) Si colocamos el origen de coordenadas en el centro del disco, y ponemos de nuevo a cero el cronómetro, una vez que se despega la partícula realizará un movimiento parabólico con la posición y v iniciales dadas por: $\vec{r}_0 = R\left(\operatorname{sen}\theta_f, -\cos\theta_f\right)$; $\vec{v}_0 = \vec{v}_{despegue} = \omega_f R\left(\cos\theta_f, \operatorname{sen}\theta_f\right)$

Para la componente vertical podemos escribir (teniendo en cuenta que cuando alcanza la máxima altura la componente vertical de la velocidad se anula):

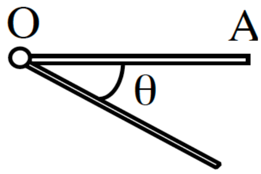
$$\overline{v}_{y,máx.altura}^2 = v_{0,y}^2 - 2g\left(y_{máx.altura} - y_0\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_{máx.altura}} = y_0 + \frac{v_{0,y}^2}{2g} = \boxed{-0.763 \text{ m}}$$

➔ en su máxima altura la partícula sigue estando por debajo del centro del disco.

f) En el punto de máxima altura la velocidad de la partícula es horizontal (sólo queda la componente horizontal de la velocidad inicial) y la aceleración es la de la gravedad y es normal a la trayectoria en ese momento: $a_n = \frac{v^2}{R} \Rightarrow g = \frac{v_{0,x}^2}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{v_{0,x}^2}{g} = 1.344 \text{ m}}$

---

2) Una varilla homogénea OA de masa m y longitud L, puede girar en un plano vertical en torno a un eje que pasa por O (ver figura).

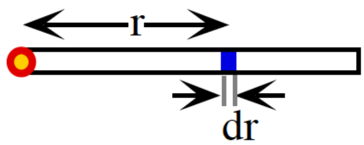


a) Calcular el momento de inercia de la varilla respecto al eje que pasa por O. **(0.4)**
b) Calcular la aceleración angular de la varilla en el instante en que se abandona desde la posición horizontal. **(0.4)**
c) Calcular la velocidad angular y la aceleración angular cuando la varilla forma un ángulo θ con la horizontal. **(0.8)**
d) Aplicar las ecuaciones encontradas en los tres apartados anteriores para determinar I, α(0), ω(θ) y α(θ) en el caso de m= 2kg, L = 0.5 m y θ = 30º. **(0.4)**

SOLUCION

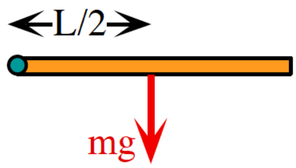
a) La definición de momento de inercia es $I = \int dm\, r^2$ con $dm = \rho\, dV = \rho\, S\, dr$ (S = sección transversal de la barra) $\Rightarrow$

$$I = \int_0^L \rho\, S dr\, r^2 = \rho S \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^L = \frac{1}{3}\rho S L^3$$



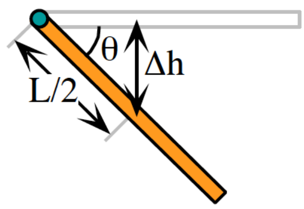
Donde ρ y S han salido de la integral por ser una barra uniforme.
Como la masa de la barra es $m = \rho SL$, el momento de inercia se puede escribir como $\boxed{I = (1/3)\, mL^2}$

b) Para calcular la aceleración angular, utilizamos la ecuación $\sum M = I\alpha$. La única fuerza que produce momento sobre la varilla es el peso, situado en su centro de masas.



$$M = I\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{M}{I} = \frac{mg\,(L/2)}{(1/3)\, mL^2} = \frac{3g}{2\,L} = \frac{14.71}{L} \text{ rad/s}^2}$$

c) La forma más sencilla de determinar la velocidad angular es por energías. Respecto al eje, la varilla realiza un movimiento de rotación puro, por lo que la perdida de energía potencial gravitatoria se convierte en energía cinética de rotación:

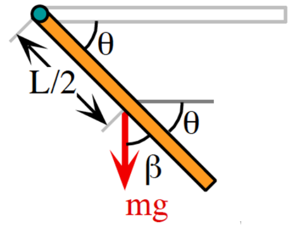


$$-\Delta Ep = \Delta Ec \Rightarrow mg\,(-\Delta h) = (1/2)\, I\, (\omega^2 - \omega_0^2)$$

Teniendo en cuenta que parte del reposo $\omega_0 = 0$. Además la perdida de Ep se contabiliza en el centro de masas por lo que $-\Delta h = (L/2)\, \text{sen}\theta$. Con estas consideraciones la ecuación de la energía se transforma en:

$$Mg(L/2)\, \text{sen}\theta = (1/2)\, I\, \omega^2 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{m\, g\, L\, \text{sen}\theta}{\frac{1}{3} mL^2}} = \sqrt{\frac{3\, g\, \text{sen}\theta}{L}} \text{ rad/s}}$$

En cuanto a la aceleración angular, aplicamos de nuevo $M = I\alpha \Rightarrow$.



$$\boxed{\alpha} = \frac{M}{I} = \frac{mg\,(L/2)\,\text{sen}\beta}{(1/3)\,mL^2} = \frac{3g\cos\theta}{2\,L} = \boxed{14.71\frac{\cos\theta}{L}\ \text{rad/s}^2}$$

d) Si m= 2kg, L = 0.5 m y $\theta = 30^o \Rightarrow$

$$\boxed{I = (1/3)\ 2\ (0.5)^2 = 0.1667\ \text{kgm}^2}$$

$$\boxed{\alpha(0) = (14.71/0.5) = 29.42\ \text{rad/s}^2}$$

$$\boxed{\omega\,(30) = \sqrt{\frac{3 \bullet 9.81 \bullet \text{sen}30}{0.5}} = 5.42\ \text{rad/s}} \qquad \boxed{\alpha(30) = 14.71\frac{\cos 30}{0.5} = 25.48\ \text{rad/s}^2}$$

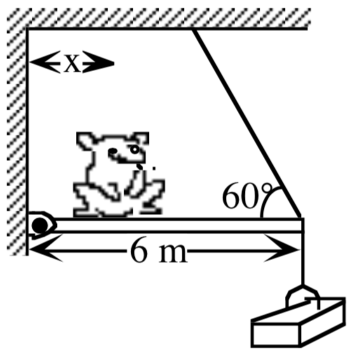
---

3) Un oso hambriento de 700 N camina sobre una viga para obtener algunas golosinas que se encuentran colgando al final de ésta. La viga es uniforme, pesa 200 N y tiene una longitud de 6 m; las golosinas pesan 60 N.

a) Dibujar un diagrama de cuerpo libre para la viga. **(0.3)**

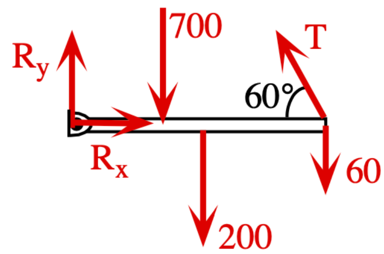
b) Encontrar la tensión en el alambre y las componentes de la fuerza de reacción en el gozne cuando el oso se encuentra a x = 1 m. **(1.2)**

c) Si el alambre puede soportar una tensión máxima de 900 N, ¿Cuál es la máxima distancia que puede caminar el oso antes de que se rompa el alambre? **(0.5)**



SOLUCION

a) El diagrama de cuerpo libre es el representar todas las fuerzas que actúan sobre la viga:



b) Lo más sencillo es comenzar con $\sum M = 0$, calculando los momentos respecto al gozne $\Rightarrow$

$$T\,L\ \text{sen}\ 60\ - 700\ x\ - 200\ (L/2) - 60\ L = 0 \Rightarrow$$

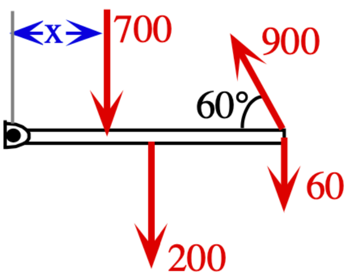
$$T\ 6\ \text{sen}60 = 700\ \ 1\ +\ 200\ \ 3\ +\ 60\ \ 6 \Rightarrow \boxed{T = 319.5\ \text{N}}$$

$$\sum Fx = 0 \Rightarrow Rx - T\cos 60 = 0 \Rightarrow \boxed{Rx = T\cos 60 = 319.5\cos 60 = 159.75\ \text{N}}$$

$$\sum Fy = 0 \Rightarrow Ry + T\text{sen}60 - 700 - 200 - 60 = 0 \Rightarrow \boxed{Ry = 960 - 319.5\ \text{sen}\ 60 = 683.30\ \text{N}}$$

c) Hay que determina el valor de x para el cual la tensión es la máxima de 900 N.

Aplicando $\sum M = 0$ respecto al gozne:



$$900\ L\ \text{sen}\ 60\ - 700\ x\ - 200\ (L/2) - 60\ L = 0 \Rightarrow$$

$$700\ x = 900\ \ 6\ \text{sen}60\ - 200\ \ 3 - 60\ \ 6 \Rightarrow \boxed{x = 5.31\ \text{m}}$$