EXAMEN DE FISICA I (GTI) 18-2-2021

1) **a)** Define el momento de un vector respecto a un punto **(0.2)**.

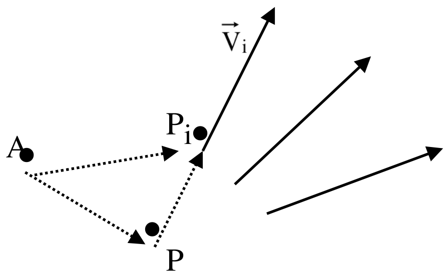
b) Enuncia (**0.2**) y demuestra (**0.6**) el teorema de Varignon para un sistema de vectores concurrentes.

SOLUCION:

a) El momento de un vector $\vec{V}$ respecto a un punto A, es el producto vectorial del vector que va del punto A al origen del vector P con el propio vector $\vec{V}$.

$$\boxed{\vec{M}_A\vec{V} = \vec{AP} \times \vec{V}}$$

b) El teorema de Varignon dice que el momento de un sistema de vectores concurrentes (momento resultante) es igual al momento de la resultante aplicado en el punto de concurrencia.



Si tenemos un sistema de n vectores concurrentes $\vec{V}_i$, cada uno de ellos aplicado en un punto P_i, y que concurren en un punto P, el momento del sistema respecto a un punto A es:

$$\vec{M}_A = \sum_{i=1,n} \vec{AP}_i \wedge \vec{V}i = \sum_{i=1,n} (\vec{AP} + \vec{PP}_i) \wedge \vec{V}i = \sum_{i=1,n} \vec{AP} \wedge \vec{V}i + \sum_{i=1,n} \vec{PP}_i \wedge \vec{V}i$$

Sacando factor común a $\vec{AP}$ y teniendo en cuenta que $\vec{PP}_i$ es paralelo a $\vec{V}_i$ y por lo tanto $\vec{PP}_i \wedge \vec{V}i = 0$ para todos los vectores i,

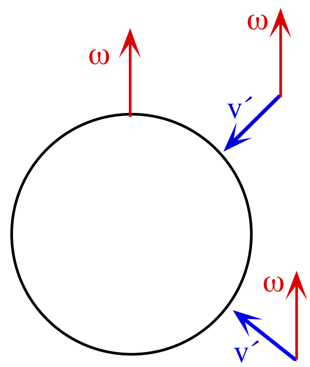
$$\boxed{\vec{M}_A = \vec{AP} \wedge \sum_{i=1,n} \vec{V}i = \vec{AP} \wedge \vec{R}}$$

2) Recordando que la relación entre la aceleración de la gravedad observada desde la Tierra ($\vec{g}$) y la que ve un observador inercial ($\vec{g}_0$) es: $\vec{g} = \vec{g}_0 - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

a) Explica cómo es la aceleración de **Coriolis** de un cuerpo que **cae verticalmente**. ¿En qué puntos de la superficie es máxima y mínima? ¿Qué diferencias hay entre el hemisferio norte y el hemisferio sur? **(0.5)**.

b) Explica cómo es la aceleración de **Coriolis** de un cuerpo que se **mueve horizontalmente** sobre la superficie terrestre ¿Qué diferencias hay entre el hemisferio norte y el hemisferio sur? Pon dos ejemplos de sus consecuencias **(0.5)**.

SOLUCION:



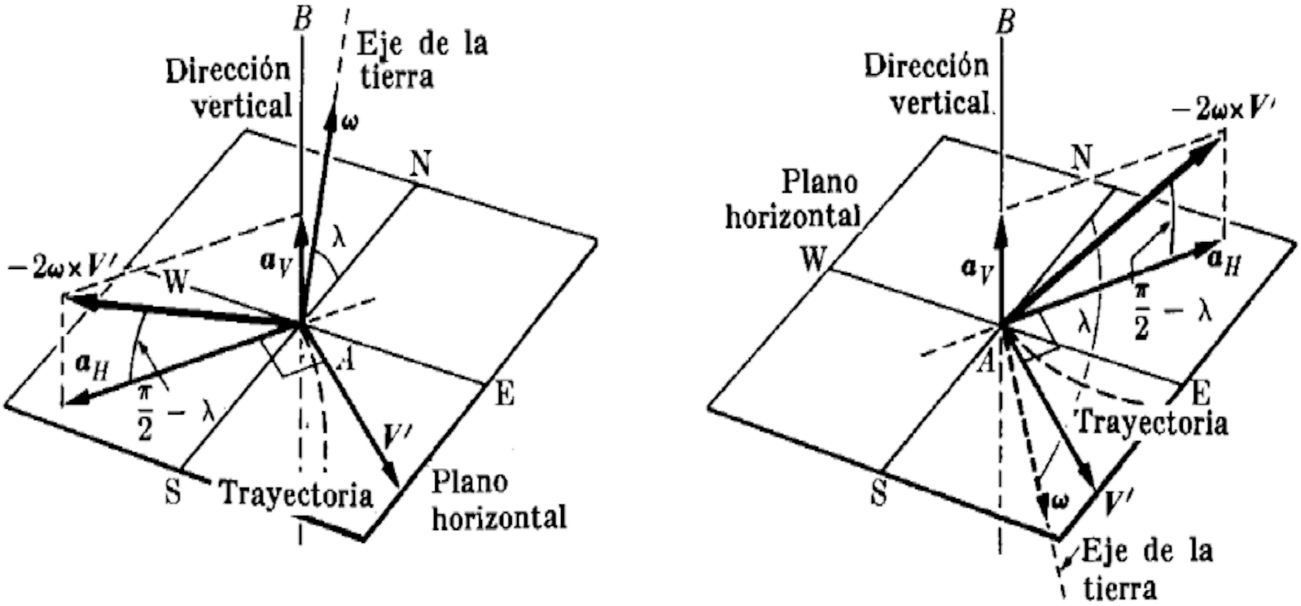
a) En esta cuestión solamente consideraremos los efectos asociados a **v´**, que dan lugar a la aceleración de Coriolis, y no describiremos los asociados a la posición "**r**" que dan lugar a la aceleración centrifuga.

Si la figura representa un corte de la Tierra, el producto vectorial de (**ω** x **v´**), es un vector perpendicular al papel que sale hacia nosotros. Como la aceleración de Coriolis lleva un signo menos, el vector entrara hacia el papel, es decir, va dirigido hacia el Este.

Esto sucede tanto en el Hemisferio Norte como en el Sur, es decir los efectos son iguales.

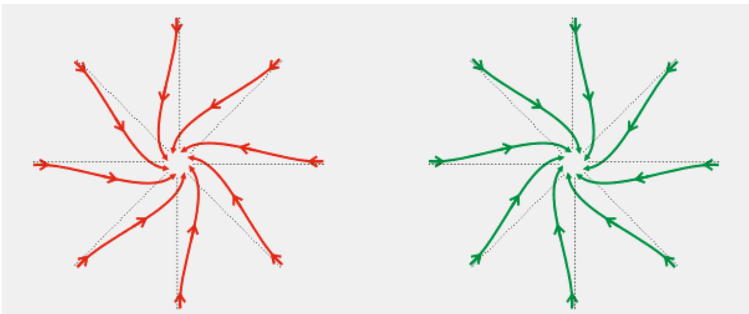
Como **ω** es constante, para un mismo valor de **v´,** la aceleración de Coriolis será máxima cuando **ω** y **v´** formen 90 grados, es decir en el ecuador y mínima cuando formen 0 o 180 grados, es decir en los Polos.

b) Cuando un objeto se mueve horizontalmente en el hemisferio norte con una velocidad **v´** respecto a la superficie de la Tierra, la aceleración de Coriolis es un vector que sale de la superficie Terrestre y que tiene una componente horizontal dirigida hacia al derecha del movimiento, ver figura a). Si nos encontramos en el hemisferio sur, la aceleración de Coriolis también sale de la superficie Terrestre, pero la componente horizontal va dirigida hacia la izquierda, ver figura b).

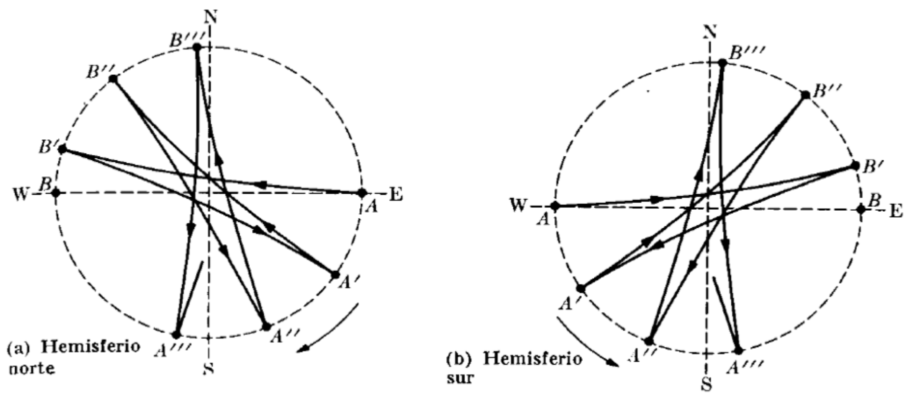


(a) Hemisferio norte (b) Hemisferio sur

Una consecuencia de la aceleración de Coriolis es el giro de los huracanes, que lleva sentido antihorario en el hemisferio norte y horario en el sur.



Otro ejemplo es el movimiento del plano de rotación de un péndulo (Péndulo de Foucault), que gira en sentido horario en el hemisferio norte y antihorario en el sur.



(a) Hemisferio norte (b) Hemisferio sur

3) MUELLE VERTICAL: Colgamos un muelle de longitud inicial Lo y masa despreciable de un techo. Si en la parte inferior del muelle situamos una masa M de modo que el conjunto queda en reposo.

a) ¿Cuánto se estira el muelle? **(0.2)**

Si desplazamos la masa una distancia b de esta nueva posición de equilibrio y soltamos

b) Explica el tipo de movimiento que realiza **(0.2).**

c) Encuentra la ecuación del movimiento **(0.6).**

SOLUCION:

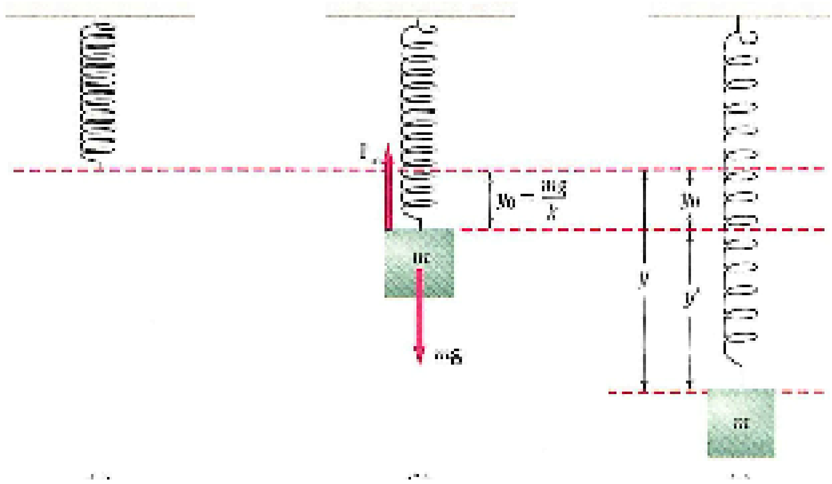
a) El muelle estará en equilibrio estático para una posición y_0 que cumpla:

$$mg - ky_0 = 0 \qquad (3.1)$$

$$\boxed{y_0 = \frac{mg}{k}}$$

b) La masa realizara un movimiento armónico simple (MAS) entorno a la nueva posición de equilibrio, por lo que la amplitud será b. Además, la frecuencia angular es como la de una mas unida a un muelle horizontal: $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$

c) Para encontrar la ecuación del movimiento aplicamos la segunda ley de Newton cuando la masa esta oscilando en una posición cualquiera $y = y_0 + y'$



$$mg - k\,y = m\,a \Rightarrow \quad mg - k\,(y_0 + y') = m\,a \quad \Rightarrow \quad mg - k\,y_0 - ky' = m\,a$$

Teniendo en cuenta la ecuación (3.1)

$$-ky' = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{d^2(y_0 + y')}{dt^2} = m\frac{d^2y'}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{k}{m}y' = = 0$$

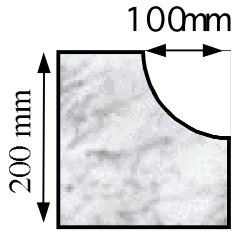
Nos queda una ecuación diferencial de 2º orden cuya solución es $y' = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right)$

El efecto de la gravedad es desplazar la posición de equilibrio. El muelle realizara un MAS entorno a esta nueva posición de equilibrio (y_0) con el mismo T que el de un muelle horizontal. En este caso, si respecto a esta posición hemos estirado el muelle una longitud b, la amplitud será A = b y por lo tanto:

$$\boxed{y' = b\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right)}$$

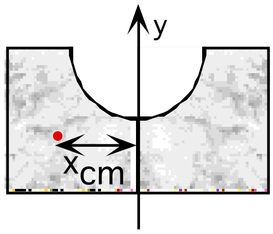
4) Determinar la posición del centro de masas de la placa homogénea de la figura (cuadrado al que se le ha quitado un cuarto de círculo).

Nota, recordar que: $S_{disco} = \pi R^2$, $S_{esfera} = 4\pi R^2$, $V_{esfera} = (4/3)\pi R^3$



SOLUCION

La forma mas fácil de calcular el centro de masas es aplicando el segundo teorema de Papus Guldin para volúmenes de revolución:



$$V = 2\pi\, x_{cm}\, S \qquad [1]$$

Si hacemos girar la superficie entorno al eje y tal como muestra la figura, se genera un volumen que es el de un cilindro de radio 200 mm menos el de media esfera de radio 100 mm.

$$V = \pi\, 200^2\, 200 - (1/2)\,(4/3)\,\pi\, 100^3 = 8\,\pi 10^6 - (2/3)\,\pi\, 10^6 = \boxed{(22/3)\,\pi 10^6 \ \ mm^3}$$

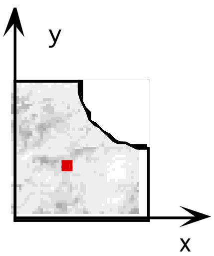
La superficie generadora es la de un cuadrado menos la de un cuarto de circulo

$$S = 200^2 - (1/4)\ \pi\, 100^2 = \boxed{32146\ mm^2}$$

Utilizando la ecuación [1] $\quad x_{cm} = \dfrac{V}{2\pi S} = \dfrac{23.038\ 10^6}{2\pi\, 32146} = \boxed{114.06\ mm}$

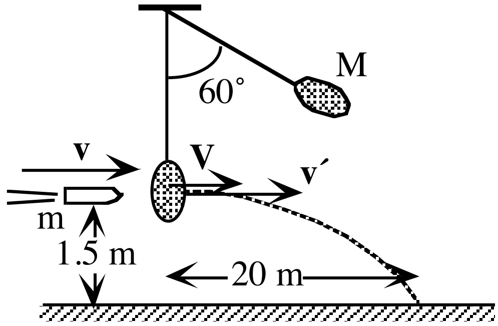
Por simetría, el centro de masas se encuentra a la misma distancia del borde superior.

Por lo tanto, si definimos un sistema de ejes tal como muestra la figura, las coordenadas del centro de masas serian:



$$x_{cm} = 200 - 114.06 = 85.94\ mm$$
$$y_{cm} = 200 - 114.06 = 85.94\ mm$$

También se podría calcular considerando la placa como un cuadrado menos un cuarto de circulo.



1) Un saco de arena de 4 kg de masa pende de un hilo de 0.6 m de longitud. Sobre el saco se dispara un fusil cuya bala tiene una masa de 40 g. La bala atraviesa el saco y recorre una distancia de 20 m antes de pegar en el suelo que se encuentra 1.5 m por debajo del impacto en el saco. El saco oscila alcanzando un ángulo máximo de 60°. Determinar:

a) La velocidad de la bala después del choque **(0.3)**.
b) La velocidad del saco después del choque **(0.3)**.
c) La velocidad de la bala antes del choque **(0.3)**.
d) La energía mecánica perdida por el sistema al atravesar la bala el saco **(0.3)**.
e) La fuerza ejerce la arena sobre la bala **(0.3)**. (Suponer que la anchura del saco es de 10 cm, la fuerza es constante y el desplazamiento del saco mientras es atravesado por la bala es despreciable)
f) El ángulo máximo que alcanzaría el saco si la bala quedase incrustada en la arena **(0.3)**.
g) La energía mecánica perdida por el sistema en este caso **(0.2)**.

SOLUCION:

a) La bala realiza un movimiento parabólico partiendo de una velocidad horizontal v'. Las ecuaciones del desplazamiento horizontal y vertical son:

$$\begin{cases} x = v'\,t & \Rightarrow \quad v' = x/t \quad \Rightarrow \quad \boxed{v' = x(g/2y)^{1/2} = 20\bullet(9.81/(2\bullet1.5))^{1/2} = 36.17 \text{ m/s}} \\ y = (1/2)gt^2 & \Rightarrow \quad t = (2y/g)^{1/2} \end{cases}$$

b) Para conocer la velocidad del saco, hay que aplicar el principio de conservación de la energía entre el punto de impacto, de altura h= 0 y velocidad V y el punto de máximo desplazamiento en altura (h = L – Lcosθ) y velocidad 0:

$$(1/2)MV^2 = MgL(1 - \cos\theta) \quad \Rightarrow \boxed{V = [2gL(1\text{-}\cos\theta)]^{1/2} = [20\bullet9.81\bullet0.6\,(1\text{-}\cos60)]^{1/2} = 2.426 \text{ m/s}}$$

c) Para calcular la velocidad de la bala antes del choque, tenemos que aplicar el principio de conservación del momento lineal:

$$mv = mv' + MV \quad \Rightarrow \boxed{v = v' + VM/m = 36.17 + 2.426\bullet4 / 0.04 = 278.77 \text{ m/s}}$$

d) Para calcular la energía mecánica perdida, tenemos que aplicar el principio de conservación de la energía:

$$E_{mi} + W_{nocon} = E_{mf} \Rightarrow W_{nocon} = E_{mf} - E_{mi} = (1/2)mv'^2 + (1/2)MV^2 - (1/2)mv^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{W_{nocon} = (1/2)0.04\bullet36.17^2 + (1/2)4\bullet2.426^2 - (1/2)0.04\bullet278.77^2 = -1516.3 \text{ Julios}}$$

e) Si suponemos que la fuerza que actúa sobre la bala es constante, también lo será la aceleración a, por lo que podemos aplicar la ecuación del movimiento uniformemente acelerado:

$$v'^2 - v^2 = 2\,a\,e \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v'^2 - v^2}{2\,e}$$

y $$\boxed{F} = m\,a \;=\; a = m\,\frac{v'^2 - v^2}{2\,e} = 0.04\,\frac{36.17^2 - 278.77^2}{2 \cdot 0.1} = \boxed{-\,15280.1\ \text{N}}$$

f) Tenemos que aplicar el principio de conservación del momento teniendo en cuenta que después del impacto, tanto la velocidad del saco como la de la bala serán iguales y de valor V:

$$mv \;=\; (m + M)\,V \;\Rightarrow\; \boxed{V} = \frac{mv}{m+M} = \frac{0.04 \cdot 278.77}{0.04 + 4} \;=\; \boxed{2.76\ \text{m/s}}$$

A continuación aplicamos el principio de conservación de la energía entre el punto de impacto (solo tiene Ec) y el de máximo desplazamiento angular (solo tiene Ep)

$$\frac{1}{2}\,(m+M)\,V^2 \;=\; (m+M)\,g\,L\,(1-\cos\theta) \quad\Rightarrow\quad \cos\theta = 1 - \frac{V^2}{2\,g\,L} = 1 - \frac{2.76^2}{2 \cdot 9.81 \cdot 0.6} \;=\; 0.3529 \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\theta \;=\; 69.33^\circ}$$

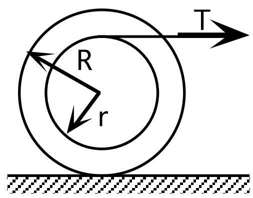
g) Para determinar la perdida de energía al quedar incrustada la bala, calculamos las diferencias de energías cinéticas antes y después del impacto (en ese instante la energía potencial no varia) tal como se hizo en el apartado d:

$$E_{mi} + W_{nocon} = E_{mf} \;\Rightarrow\; W_{nocon} = E_{mf} - E_{mi} \;=\; (1/2)(M+m)V^2 - (1/2)mv^2 \;\Rightarrow$$

$$\boxed{W_{nocon}} \;=\; (1/2)4.04 \cdot 2.76^2 - (1/2)0.04 \cdot 278.77^2 \;=\; 15.39 - 1554.25 = \boxed{-1538.86\ \text{Julios}}$$

---

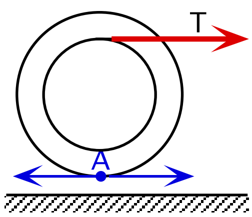
2) Un cilindro homogéneo pesado tiene un masa m y un radio R. Se ve acelerado por una fuerza T que se aplica mediante una cuerda arrollada a lo largo de un tambor ligero de radio r unido al cilindro (ver figura). El coeficiente de rozamiento estático es suficiente para que el cilindro ruede sin deslizar.
a) Representar todas las fuerzas que actúan sobre el cilindro (0.2).
b) Hallar la fuerza de rozamiento en función de los datos (T, r, R y m) (0.5).
c) Hallar la aceleración a del centro del cilindro en función de los datos (T, r, R y m) (0.5).
d) Es posible escoger r de modo que a sea mayor que T/m? ¿Cómo? (0.5).
e) ¿Cuál es el sentido de la fuerza de rozamiento en la circunstancia descrita en el apartado d? (0.3).



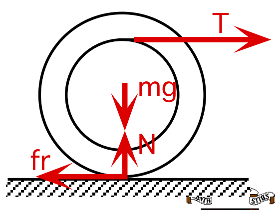
Nota: el momento de inercia del cilindro respecto a su eje es: $I = ½\, mR^2$

SOLUCION

a) La tensión produce una traslación del centro de masas y una rotación entorno al mismo. En ausencia de suelo, dependiendo del valor de r, el efecto de la rotación es mayor o menor que el de la traslación por lo que el punto A podría tratar de ir hacia la izquierda o derecha respectivamente. El suelo ejerce una fuerza de rozamiento que evita que dicho punto “deslice”, y podrá llevar el mismo sentido que la tensión o el contrario dependiendo de que A trate de ir hacia la izquierda o hacia la derecha respectivamente.



Si suponemos que el punto A trata de moverse (deslizar) en la dirección de la tensión, la fuerza de rozamiento se opone a este movimiento (deslizamiento), por lo que las fuerzas que actúan son las de la figura:



b) Traslación: $T - f_r = ma_{cm}$ $\Rightarrow$ $a_{cm} = (T - f_r)/m$ (2.1)

Rotación: $Tr + f_r R = I\alpha$ $\Rightarrow$ $Tr + f_r R = (1/2)mR^2 (a_{cm}/R)$ (2.2)

Hemos utilizado las relaciones $I = (1/2)mR^2$ y como rueda sin deslizar: $\alpha = a_{cm}/R$. Sustituyendo a_{cm} (ecuación 2.1) en la ecuación 2.2:

$$Tr + f_r R = (1/2)mR^2 (T - f_r)/Rm = (1/2)R(T - f_r) = RT/2 - Rf_r/2 \Rightarrow$$

Pasando los términos con f_r al primer miembro de la ecuación y los de T al segundo:

$$f_r R + Rf_r/2 = RT/2 - Tr \Rightarrow f_r (R + R/2) = T(R/2 - r) \Rightarrow f_r (3/2)R = T(R/2 - r) \Rightarrow$$

$$\boxed{f_r = T\frac{(R - 2r)}{3R}} \qquad (2.3)$$

c) Introduciendo el valor de la f_r en la ecuación 2.1

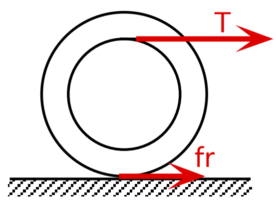
$$a_{cm} = (T - f_r)/m = \frac{T - T\frac{(R-2r)}{3R}}{m} = \frac{T\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{2r}{3R}\right)}{m} = \frac{T\left(\frac{2}{3} + \frac{2r}{3R}\right)}{m} \Rightarrow$$

$$\boxed{a_{cm} = \frac{2}{3}\frac{T}{m}\left(1 + \frac{r}{R}\right)}$$

d) si $a_{cm} > T/m \Rightarrow \frac{2}{3}\frac{T}{m}\left(1 + \frac{r}{R}\right) \rangle \frac{T}{m} \Rightarrow \left(1 + \frac{r}{R}\right) \rangle \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{r}{R}\right) \rangle \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{r > (R/2)}$

Por lo tanto si es posible, siempre que $r > (R/2)$.

d) El que la a_{cm} sea mayor que T/m solo puede ser debido a que existe otra fuerza que acelera aun mas el centro de masas del cilindro al actuar en la misma dirección que la tensión, y esta fuerza es la f_r. Así pues, cuando $r > (R/2)$ la f_r lleva el mismo sentido que la tensión, de hecho en la ecuación 2.3, si $r > (R/2)$ la fr sale negativa, lo que significa que tiene sentido contrario al tomado inicialmente en la figura superior.



3) El extremo de un canal de agua está formado por una placa ABC que está articulada en B y tiene 1.2 m de ancho. Sabiendo que b = 600 mm y h = 450 mm, hallar:

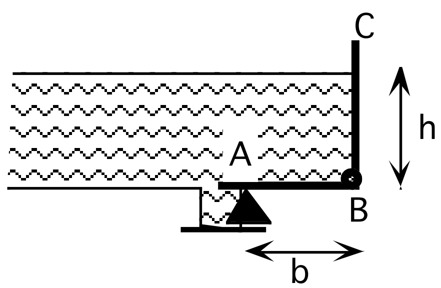
a) La presión absoluta en el punto A. **(0.2)**

b) La fuerza neta ejercida por el agua sobre el lado AB. **(0.2)**

c) La fuerza neta ejercida por el agua sobre el lado BC y el punto de aplicación de la misma. **(0.6)**

d) Las reacciones en A y B. (0.6)

e) Calcular la relación h/b para la cual la reacción en A es nula. (0.4)

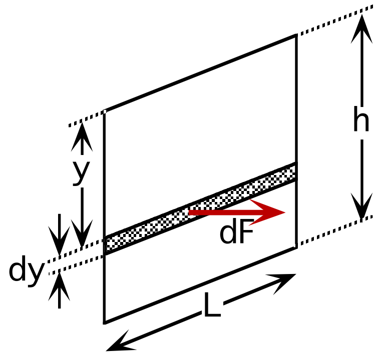


SOLUCION:

a) La presión absoluta es la suma de la presión atmosférica (Patm) mas la debida al agua:

$$P = Patm + \rho g H = 1.013 \bullet 10^5 + 10^3 \bullet 9.81 \bullet 0.45 = 1.013 \bullet 10^5 + 0.044 \bullet 10^5 \Rightarrow \boxed{P = 1.057\ 10^5 \text{ Pascales}}$$

b) Como por la parte inferior del lado AB actúa la Patm, la fuerza neta que actúa sobre ese AB es la debida a la presión del agua: F_{AB} = (P-Patm) Area = ρgh Area = $0.0441 \bullet 10^5 \bullet 0.6 \bullet 1.2 \Rightarrow \boxed{F_{AB} = 3175 \text{ N}}$



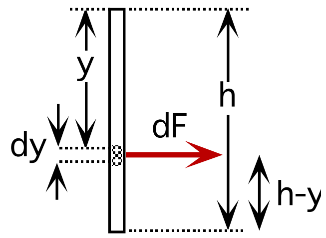
c) Como Patm actúa en ambos lados de la parte BC, la fuerza absoluta sobre la misma será únicamente debida a la presión ejercida por el agua, que a una profundidad y es P= ρgy. Si consideramos una franja de la presa de altura dy y longitud L, toda ella situada a una profundidad y, la fuerza que actúa sobre la misma será:

$$dF = Pds = PLdy = \rho gy\ Ldy$$

Para calcular la fuerza total sobre la presa debemos integrar dF entre la superficie del agua y el extremo inferior de la presa:

$$\boxed{F_{BC}} = \int_0^h \rho\, g\, y\, L\, dy = \rho\, g\, L \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h = \boxed{(1/2)\, \rho\, g\, L\, h^2} \Rightarrow \boxed{F_{BC}} = (1/2)\ 10^3 \bullet 9.81 \bullet 1.2 \bullet (0.45)^2 = \boxed{1192 \text{ N}}$$

El punto de aplicación de la fuerza F sobre la presa será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos)



El momento <u>respecto a un punto del fondo</u> B de un dF actuando sobre una franja a una profundidad y será:

$$dM= dF(h-y)= \rho gy\ Ldy\ (h-y)$$

donde hemos tomado el valor de dF calculado en el apartado anterior. Para calcular el momento total, integramos entre el borde superior e inferior de la presa:

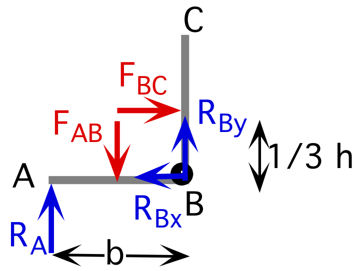
$$M = \int_0^h \rho\, gyL\,(h-y)\, dy = \rho\, gL \int_0^h (hy-y^2)\, dy = \rho\, gL\left(h\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h\right) = \rho\, gL\left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{M = (1/6)\ \rho g L h^3}$$

Si el punto de aplicación esta a una altura d respecto a la parte inferior de la presa, tiene que verificarse que

$$F_{BC} d = M \Rightarrow$$

$$d = \frac{M}{F_{BC}} = \frac{(1/6)\,\rho\, g\, L\, h^3}{(1/2)\,\rho\, g\, L\, h^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = (1/3)\, h \;=\; 0.15\ \text{m}}$$



c) Las fuerzas que actúa sobre la placa se muestran en la figura:
F_{BC} trata de girar la placa en sentido horario, mientras que F_{AB} lo intenta en sentido contrario. Si el momento de esta última es mayor, apoya en el punto A, originando que aparezca la reacción R_A.

Calculando momentos respecto al punto B; $\sum M_B = 0 \;\Rightarrow$

$$R_A b + F_{BC}(h/3) - F_{AB}\,(b/2) = 0 \;\Rightarrow$$

$$R_A = F_{AB}/2 - F_{BC}(h/3b) \;=\; 3175 / 2 \;-\; 1192(0.45 / 3 \bullet 0.6) \Rightarrow \quad \boxed{R_A = 1289.5\ \text{N}}$$

Posteriormente aplicamos que la suma de fuerzas tiene que ser cero:

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; F_{BC} - R_{Bx} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{R_{Bx} = F_{BC} = 1192\ \text{N}}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; R_{By} + R_A - F_{AB} = 0 \;\Rightarrow\; R_{By} = F_{AB} - R_A \Rightarrow \quad \boxed{R_{By} = 3175 - 1289.5 = 1885.5\ \text{N}}$$

d) Si $R_A = 0 \;\Rightarrow F_{BC}(h/3) - F_{AB}\,(b/2) = 0 \;\Rightarrow\; (1/2)\,\rho\, g\, L\, h^2\,(h/3) = \rho\, g\, h\, L\, b\,(b/2) \;\Rightarrow$

Dividiendo por $\rho\, g\, L$: $\Rightarrow\; (1/6)\, h^3 = (1/2)\, b^2 h \;\Rightarrow\; h^2 = 3\, b^2 \Rightarrow \boxed{h = \sqrt{3}\, b}$