EXAMEN DE FISICA I (GTI) 17-1-2023

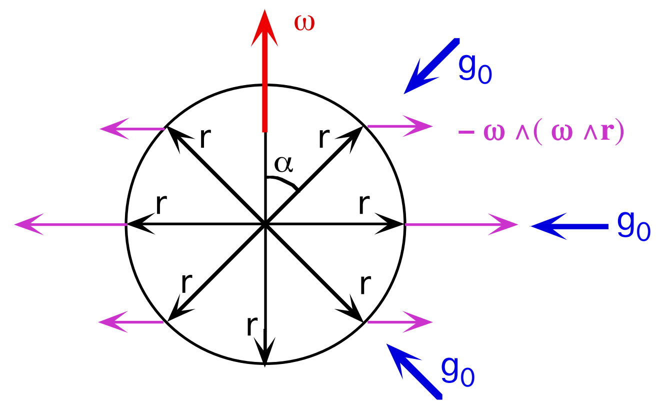
1) Recordando que en la Tierra: $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - 2\,(\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{v}') - \boldsymbol{\omega}\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{r})$,

a) Representa y explica cómo es la aceleración centrífuga; en que puntos de la superficie es máxima y mínima. **(0.5)**

b) ¿Cuánto valen las componentes radial y transversal? En que punto de la superficie serán máximas y mínimas estas componentes. ¿Qué diferencias hay entre el hemisferio norte y el hemisferio sur? **(05)**

SOLUCION

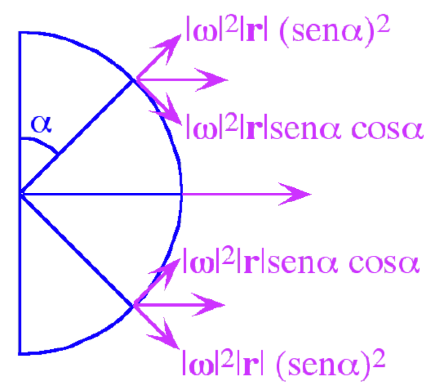
a) Al realizar el producto vectorial $-\boldsymbol{\omega}\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{r})$, vemos que la aceleración centrífuga se aleja perpendicular al eje de giro de la Tierra, y que su modulo vale:



$$\boxed{|\mathbf{a}_{cen}| = |\omega|\,|\omega\wedge\mathbf{r}|\text{ sen }90 = |\omega|\,|\omega|\,|\mathbf{r}|\text{ sen}\alpha = |\omega|^2|\mathbf{r}|\text{ sen}\alpha}$$

siendo α el ángulo que forma el vector de posición con el eje de giro (el complementario de la latitud).
Por lo tanto, su módulo es máximo en el ecuador y cero en los polos

b) Proyectamos $-\boldsymbol{\omega}\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{r})$, sobre la dirección radial y transversal.



La componente radial vale: $|\omega|^2|\mathbf{r}|\,(\text{sen}\alpha)^2$

Y la componente transversal: $|\omega|^2|\mathbf{r}|\text{ sen}\alpha\ \cos\alpha$

Por lo que la componente radial es máxima en el ecuador y nula en los polos.
La componente transversal es nula tanto en el ecuador como en los polos, siendo máxima para $\alpha = 45°$

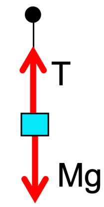
La única diferencia entre el Hemisferio Norte y Sur, es que en el Norte la componente transversal va dirigida hacia el sur, mientras que en el Hemisferio Sur va dirigida hacia el norte.

2) Una esfera pequeña de masa M está colgada del techo de un ferrocarril en reposo mediante un hilo que lleva intercalado un dinamómetro. Explicar desde el punto de vista de un observador inercial y otro no inercial, la inclinación que adquiere el hilo con la esfera en los siguientes casos: a) en reposo, b) en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, c) en movimiento rectilíneo uniforme. d) ¿Qué marcará el dinamómetro en cada caso? **(1)**

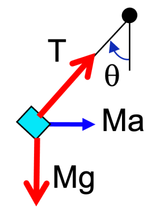
SOLUCION:
En primer lugar, es importante señalar que los dos observadores ven siempre la misma inclinación, lo que cambian es la interpretación de esta. Por otra parte, el dinamómetro marcará la tensión del hilo en cada caso.

a) En reposo la inclinación es nula. Para el observador inercial la bola está en reposo y la tensión es igual al peso.

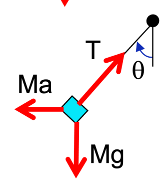
Para un observador no inercial que estuviese moviéndose con una aceleración **a**, el vagón y la esfera estarían moviendo en sentido contrario con una aceleración **-a**. Para este observador, en la dirección vertical la esfera no se mueve y la tensión igualaría al peso. Sin embargo, en la dirección horizontal existiría una fuerza ficticia -Ma que estaría acelerando a la esfera en esa dirección.



b) En MRUA el hilo esta inclinado un cierto ángulo θ, tal que para un observador inercial (situado en la via), la componente horizontal sería la responsable de la aceleración de la esfera: Tsenθ = Ma, mientras que la componente vertical seria igual al peso Tcosθ = Mg.



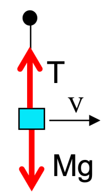
Un observador no inercial (subido en vagón) ve el hilo inclinado, pero la esfera esta quieta para él. Su interpretación es que hay una fuerza (ficticia) -Ma que compensa a la fuerza horizontal de la tensión Tsenθ, por lo que también para este observador se cumple que Tsenθ = ma, y por otra parte la componente vertical de la tensión compensa al peso: Tcosθ = mg.



Para ambos observadores, al dividir las ecuaciones se van la masa y la tensión y quedaría tag θ = a/g

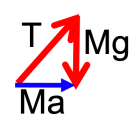
c) En MRU la inclinación es nula. Un observador inercial en el andén vería la esfera con velocidad v y si estuviese en el vagón la vería con velocidad cero, pero en ambos casos sin aceleración, las únicas fuerzas que actuarían para los dos serían la tensión y el peso, ambas en la dirección vertical.

Para un observador no inercial que estuviese moviéndose con una aceleración **a**, el vagón y la esfera estarían moviendo con una aceleración **-a** en sentido contrario. Para este observador, en la dirección vertical la esfera no se mueve y la tensión igualaría al peso. Sin embargo, en la dirección horizontal existiría una fuerza ficticia -Ma que estaría acelerando a la esfera en esa dirección



d) En reposo y en MRU la tensión es T = Mg y en el caso de MRUA, aplicando Pitágoras, la tensión es:

$$T = M\sqrt{a^2 + g^2}$$



---

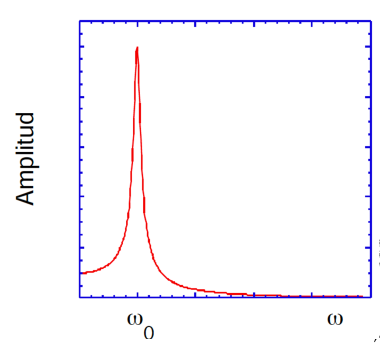
3) Una Explicar cualitativamente las oscilaciones forzadas: ¿Qué hace falta para que se produzcan? ¿Cómo es el movimiento resultante? Comentar lo más característico de este tipo de oscilaciones y poner algún ejemplo. **(1)**

SOLUCION

Si un objeto esta sometido a una fuerza elástica del tipo F = -kx, el objeto realiza un movimiento armónico simple de frecuencia natural $\omega_0 = \sqrt{K/m}$

Si este objeto lo sometemos a una fuerza periódica de frecuencia ω ($F=F_0$ sen(ω t),Tras un período transitorio el objeto termina realizando un movimiento armónico simple de la misma frecuencia ω.

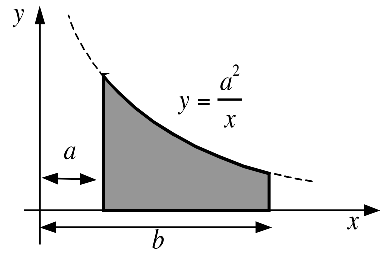
La amplitud de la oscilación depende de la frecuencia de la fuerza periódica, cuando ω tiende a ω_0 la amplitud aumenta, produciendo una resonancia. Si no hubiera amortiguamiento, para ω = ω_0 la amplitud seria infinita (toda la energía de la fuerza periódica es absorbida por el sistema)



Ejemplos de oscilaciones forzadas son un columpio impulsado periódicamente, las mareas gigantes que se producen en algunas bahías, la destrucción de puentes colgantes que han entrado en resonancia o el análogo eléctrico de la sintonización de la frecuencia que nos interesa cambiando la frecuencia natural de la oscilación al mover el dial.

---

4) Determinar la posición del centro de masas de la placa homogénea de la figura. **(1)**

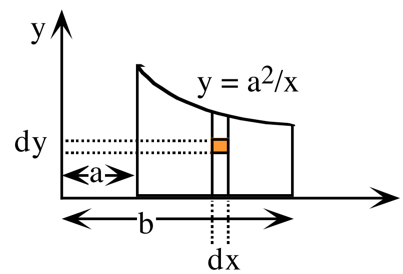


SOLUCION

Recordando la definición de centro de masas de una superficie homogénea

$$x_{CM} = \frac{\int x\, dA}{\int dA} \qquad \text{e} \qquad y_{CM} = \frac{\int y\, dA}{\int dA}$$

con $dA = dx\, dy$. integramos primero dy entre 0 y a^2/x y posteriormente dx entre a y b



$$\boxed{\int x dA} = \iint x\, dxdy = \int_a^b xdx \int_0^{a^2/x} dy = \int_a^b xdx \left[y\right]_0^{a^2/x} = \int_a^b xdx \frac{a^2}{x} = \int_a^b a^2 dx = a^2\left[x\right]_a^b = \boxed{a^2(b-a)}$$

$$\boxed{\int y dA} = \iint y\, dxdy = \int_a^b dx \int_0^{a^2/x} ydy = \int_a^b dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{a^2/x} = \int_a^b dx \frac{a^4}{2x^2} = \int_a^b \frac{a^4}{2x^2} dx = \frac{a^4}{2}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = \boxed{\frac{a^4}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$$

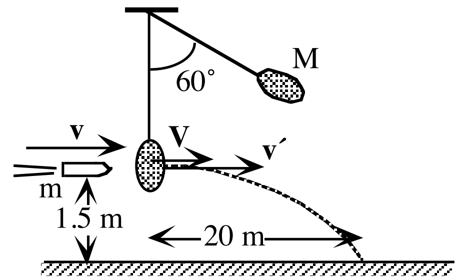
$$\boxed{\int dA} = \iint dxdy = \int_a^b dx \int_0^{a^2/x} dy = \int_a^b dx \left[y\right]_0^{a^2/x} = \int_a^b dx \frac{a^2}{x} = a^2\left[Lnx\right]_a^b = a^2(Lnb - Lna) = \boxed{a^2 Ln(b/a)}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones iniciales:

$$\boxed{x_{CM}} = \frac{\int x\, dA}{\int dA} = \frac{a^2(b-a)}{a^2 Ln(b/a)} = \boxed{\frac{(b-a)}{Ln(b/a)}}$$

$$\boxed{y_{CM}} = \frac{\int y\, dA}{\int dA} = \frac{\frac{a^4}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{a^2 Ln(b/a)} = \frac{a^2\left(\frac{b-a}{ab}\right)}{2Ln(b/a)} = \boxed{\frac{a(b-a)}{2bLn(b/a)}}$$

PROBLEMAS



1) Un saco de arena de 4 kg de masa pende de un hilo de 0.6 m de longitud. Sobre el saco se dispara un fusil cuya bala tiene una masa de 40 g. La bala atraviesa el saco y recorre una distancia de 20 m antes de pegar en el suelo que se encuentra 1.5 m por debajo del impacto en el saco. El saco oscila alcanzando un ángulo máximo de 60˚. Determinar:

- **a)** La velocidad de la bala después del choque. (**0.3**).
- **b)** La velocidad del saco después del choque. (**0.3**)
- **c)** La velocidad de la bala antes del choque. (**0.3**)
- **d)** La energía mecánica perdida por el sistema al atravesar la bala el saco **(0.3).**
- **e)** La fuerza ejerce la arena sobre la bala. (**0.3**) (Suponer que la anchura del saco es de 10 cm, la fuerza es constante y el desplazamiento del saco mientras es atravesado por la bala es despreciable)
- **f)** El ángulo máximo que alcanzaría el saco si la bala quedase incrustada en la arena. **(0.3)**
- **g)** La energía mecánica perdida por el sistema en este caso. **(0.2)**

SOLUCION

a) La bala realiza un movimiento parabólico partiendo con una velocidad horizontal v'. Las ecuaciones para el desplazamiento horizontal y vertical son:

$$x' = v' t \quad \Rightarrow \quad v' = x'/t \quad \Rightarrow \boxed{v'} = x'(g/2y)^{1/2} = 20(9.81/2\ 1.5)^{1/2} = \boxed{36.17\ \text{m/s}}$$

$$y = (1/2)\, g t^2 \quad \Rightarrow \quad t = (2y/g)^{1/2}$$

b) Para conocer la velocidad del saco hay que aplicar el principio de conservación de la energía entre el punto de impacto, de altura h = 0 y velocidad V y el punto de máximo desplazamiento de altura L - Lcosθ y velocidad 0.:

$$(1/2)MV^2 = MgL(1-\cos\theta) \quad \Rightarrow \boxed{V} = [2gL(1-\cos\theta)]^{1/2} = [2\ 9.81\ 0.6\ (1-\cos 60)]^{1/2} = \boxed{2.426\ \text{m/s}}$$

c) Para calcular la velocidad de la bala antes del choque tenemos que aplicar el principio de conservación del momento lineal:

$$mv = mv' + MV \quad \Rightarrow \boxed{v} = v' + VM/m = 36.17 + 2.426\ 4/0.04 = \boxed{278.77\ \text{m/s}}$$

d) Para calcular la energía mecánica perdida tenemos que aplicar el principio de conservación de la energía:

$$E_{mi} + W_{nocon.} = E_{mf} \quad \Rightarrow \quad W_{nocon.} = E_{mf} - E_{mi} = (1/2)\, m v'^2 + (1/2)\, MV^2 - (1/2)\, m v^2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{W_{nocon.}} = (1/2)\ 0.04\ 36.17^2 + (1/2)\ 4\ 2.426^2 - (1/2)\ 0.04\ 278.77^2 = \boxed{-1516.3\ \text{Julios}}$$

e) Si suponemos que la fuerza que actúa sobre la bala es constante, también lo será la aceleración a, por lo que podemos aplicar las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado.

$$v'^2 - v^2 = 2\, a\, e \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v'^2 - v^2}{2e}$$

$$\text{y} \quad \boxed{F} = m\, a = m \frac{v'^2 - v^2}{2e} = 0.04 \frac{36.17^2 - 278.77^2}{2\ 0.1} = \boxed{-15281\ \text{N}}$$

f) Tenemos que aplicar el principio de conservación del momento teniendo en cuenta que después del impacto, tanto la velocidad del saco como la de la bala serán iguales y de valor V:

$$mv = (m+M)V \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{mv}{m+M} = \frac{0.04\ 278.77}{0.04+4} = 2.76\ \text{m/s}}$$

Aplicamos el principio de conservación de la energía entre el punto de impacto (E_c) y el de máximo desplazamiento angular (E_p).

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)\,g\,L\,(1-\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 1 - \frac{V^2}{2\,g\,L} = 1 - \frac{2.76^2}{2\ 9.81\ 0.6} = 0.3529 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta = 69.33^\circ}$$

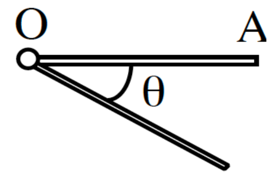
g) Para determinar la perdida de energía al quedarse incrustada la bala, calculamos las diferencias de energías cinéticas antes y después del impacto (en ese instante la energía potencial no varia) tal como se hizo en el apartado d:

$$E_{mi} + W_{nocon.} = E_{mf} \quad \Rightarrow \quad W_{nocon} = E_{mf} - E_{mi} = (1/2)\,(m+M)V^2 \ - \ (1/2)\,mv^2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{W_{nocon}} = (1/2)\ 4.04\ 2.76^2 \ - (1/2)\ 0.04\ 278.77^2 = 1554.25 - 15.39 = \boxed{-1538.86 \quad \text{Julios}}$$

---

2) Una varilla homogénea OA de masa m y longitud L, puede girar en un plano vertical en torno a un eje que pasa por O (ver figura).



a) Calcular el momento de inercia de la varilla respecto al eje que pasa por O. **(0.4)**

b) Calcular la aceleración angular de la varilla en el instante en que se abandona desde la posición horizontal. **(0.4)**

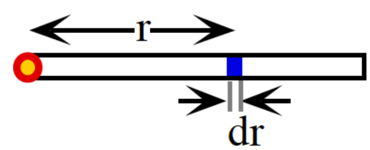
c) Calcular la velocidad angular y la aceleración angular cuando la varilla forma un ángulo θ con la horizontal. **(0.8)**

d) Aplicar las ecuaciones encontradas en los tres apartados anteriores para determinar I, $\alpha(0)$, $\omega(\theta)$ y $\alpha(\theta)$ en el caso de m= 2kg, L = 0.5 m y θ = 30º. **(0.4)**

SOLUCION

a) La definición de momento de inercia es $I = \int dm\ r^2$ con $dm = \rho\ dV = \rho\ S\ dr$ (S = sección transversal de la barra) $\Rightarrow$

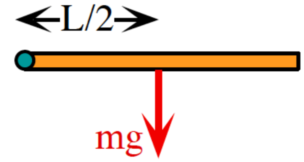
$$I = \int_0^L \rho\ S dr\ r^2 = \rho\ S \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^L = \frac{1}{3}\rho\ S L^3$$



Donde ρ y S han salido de la integral por ser una barra uniforme.

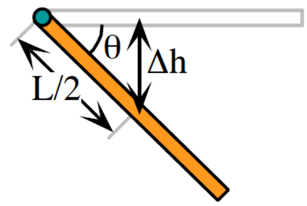
Como la masa de la barra es $m = \rho\ SL$, el momento de inercia se puede escribir como $\boxed{I = (1/3)\ mL^2}$

b) Para calcular la aceleración angular, utilizamos la ecuación $\sum M = I\alpha$. La única fuerza que produce momento sobre la varilla es el peso, situado en su centro de masas.



$$M = I\alpha \Rightarrow \quad \alpha = \frac{M}{I} = \frac{mg\,(L/2)}{(1/3)\,mL^2} = \frac{3g}{2\,L} = \frac{14.71}{L}\ \text{rad/s}^2$$

c) La forma más sencilla de determinar la velocidad angular es por energías. Respecto al eje, la varilla realiza un movimiento de rotación puro, por lo que la perdida de energía potencial gravitatoria se convierte en energía cinética de rotación:

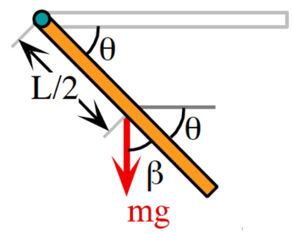


$$-\Delta Ep = \Delta Ec \Rightarrow \quad mg\,(-\Delta h) = (1/2)\, I\, (\omega^2 - \omega_0^2)$$

Teniendo en cuenta que parte del reposo $\omega_0 = 0$. Además la perdida de Ep se contabiliza en el centro de masas por lo que $-\Delta h = (L/2)\,\text{sen}\theta$. Con estas consideraciones la ecuación de la energía se transforma en:

$$Mg(L/2)\,\text{sen}\theta = (1/2)\, I\, \omega^2 \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{m\,g\,L\,\text{sen}\theta}{\frac{1}{3}mL^2}} = \sqrt{\frac{3\,g\ \text{sen}\theta}{L}}\ \text{rad/s}$$

En cuanto a la aceleración angular, aplicamos de nuevo $M = I\alpha \Rightarrow$.



$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{mg\,(L/2)\,\text{sen}\beta}{(1/3)\,mL^2} = \frac{3g\cos\theta}{2\,L} = 14.71\frac{\cos\theta}{L}\ \text{rad/s}^2$$

d) Si m= 2kg, L = 0.5 m y $\theta = 30^o$ $\Rightarrow$

$$I = (1/3)\,2\,(0.5)^2 = 0.1667\ \text{kgm}^2$$

$$\alpha(0) = (14.71/0.5) = 29.42\ \text{rad/s}^2$$

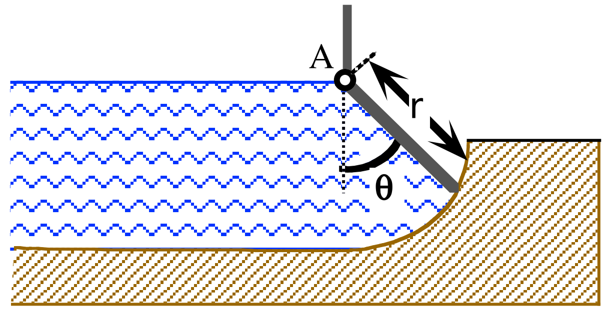
$$\omega\,(30) = \sqrt{\frac{3 \bullet 9.81 \bullet \text{sen}30}{0.5}} = 5.42\ \text{rad/s} \qquad \alpha(30) = 14.71\frac{\cos 30}{0.5} = 25.48\ \text{rad/s}^2$$

3) Una compuerta uniforme rectangular de masa M, altura r y anchura b está sujeta por goznes en A. Si el líquido de densidad ρ alcanza una altura r, determinar:

a) La fuerza que el líquido ejerce sobre la compuerta (en función de ρ, g, b, r y θ). **(0.4)**

b) El punto de aplicación de la fuerza resultante (en función de r). **(0.4)**

c) el ángulo que alcanza la compuerta respecto de la vertical θ (en función de ρ, b, r y M. **(0.4)**



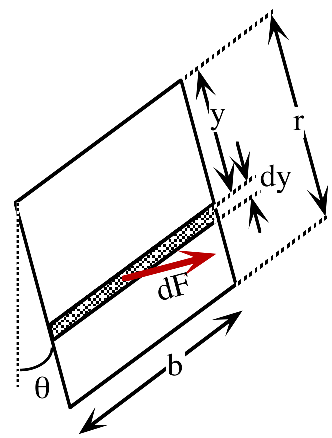
Si el líquido es agua, $r = 2$ m, $b = 0.5$ m y $M = 1000$ kg, **calcular numéricamente**:

d) La presión debida al agua en el fondo del recipiente. **(0.4)**

e) La fuerza que ejerce el agua sobre la compuerta y el ángulo θ utilizando las ecuaciones encontradas en los apartados a) y c) respectivamente. **(0.4)**

SOLUCION:

a) Consideramos una franja de la compuerta de grosor dy y longitud b situada a una distancia y del gozne y por lo tanto a una profundidad $y\cos\theta$, la fuerza que actúa sobre la misma será la presión ejercida por el agua ($P = \rho g y\cos\theta$) multiplicada por la superficie:



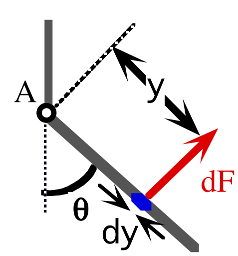
$$dF = Pds = Pbdy = \rho g y\cos\theta\, bdy$$

Para calcular la fuerza total sobre la presa debemos integrar dF entre la superficie del agua y el extremo inferior de la compuerta:

$$\boxed{F} = \int_0^r dF = \int_0^r \rho g y\cos\theta\, bdy = \rho g b\cos\theta \int_0^r y dy = \rho g b\cos\theta \left[\frac{y}{2}\right]_0^r = \boxed{\frac{1}{2}\rho g b\cos\theta\, r^2}$$

b) El punto de aplicación de la fuerza F sobre la presa será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos)

El momento <u>respecto al punto A</u> de un dF actuando sobre una franja de anchura dy a una distancia y será:



$$dM = dF\, y = \rho g y\cos\theta\, bdy\, y$$

donde hemos tomado el valor de dF calculado en el apartado anterior. Para calcular el momento total integramos entre el borde superior e inferior de la presa:

$$M = \int_0^r dM = \int_0^r \rho g y \cos\theta \, b dy \, y = \rho g b \cos\theta \int_0^r y^2 dy = \rho g b \cos\theta \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^r \Rightarrow$$

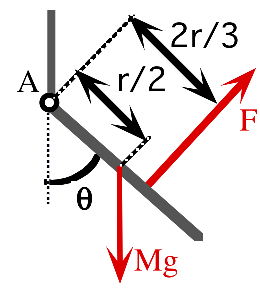
$$\boxed{M = (1/3)\ \rho g b \cos\theta\ r^3}$$

Si el punto de aplicación está a una distancia d respecto al gozne A de la presa, tiene que verificarse que

$$Fd = M \Rightarrow$$

$$d = \frac{M}{F} = \frac{(1/3)\ \rho\ g\ b\cos\theta\, r^3}{(1/2)\ \rho\ g\ b\cos\theta\, r^2} \Rightarrow \boxed{d = (2/3)r}$$

c) La compuerta es uniforme, por lo que el punto de aplicación del peso está situado en el centro de la misma, a una distancia r/2 del gozne.
En el equilibrio, la compuerta no rota, por lo que $\sum M_A = 0 \Rightarrow$



$$Mg\ (r/2)\ \mathrm{sen}\theta\ -\ F\ (2/3)r\ \mathrm{sen}\ 90 = 0 \Rightarrow$$

$$Mg\ (r/2)\ \mathrm{sen}\theta = (1/2)\ \rho g b \cos\theta\ r^2\ (2/3)\ r \Rightarrow \quad M\ (\mathrm{sen}\theta/\cos\theta) = \rho b r^2\ (2/3) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\theta = \frac{2\rho b r^2}{3M}}$$

d) La presión debida al agua a una profundidad H es $\rho g H$, en nuestro caso H = r:

$$P = \rho g r = 10^3\ 9.81\ \ 2 = 19.62\ 10^3\ \text{Pascales} = 0.1937\ \text{atm}$$

e) $F = (1/2)\ \rho g b \cos\theta\ r^2 = (1/2)\ 10^3\ \ 9.81\ 0.5\ \cos\theta\ 2^2 = 9810\ \cos\theta\ \ \mathrm{N}$

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{2\rho b r^2}{3M} = \frac{2\ 1000\ 0.5\ 2^2}{3\ 1000} = \frac{4}{3} \Rightarrow \quad \theta = \mathrm{arctg}\ (4/3) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 53.13°}$$