EXAMEN DE FISICA I (GTI) 2-2-2022

CUESTIONES

1) Los vectores (–3, 2, –1), (1, –3, 5) y (2, 1, –4), están aplicados en los puntos a (2, 1, 2), b (–1, 0, 1) y c (1, 2, 0) respectivamente. Calcular:
   a) la resultante.
   b) el momento resultante respecto del origen.
   c) el momento resultante respecto del punto P (5, 8, –3).

---

a) La resultante es la suma de los vectores:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (-3, 2, -1)\\ \mathbf{B} &= (1, -3, 5)\\ \mathbf{C} &= (2, 1, -4)\\ \hline \boxed{\mathbf{R} = (0,\ 0,\ 0)}\end{aligned}$$

b) El momento resultante es la suma de los momentos

$$\mathbf{M_oA} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(-1-4) + \mathbf{j}\,(-6+2) + \mathbf{k}\,(4+3) = -5\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 7\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M_oB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(0+3) + \mathbf{j}\,(1+5) + \mathbf{k}\,(3-0) = 3\,\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M_oC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(-8-0) + \mathbf{j}\,(0+4) + \mathbf{k}\,(1-4) = -8\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}$$

El momento resultante es la suma de los momentos: $\boxed{\Sigma\mathbf{M_o} = -10\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 7\,\mathbf{k}}$

c) La relación entre el momento resultante respecto al origen O y respecto a un punto P es

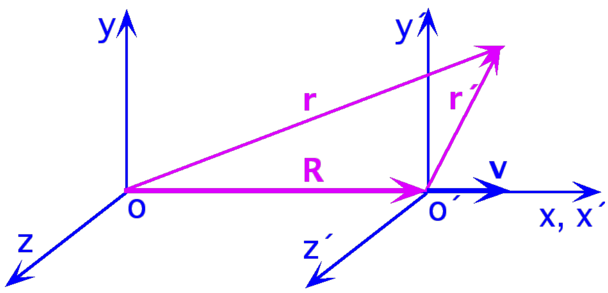
$$\mathbf{M_P} = \mathbf{M_O} - \mathbf{OP} \wedge \mathbf{R}$$

Como la resultante es nula $\mathbf{R} = 0$, $\Sigma\mathbf{M_P} = \Sigma\mathbf{M_O}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{M_P} = -10\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 7\,\mathbf{k}}$

---

2) Relación entre las coordenadas espaciales, velocidades y aceleraciones en el movimiento relativo de traslación uniforme (Transformaciones Galileanas). ¿Cuando no se pueden utilizar estas trasformaciones, y hay que utilizar las de Lorentz? Da una idea de porqué.

Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia con los ejes paralelos y uno moviéndose respecto al otro a lo largo de la dirección x con una velocidad : $\mathbf{v} = \mathrm{v}\mathbf{i}$



Supongamos también que para t = 0 el origen de coordenadas de ambos sistemas o y o´ coinciden.
En un cierto instante de tiempo la separación entre los dos orígenes será $\mathbf{R} = \mathbf{oo'} = \mathbf{v}t = \mathrm{v}t\,\mathbf{i}$
La posición de una partícula respecto al sistema o viene descrita por un vector de posición **r**, mientras que respecto al sistema o´ el vector de posición será **r´**.

La relación entre los vectores de posición en ambos sistemas es $\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'} \Rightarrow \begin{cases} x = vt + x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

Solo es diferente la coordenada x. Derivando la relación vectorial de las posiciones:

$$\mathbf{V} = d\mathbf{r}/dt = d\mathbf{R}/dt + d\mathbf{r}'/dt = \mathbf{v} + \mathbf{V}' \Rightarrow \begin{cases} Vx = v + V'x \\ Vy = V'y \\ Vz = V'z \end{cases}$$

Solo es diferente la componente x de la velocidad. Derivando la relación vectorial de las velocidades:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{V}/dt = d\mathbf{v}/dt + d\mathbf{V}'/dt$$

Pero al ser un movimiento de traslación uniforme: $d\mathbf{v}/dt = 0$ y $d\mathbf{V}'/dt = \mathbf{a}'$ por lo que $\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}'}$

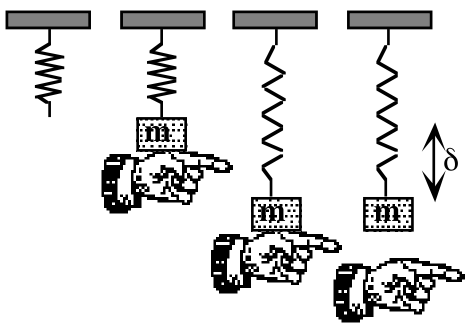
Este es un resultado muy importante, ya que la aceleración es un invariante en los sistemas que se mueven con velocidades uniformes unos respecto de otros (sistemas inerciales).

Las transformaciones de Galileo dejan de ser validas cuando las velocidades entre los sistemas de referencia se acercan a la velocidad de la luz. En ese caso tenemos que utilizar las transformaciones de Lorentz. La razón esta en que la luz tiene que llevar la misma velocidad para los dos sistemas de referencia, y esto solo se cumple si aplicamos las transformaciones de Lorentz.

Para velocidades de desplazamiento entre sistemas pequeñas (v << c) aunque apliquemos las transformaciones de Galileo, la luz lleva prácticamente la misma velocidad c para los dos sistemas. Sin embargo, si v tiende a c, al aplicar las transformaciones de Galileo, encontraríamos claramente diferentes velocidades para la luz en los dos sistemas y ello nos obliga a utilizar Lorentz.

---

3) Un estudiante de física cuelga un cuerpo de un muelle y lo suelta poco a poco, sujetándolo con la mano, de forma que se alcanza un equilibrio final entre la fuerza del muelle y el peso del cuerpo con un alargamiento δ del muelle. Según sus conocimientos de física en este caso se debe de cumplir que:



$$\mathbf{F}_{\text{elástica}} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a} \Rightarrow K\,\delta - mg = 0$$
$$\Rightarrow \delta = mg / K$$

Sin embargo utilizando el método de las energías y tomando el origen de energía potencial gravitatoria nulo en la posición final del cuerpo:

$$mg\delta = (1/2)\,K\delta^2 \Rightarrow \delta = 2mg / K$$

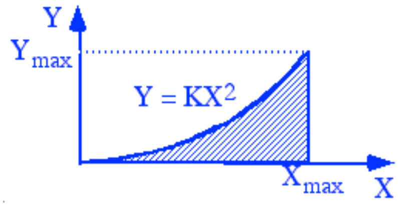
¿Cuál de los dos razonamientos es el correcto y dónde está el fallo en el razonamiento incorrecto?

El razonamiento correcto es el primero, ya que las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en el estado final son nulas y como la velocidad es cero, por la 1ª ley de Newton el cuerpo permanece en reposo.

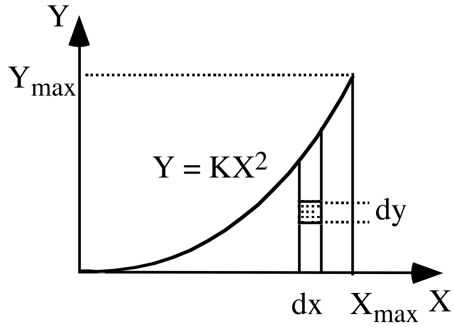
El segundo razonamiento no es aplicable en este caso ya que no considera el trabajo realizado por la mano para que la masa descienda lentamente.

El desplazamiento calculado en este razonamiento, $\delta = 2mg / K$, que como hemos dicho anteriormente no considera el trabajo de la mano, corresponde al que desplazamiento máximo que tendría el cuerpo si lo soltamos libremente desde la posición inicial, y no se corresponde con una posición de equilibrio, ya que para $\delta = 2mg / K$ la fuerza del muelle es mayor que el peso y la masa volvería a subir.

4) Determinar la posición del centro de masas de la placa homogénea de la figura:



Recordando la definición de centro de masas de una superficie homogénea $x_{CM} = \dfrac{\int x\,ds}{\int ds}$ y teniendo en cuenta que $ds = dx\,dy$, donde este diferencial de área se integra en la superficie delimitada por la parábola $y = kx^2$ y el eje x, llegamos a la ecuación de partida:



$$x_{CM} = \frac{\boxed{\iint x\,dx\,dy}}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_0^{X_{max}} x\,dx \int_0^{kx^2} dy}{\int_0^{X_{max}} dx \int_0^{kx^2} dy} = \frac{\int_0^{X_{max}} x\,dx\,\left[y\right]_0^{kx^2}}{\int_0^{X_{max}} dx\,\left[y\right]_0^{kx^2}} = \frac{\int_0^{X_{max}} x\,dx\;kx^2}{\int_0^{X_{max}} dx\;kx^2} = \;\ldots\ldots$$

donde primero hemos integrado dy entre el eje x y la parábola (kx^2) y posteriormente integraremos la variable x entre 0 y X_{max}.

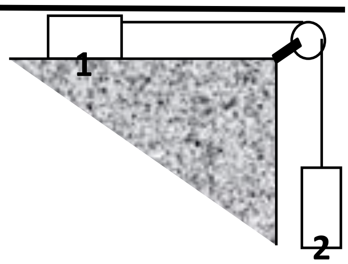
$$\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\int_0^{X_{max}} kx^3\,dx}{\int_0^{X_{max}} kx^2\,dx} = \frac{\left[k\dfrac{x^4}{4}\right]_0^{X_{max}}}{\left[k\dfrac{x^3}{3}\right]_0^{X_{max}}} = \frac{k\dfrac{X_{max}{}^4}{4}}{k\dfrac{X_{max}{}^3}{3}} = \; = \boxed{\frac{3}{4}X_{max}}$$

Procediendo de forma análoga para la coordenada y:

$$\boxed{y_{CM}} = \frac{\int y\,ds}{\int ds} = \frac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_0^{X_{max}} dx \int_0^{kx^2} y\,dy}{\int_0^{X_{max}} dx \int_0^{kx^2} dy} = \frac{\int_0^{X_{max}} dx \left[\dfrac{y^2}{2}\right]_0^{kx^2}}{\int_0^{X_{max}} dx\,\left[y\right]_0^{kx^2}} = \frac{\int_0^{X_{max}} dx\,\dfrac{k^2x^4}{2}}{\int_0^{X_{max}} dx\;kx^2} =$$

$$= \frac{\left[\dfrac{k^2}{2}\dfrac{x^5}{5}\right]_0^{X_{max}}}{\left[k\dfrac{x^3}{3}\right]_0^{X_{max}}} = \frac{\dfrac{k^2}{2}\dfrac{X_{max}{}^5}{5}}{k\dfrac{X_{max}{}^3}{3}} = \frac{k^2\dfrac{X_{max}{}^5}{10}}{k\dfrac{X_{max}{}^3}{3}} = \frac{3}{10}kX_{max}{}^2 = \boxed{\frac{3}{10}Y_{max}}$$

En el sistema representado en la figura m_1 = 200 kg y m_2 = 500 kg, el coeficiente de rozamiento cinético con el plano es de 0.1 y la polea la consideramos de masa despreciable. Si inicialmente el cuerpo 1 se movía hacia la **izquierda** con una velocidad de 1 m/s, calcular durante el proceso hasta que se detiene: **a)** la distancia recorrida, **b)** la aceleración de los bloques, **c)** la tensión de la cuerda. Después de que se detiene, el bloque 1 invierte su sentido de movimiento. Determinar al pasar de nuevo por la posición inicial: **d)** la velocidad de los bloques, **e)** la aceleración de los bloques, **f)** la tensión en la cuerda.



a) Tomamos como sistema todo lo que se muestra en la figura incluida la Tierra. Como no hay nada que desde el exterior interactúe sobre nuestro sistema, dándole o quitándole energía, podemos aplicar la conservación de la energía entre la situación inicial y la situación en la que los dos bloques detienen su movimiento después de recorrer el bloque 1 una distancia *d* hacia la izquierda:

$$\Delta E_{sist.} = 0 \Rightarrow \Delta K + \Delta U_{grav.} + \Delta E_{térmica} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)v^2 + m_2 gd + \mu m_1 gd = 0 \Rightarrow d = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 + m_2}{\mu m_1 + m_2}\right)\frac{v^2}{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d = 6.87 \text{ cm}}$$

b) Si tomamos el sentido positivo de los desplazamientos del cuerpo 1 hacia la izquierda y del cuerpo 2 hacia abajo tenemos que en su movimiento uniformemente acelerado:

$$v_{1,final}^2 = v_{1,inicial}^2 + 2a\Delta x \quad \Rightarrow \quad 0 = v_{1,inicial}^2 + 2a\left(-d\right) \Rightarrow \boxed{a = \left(\frac{\mu m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\right)g = 7.28 \text{ m/s}^2}$$

a $>$ 0 ➔ que los cuerpos se van frenando en su movimiento inicial hacia la izquierda y hacia arriba.

c) Para calcular la tensión en la cuerda basta con aplicar la segunda ley de Newton para uno de los bloques, por ejemplo el 2 por ser más sencillo:

$$m_2\vec{g} + \vec{T} = m_2\vec{a} \quad \Rightarrow \quad m_2 g - T = m_2 a \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = m_2\left(g - a\right) = 1260 \text{ N}}$$

d) Aplicando la conservación de E la entre la situación en la que los dos bloques detienen su movimiento y la situación en que vuelven a la posición de inicio después de recorrer el bloque 1 una distancia *d* hacia la derecha: $\Delta E_{sist.} = 0 \Rightarrow \Delta K + \Delta U_{grav.} + \Delta E_{térmica} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)v'^2 - m_2 gd + \mu m_1 gd = 0 \Rightarrow \boxed{v' = \sqrt{2\left(\frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2}\right)gd} = 0.961 \text{ m/s}^2}$$

Los bloques se mueven con una menor v que al principio debido a que aunque se conserva la E total la presencia del rozamiento hace que parte de la E mecánica se transforme en E térmica.

e) Utilizando de nuevo la ecuación del MUA: $v'^2 = 2a'd \Rightarrow \boxed{a' = \frac{v'^2}{2d} = \left(\frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2}\right)g = 6.72 \text{ m/s}^2}$

Obsérvese que la expresión para la aceleración es la misma que en el apartado b) cambiando simplemente el signo del término del coeficiente de rozamiento, debido a que ahora la fuerza de rozamiento va en el sentido contrario, lo que conlleva también que la nueva aceleración sea menor en magnitud que la anterior.

f) Aplicando de nuevo la segunda ley de Newton para el bloque 2:

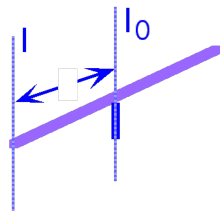
$$m_2\vec{g}+\vec{T}=m_2\vec{a} \quad \Rightarrow \quad m_2 g - T = m_2 a \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = m_2\left(g-a\right) = 1540 \text{ N}}$$

---

2) Dos niños, cada uno con una masa de 25 kg, están sentados en extremos opuestos de una barra horizontal de 2.6 m de largo y una masa de 10 kg. La barra está rotando a 5 rpm con respecto a un eje que pasa por su centro.
a) Determinar el momento de inercia del conjunto (El momento de inercia de una barra que rota respecto a uno de sus extremos es $I = (1/3)mL^2$).
b) ¿Cuál será la velocidad angular si cada niño se mueve 60 cm hacia el centro de la plancha sin tocar el piso?
c) ¿Cuál es el cambio en la energía cinética de rotación del sistema?
d) Si cuando los niños se encuentran en la posición inicial se aplica una fuerza de 120 N en el plano horizontal, perpendicular a la plancha, y a una distancia de 1 m del eje, encontrar la aceleración angular del sistema.

---

a) Primero aplicando el teorema de Steiner para determinar el momento de inercia de la barra respecto al eje de giro, que pasa por el centro de masas (I_0). El teorema de Steiner dice: $I = I_0 + m_b d^2$, donde I es el momento respecto al extremo de la barra ($I = (1/3)m_b L^2$) y d ($= L/2$) la distancia entre el extremo y el centro de masas.



Sustituyendo queda: $(1/3)m_b L^2 = I_0 + m_b\,(L/2)^2 \Rightarrow I_0 = (1/3 - 1/4)\,m_b L^2 = (1/12)\,m_b L^2$

Si consideramos a los niños masas puntuales, el momento de inercia de cada uno es $m_n d^2$, y como son dos:

$$I_n = 2\cdot m_n d^2$$

El momento de inercia del conjunto es la suma de los momentos de inercia

$$\boxed{I = I_0 + I_n = (1/12)\,m_b L^2 + 2\cdot m_n d^2 = (1/12)\,10\cdot 2.6^2 + 2\cdot 25\cdot 1.3^2 = 5.63 + 85.50 = 90.13 \text{ kgm}^2}$$

b) Como las fuerzas que ejercen los niños con las manos para acercarse al eje de giro pasan por el propio eje, es decir, son fuerzas centrales, el momento de las mismas es cero, y se conserva el momento angular. Esto significa que: $I_i\omega_i = I_f\,\omega_f$

El momento de inercia inicial, lo hemos calculado antes ($I_i = 90.13$ kgm^2)

El momento de inercia final es $I_f = I_0 + I_{nf} = 5.63 + 2\cdot 25\cdot 0.7^2 = 5.63 + 24.50 = 30.13$ kgm^2

La velocidad angular inicial es $\omega_i = 5$ rev/m $\cdot$ (2π rad/1 rev) $\cdot$ (1 min / 60 s) = $5\cdot 2\pi/60 = 0.5236$ rad/s

Sustituyendo en la ecuación anterior: $90.13\cdot 0.5236 = 30.13\cdot\omega_f \Rightarrow \boxed{\omega_f = 1.566 \text{ rad/s}}$

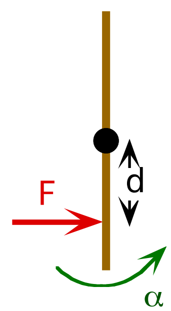
c) En un sistema que rota con una velocidad angular ω, la energía cinética es $Ec = (1/2)\,I\omega^2$
Por lo tanto, el incremento de energía cinética es

$$\boxed{\Delta Ec = (1/2)\,I_f\omega_f^2 - (1/2)\,I_i\omega_i^2 = (1/2)\,30.13(1.566)^2 - (1/2)\,90.13(0.5236)^2 = 36.94 - 12.35 = 24.59 \text{ J}}$$

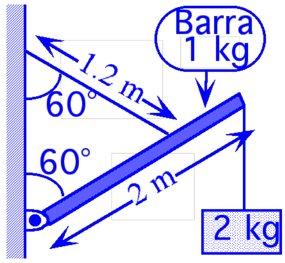
d) Se aplica la ecuación: $M = I\,\alpha$

Siendo $M = F\,d \operatorname{sen} 90 = F\,d = 120\cdot 1 = 120$ N m $\Rightarrow$

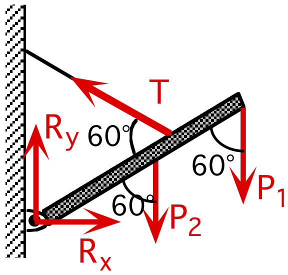
$$\Rightarrow \boxed{\alpha = M/I = 120/90.13 = 1.33 \text{ rad/s}^2}$$



3) Para el sistema que se muestra en la figura:
a) Representar todas las fuerzas que actúan sobre la barra.
b) Determinar la tensión T de la cuerda que une la barra a la pared.
c) Calcular la reacción R en al articulación.
d) Si la tensión máxima que puede soportar la cuerda que une la barra a la pared es de 100 N, determinar la masa máxima que podemos colgar del extremo de la barra.



a)



b) Aplicando $\sum M = 0$ y calculando los momentos respecto a la articulación:

$$P_1 \bullet 2\,\text{sen}60 + P_2 \bullet 1\,\text{sen}60 - T \bullet 1.2\,\text{sen}60 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{T =} \frac{2P_1 + P_2}{1.2} = \frac{g(2m_1 + m_2)}{1.2} = \frac{9.81(4+1)}{1.2} = \boxed{40.87\text{ N}}$$

c) Aplicando $\sum Fx = 0 \;\Rightarrow\; Rx - T\cos 30 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{Rx} = T\cos 30 = 40.87\cos 30 = \boxed{35.4\text{ N}}$

$\sum Fy = 0 \;\Rightarrow\; Ry + T\text{sen}30 - P_1 - P_2 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{Ry} = P_1 + P_2 - T\text{sen}30 = 18.36 + 9.81 +$

$40.87 \bullet (1/2) = \boxed{8.995\text{ N}}$

d) De la ecuación de los momentos, $T = \dfrac{g(2m_1 + m_2)}{1.2}$ despejamos m_1 y sustituimos el valor de T $\Rightarrow$

$$\boxed{m_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1.2\,T}{g} - m_2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1.2 \bullet 100}{9.81} - 1\right) = \boxed{5.616\text{ kg}}$$