EXAMEN DE FISICA I (GTI) 19-1-2022

CUESTIONES

1) Si tenemos dos sistemas de referencia, uno que rota respecto a otro con una velocidad angular $\vec{\omega}$ constante,

a) ¿Es posible distinguir cuál de los dos sistemas está rotando? Explica por qué y da un ejemplo de cómo podrías hacerlo.

b) Encuentra la relación entre las velocidades de una misma partícula, $\vec{V}$ y $\vec{V}'$, observadas en cada uno de los sistemas (recuerda que la derivada respecto del tiempo de un vector $\vec{i}$ que rota con una velocidad angular $\vec{\omega}$ es $\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}$).

SOLUCION

Si, ya que el sistema que rota no es inercial y aparecen fuerzas ficticias. Una forma de distinguirlo sería con un péndulo de Foucault, ya que en un sistema que rota, el plano de oscilación del péndulo gira respecta al sistema, mientras que en sistema que no rota, el plano permanece constante.

Observador O utilizando el sistema de referencia (x, y, z): $\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\,i + \frac{dy}{dt}\,j + \frac{dz}{dt}\,k$

Observador O´ utilizando el sistema de referencia (x´, y´,z´): $\mathbf{v}' = \frac{dx'}{dt}\,i' + \frac{dy'}{dt}\,j' + \frac{dz'}{dt}\,k'$

Observador O utilizando el sistema (x´, y´,z´). Para este observador los vectores unitarios i´, j´y k´ están rotando por lo que su derivada es diferente de 0. $\mathbf{v} = \frac{dx'}{dt}\,i' + x'\frac{di'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\,j' + y'\frac{dj'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\,k' + z'\frac{dk'}{dt} =$

$$\frac{dx'}{dt}\,i' + \frac{dy'}{dt}\,j' + \frac{dz'}{dt}\,k' + x'\frac{di'}{dt} + y'\frac{dj'}{dt} + z'\frac{dk'}{dt} =$$

(Los tres primeros términos corresponden a v´): $\mathbf{v}' + x'(\omega \wedge i') + y'(\omega \wedge j') + z'(\omega \wedge k') =$

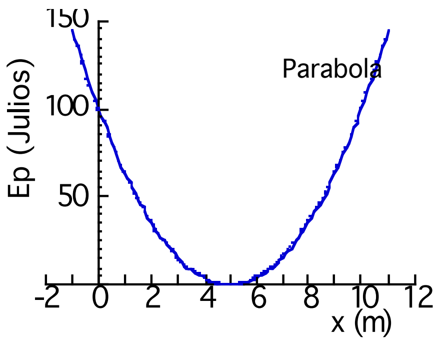
(Las coordenadas pasan a multiplicar los vectores unitarios) $\mathbf{v}' + (\omega \wedge x'\,i') + (\omega \wedge y'\,j') + (\omega \wedge z'\,k') =$

(Sacamos factor común a ω) $\mathbf{v}' + \omega \wedge (x'\,i' + y'\,j' + z'\,k') =$

(r = r´) $\mathbf{v}' + \omega \wedge r' = \mathbf{v}' + \omega \wedge r$

Por lo tanto: $\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \omega \wedge r}$

2) La gráfica representa la energía potencial de una partícula de masa $m = 2$ kg que se mueve a lo largo del eje x.
a) ¿Qué tipo de movimiento realiza la partícula?
b) Si su energía potencial máxima es de 144 Julios, ¿que velocidad tendrá la partícula en $x = 5$ m.?
c) Con la misma energía potencial, y sabiendo que para $t = 0$, $x = 5$ m, encuentra la ecuación del movimiento $x(t)$.



SOLUCION:

a) Como el potencial es parabólico, el movimiento será un movimiento vibratorio armónico simple (MAS) centrado en una posición $x_0 = 5$ m.

b) En x = 5m, la energía potencial vale 0, por lo que toda la energía será cinética, es decir, los 144 Julios serán de energía cinética:

$$(1/2)mv^2 = 144 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = (2\bullet 144/2)^{1/2} = 12 \text{ m/s}}$$

c) La ecuación general de un MAS es:

$(x - x_0) = A \cos(\omega t + \varphi)$, por lo que tenemos que encontrar los valores de A, ω y φ.

Al ser un MAS, la fuerza que lo genera es del tipo $F = -k\,(x-x_0)$, y tiene asociada una energía potencial que sigue la ecuación: $E_p = (1/2)k\,(x-x_0)^2$. Para determinar la constante k utilizamos los datos de la gráfica: sabemos que en $x = 0$ $E_p = 100$, por lo que $100 = (1/2)k\,(0 - 5)^2$, de donde despejamos k:

$$k = 200/25 = 8 \ \text{J/m}^2 \ (\text{N/m}).$$

Una vez conocida k, podemos determinar la amplitud y la frecuencia angular. Si la E_p máxima es 144 J:

$$E_{pmax} = (1/2)\,k\,A^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = (2E_{pmax}/k)^{1/2} = 6 \text{ m}}$$

La frecuencia angular es $\boxed{\omega = (k/m)^{1/2} = (8/2)^{1/2} = 2 \text{ rad/s}}$

Finalmente, sabemos que para $t = 0$ $x = 5$m, por lo que aplicando la ecuación general en esas condiciones:

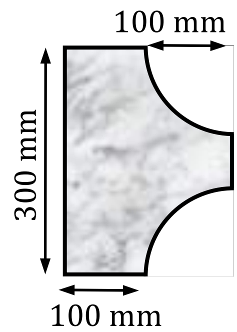
$$(5-5) = 6\cos(2\,0 + \varphi) \Rightarrow 0 = 6\cos(\varphi) \Rightarrow \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi = \pi/2 \quad \text{o} \quad 3\pi/2}$$

por lo que la ecuación del movimiento será:

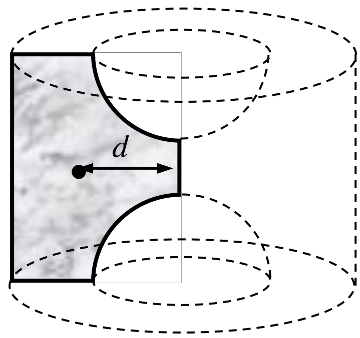
$$\boxed{x = 5 + 6\cos(2\bullet t + \pi/2)} \quad \text{o bien} \quad \boxed{x = 5 + 6\cos(2t + 3\pi/2)}$$

En el primer caso la partícula se está moviendo hacia la izquierda mientras que en segundo se está moviendo hacia la derecha

3) a) Determinar la posición del centro de gravedad de la placa de la figura (no se puede dar por sabido ningún CM).
b) Determinar el volumen de revolución que se generaría si se gira dicha placa alrededor de un eje vertical tangente a su lado izquierdo.
c) Coméntese el tipo de ecuación que se ha utilizado para el segundo cálculo indicando en qué situaciones se utiliza y en qué casos no es válida.



SOLUCION



a) Por simetría el centro de masas se encontrará a media altura. Para el cálculo de la posición horizontal, si giramos alrededor de un eje vertical que pase por el lado derecho se genera un cilindro al que le hemos quitado el volumen de una esfera. Si tomamos:

Radio del cilindro R = 200 mm

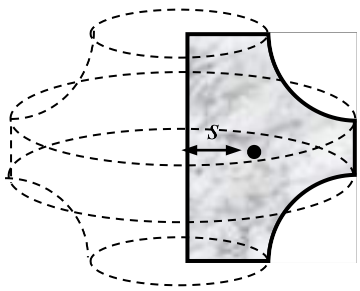
Altura del cilindro H = 300 mm

Radio de la esfera r = 100 mm

Por el segundo teorema de Pappus Guldin: $\boxed{V = A \cdot 2\pi d}$

Con $V = \pi R^2 H - \frac{4}{3}\pi r^3 = 33.51 \cdot 10^6\ mm^3$ y $A = RH - \frac{1}{2}\pi r^2 = 44292\ mm^2$

$$\Rightarrow \boxed{d} = \frac{V}{A \cdot 2\pi} = \boxed{120.4 \text{ mm}}$$



b) Repitiendo la operación girando alrededor de un eje vertical que pase por el lado izquierdo:

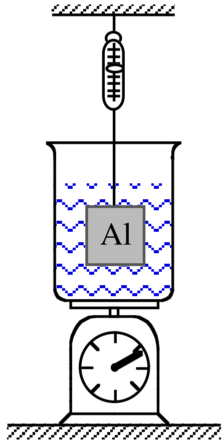
$$\boxed{V' = A \cdot 2\pi s}$$

A es la misma queque en el caso anterior: $A = RH - \frac{1}{2}\pi r^2 = 44292\ mm^2$

y $s = \mathrm{R} - d = 79.6$ mm

$$\Rightarrow \boxed{V'} = 44292 \cdot 2\pi \cdot 79.6 = \boxed{22.15 \cdot 10^6 \text{ mm}^3}$$

c) En los dos casos hemos utilizado el segundo teorema de Pappus Guldin que junto con el primero sirven para calcular la posición de C.M. de alambres o placas planas, así como superficies o volúmenes de revolución. No son válidos cuando el eje de rotación corta el alambre o la placa que gira, o cuando el alambre o la placa son no homogéneos.

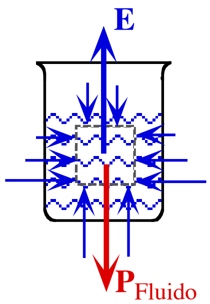


4) a) Enunciar y razonar el principio de Arquímedes **(0.5)**.

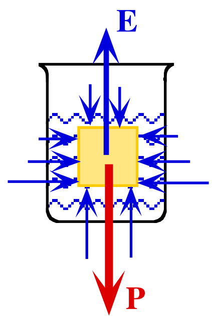
b) Tenemos un bloque de aluminio de 2 kg (densidad 2.7 g/cm^3) colgado de una balanza de muelle (ver figura). Sobre una balanza de platillo descansa un recipiente de 1.5 kg en cuyo interior hay 1kg de agua. ¿Cuales serán las lecturas de las balanzas de muelle y de platillo cuando se sumerja el bloque de aluminio en el agua como se indica en la figura? **(0.5)**.

SOLUCION

a) El principio de Arquímedes dice que todo cuerpo sumergido en el seno de un fluido experimenta una fuerza ascensorial (empuje) igual al peso del volumen desalojado.



Una demostración sencilla es considerar un fluido en reposo en el que aislamos mentalmente un volumen de fluido igual al volumen del objeto. Ese volumen de fluido esta en reposo, y sin embargo tiene un peso que actúa sobre su centro de masas. Este volumen imaginario esta en equilibrio debido a las fuerzas de la presión que ejerce el resto del fluido sobre su superficie: la presión es mayor en la parte inferior originando una fuerza neta (el empuje) que se opone al peso.

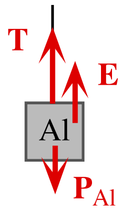


Si ahora sustituimos nuestro volumen imaginario por el objeto de igual forma, la presión en el fluido no cambia, por lo que las fuerzas que origina sobre la superficie del objeto son las mismas que en caso anterior y por lo tanto son iguales al peso del fluido desalojado, llevando sentido contrario.

b) Primero calculamos el empuje sobre el bloque de aluminio. Para calcularlo, hay que determinar el volumen del aluminio: $V_{al} = m_{al}/\rho_{al} = 2 / 2700 = 7.407\ 10^{-4}\ m^3$

$$\boxed{E = V_{al}\ \rho_{ag}\ g = 7.4\ 10^{-4}\ 1000\ g = 0.74\ g\ \ N}$$

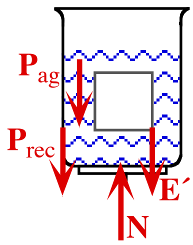
Sobre el bloque de aluminio actúan tres fuerzas, la tensión, el peso y el empuje. Como está en equilibrio se cumple:



$$T + E - P_{al} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{T = P_{al} - E\ = 2\ g - 0.74\ g = 1.26\ g\ N}$$

Lo que marca la balanza de muelle en kg es la T/g $\Rightarrow$ $\boxed{m_{muelle} = 1.26\ kg}$

Si el agua ejerce un empuje E sobre el aluminio, el aluminio ejerce una reacción E´ sobre el agua. Las fuerzas que actúan sobre al base del platillo son el peso del agua, el peso del recipiente, E´ y la normal N.



$$N - P_{ag} - P_{rec} - E' = 0 \quad \Rightarrow \boxed{N = P_{ag} + P_{rec} + E' = 1\ g + 1.5\ g + 0.74\ g = 3.24\ g\ N}$$

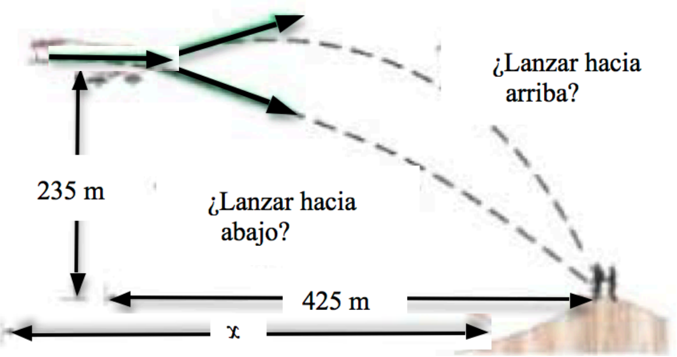
Lo que marca la balanza de platillo en kg es la N/g $\Rightarrow$ $\boxed{m_{platillo} = 3.24\ kg}$

Como comprobación, entre las dos balanzas tienen que soportar todo el peso (aluminio, recipiente y agua. Efectivamente, la masa total de los tres objetos es de 4.5 kg, y lo que marcan las balanzas es

$$3.24 + 1.26 = 4.5\ kg$$

PROBLEMAS

Un avión de rescate quiere dejar caer suministros a alpinistas aislados en un cerro 235 m más abajo. Si el avión se desplaza horizontalmente con una velocidad de 250 km/h, a) ¿con cuánta anticipación respecto de los alpinistas (distancia horizontal) debe ser soltada la mercancía? b) Supongamos, en cambio, que el avión libera el suministro a una distancia horizontal de 425 m antes de los alpinistas. ¿Qué velocidad vertical (hacia arriba o abajo) deben recibir los suministros para que lleguen precisamente a la posición de los alpinistas? c) ¿Con qué velocidad los suministros aterrizan en este último caso? d) ¿cuáles son las componentes normal y tangencial de la aceleración de los suministros en el momento en que están a punto de impactar contra el suelo?



a) Tomemos el origen de coordenadas justo debajo del avión cuando deja caer el paquete y pongamos a cero nuestro cronómetro en dicho instante. Llamando h a la altura desde la que se sueltan los paquetes y teniendo en cuenta que al dejarlos simplemente caer su velocidad horizontal será la del avión:

$$x(t) = v_{0x}t \qquad y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v_x(t) = v_{0x} \quad v_y(t) = -gt$$

El tiempo que tardan los paquetes en llegar a su objetivo será:

$$y(t_{suelo}) = 0 \quad \Rightarrow \quad h - \frac{1}{2}gt_{suelo}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{suelo} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 6.93 \text{ s}$$

y la distancia que habrán recorrido horizontalmente será: $d = x(t_{suelo}) = v_{0x}t_{suelo} = 481 \text{ m}$

b) Como la distancia horizontal d ahora es menor que antes, el paquete tardará menos en desplazarse horizontalmente y llegar a los alpinistas. Es necesario darles una velocidad vertical inicial hacia abajo, de forma que tarde menos en caer. Podemos encontrar dicha velocidad partiendo de:

$$x(t) = v_{0x}t \quad y(t) = h + v_{0y} - \frac{1}{2}gt^2 \quad v_x(t) = v_{0x} \quad v_y(t) = v_{0y} - gt$$

El tiempo en llegar al suelo recorriendo la distancia horizontal d será: $t_{suelo} = \dfrac{d}{v_{0x}} = 6.12 \text{ s}$

En ese momento la altura será nula: $y(t_{suelo}) = 0 \quad \Rightarrow \quad h + v_{0y}t_{suelo} - \frac{1}{2}gt_{suelo}^2 = 0 \quad \Rightarrow$

$v_{0y} = \left(\frac{1}{2}gt_{suelo}^2 - h\right) / t_{suelo} = -8.41 \text{ m/s}$ $\Rightarrow$ La componente vertical de velocidad es negativa.

c) La v con la que llegan los suministros será: $\vec{v}_{suelo} = (v_{0x}, v_{0y} - gt_{suelo}) = (69.4, -68.4) \text{ m/s}$

$v_{suelo} = 97.5 \text{ m/s}, \quad \theta = 44.6^{\circ}$ por debajo de la horizontal

d) La aceleración tangencial es la proyección de la aceleración de los suministros (que es la de la gravedad en la dirección de la velocidad: $a_{t,suelo} = \vec{g} \cdot \left(\frac{\vec{v}_{suelo}}{v_{suelo}}\right) = 6.88 \text{ m/s}^2$

La aceleración normal será: $g = a_{suelo} = \sqrt{a_{t,suelo}^2 + a_{n,suelo}^2} \quad \Rightarrow \quad a_{n,suelo} = \sqrt{g^2 - a_{t,suelo}^2} = 6.98 \text{ m/s}^2$

2) Tenemos dos poleas sobre mismo eje, de masas M_1 y M_2 y radios R_1 y R_2, se supone que tienen sus masas repartidas de forma uniforme sobre las llantas respectivas y están acopladas formando una sola polea de momento de inercia I. De los hilos arrollados sobre dichas poleas penden las masas m_1 y m_2. El sistema se deja libre sin velocidad inicial. Calcular:

a) Representa las fuerzas que actúan sobre las masas y las poleas.

b) Determinar la aceleración angular de las poleas.

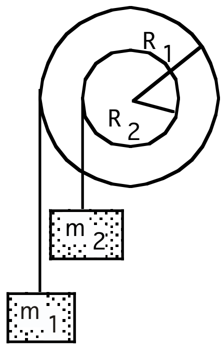
c) Determinar las aceleraciones de m_1 y m_2.

d) Determinar las tensiones de los hilos.

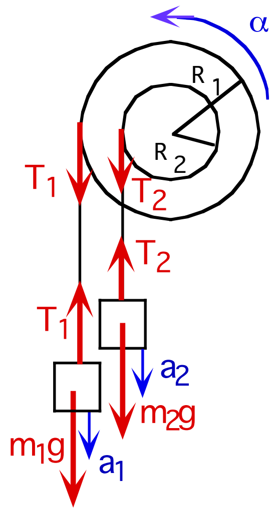
Tomando M_1 = 2kg y M_2 = 0.5 kg y radios R_1 = 24 cm y R_2 = 8 cm, m_1 = 2 kg y m_2 = 4 kg

e) Calcular el momento de inercia del conjunto formado por las dos poleas (suponer que las poleas son cilindros, si no sabéis el momento de inercia de un cilindro calcularlo).

f) f) Calcular numéricamente los valores de la aceleración angular, las aceleraciones de las masas y las tensiones de las cuerdas



a) Son las representadas en rojo en la figura



b) Aplicamos la segunda ley de Newton a las dos masas y su equivalente para la rotación a las poleas. Recordemos que las dos poleas tiene la misma aceleración angular α ($a_1= \alpha R_1$, $a_2= \alpha R_2$); además suponemos que el sentido de desplazamiento positivo de las masas es hacia abajo y por lo tanto el de la rotación el antihorario.

$T_1 R_1 + T_2 R_2 = I\alpha$

$m_1g - T_1 = m_1a_1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = m_1g - m_1a_1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = m_1g - m_1\alpha R_1$ [4]

$m_2g - T_2 = m_2a_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = m_2g - m_2a_2 \Rightarrow \quad T_2 = m_2g - m_2\alpha R_2$ [5]

Sustituyendo las tensiones en la ecuación de los momentos:

$$(m_1g - m_1\alpha R_1) R_1 + (m_2g - m_2\alpha R_2) R_2 = I\alpha \quad \Rightarrow \quad m_1g R_1 + m_2g R_2 - m_1\alpha R_1^{2} - m_2\alpha R_2^{2} = I\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha = \frac{m_1gR_1 + m_2gR_2}{I + m_1R_1^2 + m_2R_2^2}}$$

c) $$a_1 = \alpha R_1 = \boxed{\frac{m_1gR_1^2 + m_2gR_2R_1}{I + m_1R_1^2 + m_2R_2^2}} \quad \text{y} \quad a_2 = \alpha R_2 = \boxed{\frac{m_1gR_1R_2 + m_2gR_2^2R_1}{I + m_1R_1^2 + m_2R_2^2}}$$

d) Las tensiones están en las ecuaciones [1] y [2]

$$\boxed{\begin{aligned} T_1 &= m_1 (g - \alpha R_1) \\ T_2 &= m_2 (g - \alpha R_2) \end{aligned}}$$

e) El momento de inercia del conjunto es la suma de los momentos de inercia de las dos poleas:

$$I = (1/2)M_1r_1^2 + (1/2)M_2r_2^2 = (1/2) \bullet 2 \bullet 0.24^2 + (1/2) \bullet 0.5 \bullet 0.08^2 = \boxed{0.0592 \text{ kgm}^2}$$

f)

$$\boxed{\alpha} = \frac{m_1 g R_1 + m_2 g R_2}{I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2} = \frac{2 \bullet 9.81 \bullet 0.24 + 4 \bullet 9.81 \bullet 0.08}{0.0592 + 2 \bullet 0.024^2 + 4 \bullet 0.08^2} = \boxed{39.24 \text{ rad/s}^2}$$

$$\boxed{a_1} = \alpha R_1 = 39.24 \bullet 0.24 = \boxed{9.42 \text{ m/s}^2}$$

$$\boxed{a_2} = \alpha R_2 = 39.24 \bullet 0.08 = \boxed{3.14 \text{ m/s}^2}$$

$$\boxed{T_1} = m_1 (g - \alpha R_1) = 2\,(9.81 - 39.24 \bullet 0.24) = \boxed{0.78 \text{ N}}$$

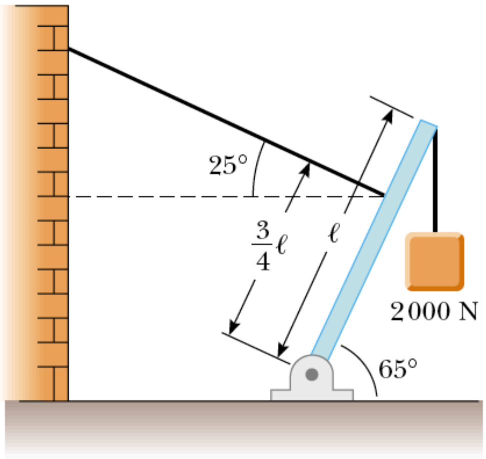
$$\boxed{T_2} = m_2 (g - \alpha R_2) = 4\,(9.81 - 39.24 \bullet 0.24) = \boxed{26.68 \text{ N}}$$

3) La Una viga de izamiento, uniforme, de 1200 N de peso, está sostenida por un cable como se ve en la figura. La viga hace pivote en la parte inferior, y un cuerpo de 2000 N cuelga de su parte superior.

a) Encuentre la tensión del cable **(0.5)**.

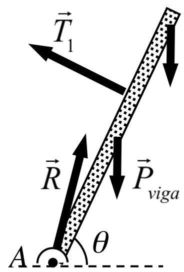
b) Encuentre la reacción ejercida por el pivote o articulación sobre la viga **(0.5)**.

c) Si hubiésemos considerado una viga de peso despreciable (masa de la viga nula a efectos de cálculo) explique cuál debería ser la dirección de la reacción en la articulación **(0.5)**



d) determine el módulo de dicha reacción y de la tensión en el cable en este caso **(0.5)**

Aplicando las condiciones de la estática al objeto colgado es fácil ver que la tensión en su cuerda debe equilibrar a su peso para que no se mueva (T_2 = 2000 N). Dibujando el diagrama de fuerzas sobre la viga y calculando momentos respecto del punto A:



$$\sum_i \vec{\tau}_{i,A} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1\left(\frac{3}{4}l\right) - P_{viga}\frac{l}{2}\cos\theta - T_2 l\cos\theta = 0$$

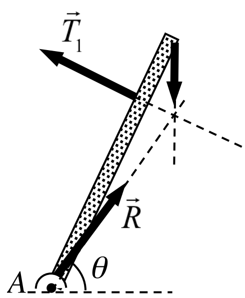
$$\Rightarrow \quad T_1 = \frac{4}{3}\left(\frac{P_{viga}}{2} + T_2\right)\cos\theta = \boxed{1465\ \text{N}}$$

a) Imponiendo que la suma de fuerzas sobre la viga sea nula:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P}_{viga} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} R_x - T_1 \,\text{sen}\,\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x = \boxed{1328\ \text{N}} \\ R_y + T_1\cos\theta - T_2 - P_{viga} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_y = \boxed{2581\ \text{N}} \end{array} \right.$$

b) Si el peso de la viga fuese despreciable sólo tendríamos tres fuerzas actuando sobre ésta con lo que las tres deberían ser concurrentes como se muestra en la figura



c) Haciendo $P_{viga} = 0$ en las expresiones de los apartados a) y b):

$$T_1 = \frac{4}{3}T_2\cos\theta = \boxed{1127\ \text{N}}$$

$$R_x = T_1 \,\text{sen}\,\theta = \boxed{1021\ \text{N}}$$

$$R_y = -T_1\cos\theta + T_2 = \boxed{1524\ \text{N}}$$