EXAMEN DE FISICA I (GTI) 21-1-2021

CUESTIONES

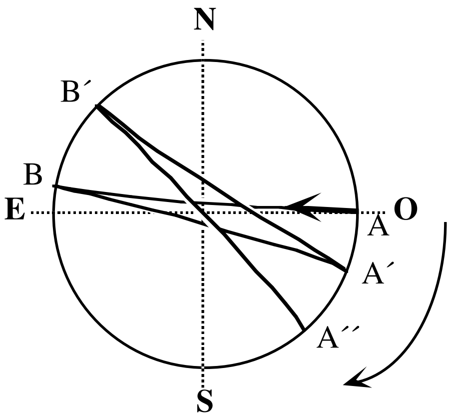
1) Péndulo de Foucault: ¿Qué es? ¿Para que sirve? ¿En que ley o principio físico se basa? Explica su funcionamiento.

SOLUCION:

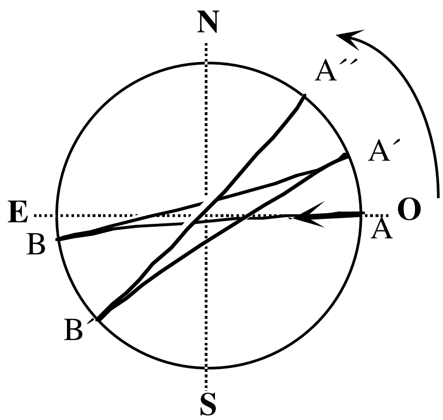
El péndulo de Foucault es un péndulo simple de gran tamaño. Foucault construyó su péndulo en 1851 y lo colgó de la Torre de los Inválidos, en París, para demostrar que la Tierra está girando. El plano de oscilación del péndulo gira 360° en 24 horas. En realidad, el plano de oscilación no es el que gira, sino la Tierra.

En el Hemisferio Norte el plano de oscilación gira en sentido horario, mientras que en el Hemisferio Sur lo hace en el antihorario. Esta variación puede entenderse en términos de la aceleración Coriolis: para un observador situado en el Hemisferio Norte, cuando el péndulo realiza una oscilación, sufre una aceleración de Coriolis ($-2\,\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}'$) dirigida hacia la derecha del movimiento, lo que hace que el plano de oscilación gire en sentido horario (ver figura).

Si nos encontramos en el Hemisferio Sur, la aceleración de Coriolis va dirigida hacia la izquierda del movimiento, lo que produce que el plano de oscilación gire en sentido antihorario (ver figura).



Hemisferio norte

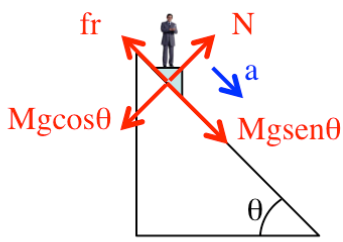


Hemisferio sur

2) Un hombre que “pesa” 70 kg a se lanza encima de una báscula por un plano inclinado 60º. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre la báscula y el plano es 0.3. Calcular:
   a) La aceleración de bajada.
   b) Lo que marca la bascula en kg.
   c) ¿Es necesario rozamiento entre la bascula y el hombre para que este no resbale? Si crees que es necesario, calcula el coeficiente de rozamiento mínimo.

SOLUCION:

a) Las fuerzas que actúan sobre el conjunto balanza–persona se muestran en la gráfica.



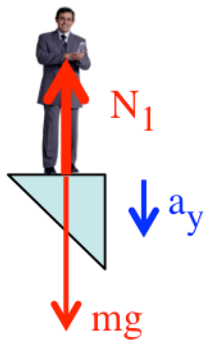
Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección de bajada y en la perpendicular:

$$\begin{cases} Mg\operatorname{sen}\theta - fr = Ma & & (1) \\ N - Mg\cos\theta = 0 \;\rightarrow & N = Mg\cos\theta & (2) \end{cases}$$

Como esta deslizando, actúa la fr máxima ➔ $fr = fr_{maxima} = \mu N = \mu Mg\cos\theta$

Introduciendo este valor de fr en la ecuación (1): $Mg\text{sen}\theta - \mu Mg\cos\theta = Ma$ ➔

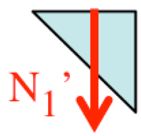
$$a = g\,(\text{sen}\theta - \mu\cos\theta) = 9.81\,(\text{sen }60 - 0.3\cos 60) = 7.024\ \text{ms}^{-2}$$



b) Sobre la persona, en la dirección vertical actúan su peso y la normal, y posee una aceleración vertical a_y ($a_y = a\,\text{sen}\theta$)

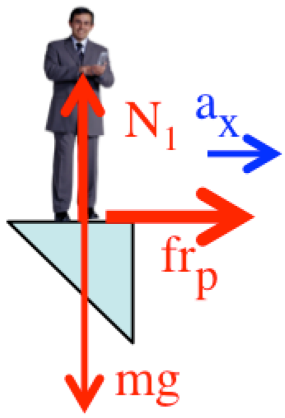
Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección vertical

$$mg - N_1 = m\,a_y \quad ➔ \quad N_1 = m\,(g - a_y) = 70\,(9.81 - 7.024\ \text{sen } 60) = 260.9\ \text{N}$$



Si la balanza empuja a la persona con N_1, por la tercera ley de Newton, la persona ejerce una fuerza sobre la balanza N_1' tal que $|N_1'| = |N_1| = 260.9$ N. Lo que marca la balanza es

$$N_1'/g = 260.9/9.81 = 26.6\ \text{kg}$$



c) Si, ya que la aceleración de la balanza tiene una componente horizontal. Si la persona no desliza, tiene que haber una fuerza horizontal que acelera a la persona, y la única fuerza horizontal que puede actuar es la fr_p entre la balanza y los pies de la persona. Además la fr_p tiene que ser menor que la máxima ($\mu_p N_1$).

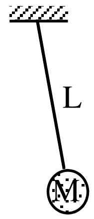
$$fr_p = m a_x = m\,a\cos 60 \le \mu_p N_1 \quad ➔$$

$$\mu_p \ge \frac{m\,a\cos 60}{N_1} = \frac{70\ 7.024\ 0.5}{260.9} = 0.942$$

3) Construimos un péndulo suspendiendo una masa M de un hilo de longitud L y masa despreciable.

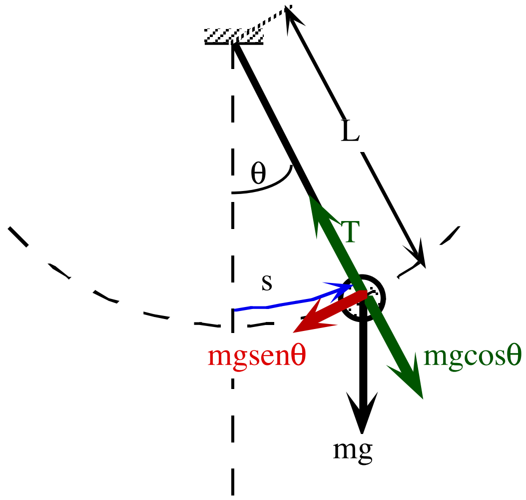
a) Demostrar el tipo de movimiento que realiza para pequeños ángulos **(0.5)**.

b) Encontrar su período **(0.5)**.



SOLUCION:

a) Al desplazar la masa de su posición de equilibrio, la componente tangencial del peso, origina una aceleración tangencial. Si aplicamos la 2º ley de Newton:



$$F_T = m\, a_T = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2} = mL\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \Rightarrow$$

$$-\, mg\text{sen}\theta = mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

El signo (-) de la fuerza se introduce ya que cuando el ángulo θ es (+) la fuerza es (-): La fuerza se opone al aumento del ángulo.

Si $\theta < 10°$ $\text{sen}\theta = \theta$ $\Rightarrow$ La ecuación anterior se transforma en:

$$-\, g\theta = L\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0}$$

Es una ecuación diferencial de 2º grado cuya solución es $\boxed{\theta = \theta_0 \cos\left(\sqrt{g/L}\; t + \alpha\right)}$

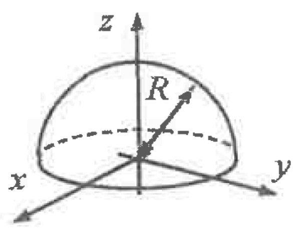
Por lo que realizara un movimiento periódico armónico simple de amplitud θ_0, fase inicial α y frecuencia angular $\omega = \sqrt{g/L}$

b) teniendo en cuenta la relación entre el período y la frecuencia angular $T = 2\pi/\omega$ $\Rightarrow$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{L/g}}$$

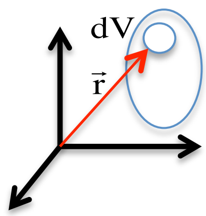
4. a) Definición de centro de masas de un sólido homogéneo.

b) ¿ Determinar el centro de masas de la semiesfera homogénea de la figura.



SOLUCION:

a) partiendo de la definición de centro de masas de un sólido: $\vec{r}_{CM} = \dfrac{\int dm\vec{r}}{\int dm}$



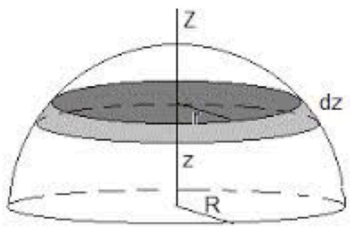
Si este es homogéneo, se transforma en: $\vec{r}_{CM} = \dfrac{\int \rho dV\,\vec{r}}{\int \rho dV} = \dfrac{\int dV\,\vec{r}}{\int dV}$

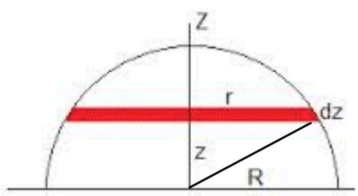
b) Por simetría, el centro de masas estará a lo largo del eje $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} x_{cm} = 0 \\ y_{cm} = 0 \end{array}}$

Como la semiesfera es homogénea, en lugar de masas utilizamos volúmenes, así por definición:

$$z_{cm} = \frac{\int_V z\ dV}{\int_V dV}$$

Para calcular z_{cm} descomponemos la semiesfera en un conjunto de discos de radio r. Cada disco estará situado a una altura z por lo que su centro de masas estará situado en z.





En este caso $dV = \pi r^2\ dz$

El radio de estos discos dependen de z, la relación es $r = \sqrt{R^2 - z^2}$ $\Rightarrow$

Introduciendo estos valores en la ecuación anterior del z_{cm}:

$$z_{cm} = \frac{\int_0^R \pi r^2 z\,dz}{\int_0^R \pi r^2\,dz} = \frac{\int_0^R \pi\left(R^2 - z^2\right)z\,dz}{\int_0^R \pi\left(R^2 - z^2\right)dz} = \frac{\pi\int_0^R \left(R^2 z - z^3\right)dz}{\pi\int_0^R \left(R^2 - z^2\right)dz} = \frac{\pi\left[R^2\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^R - \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^R\right]}{\pi\left[R^2\left[z\right]_0^R - \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^R\right]} \Rightarrow$$

$$\boxed{z_{cm}} = \frac{\pi\left[R^2\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4}\right]}{\pi\left[R^2 R - \frac{R^3}{3}\right]} = \frac{\pi R^4\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right]}{\pi R^3\left[1 - \frac{1}{3}\right]} = \frac{\frac{1}{4}\pi R^4}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \boxed{\frac{3}{8}R}$$

PROBLEMAS

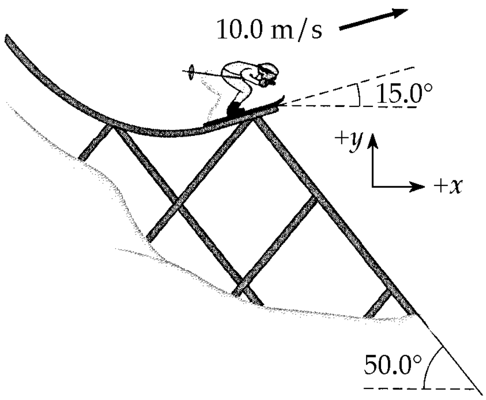
1) Un esquiador deja una rampa de salto con una velocidad de 10 m/s formando 15° con la horizontal (ver figura). La inclinación del costado de la montaña es de 50° y la resistencia del aire es despreciable. Encontrar:):

a) La distancia (medida a lo largo de la pendiente) desde la rampa hasta donde aterriza el saltador.

b) El tiempo que se encuentra en el aire.

c) Las componentes de la velocidad justo antes del aterrizaje.

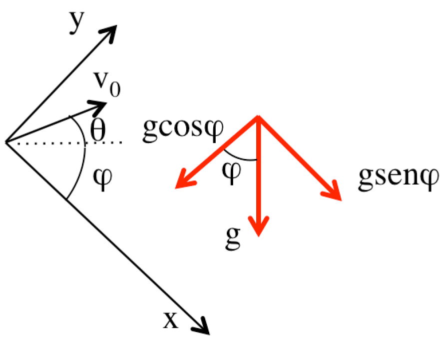
d) El radio de curvatura de su trayectoria justo antes del aterrizaje.



SOLUCION

Los apartados a y b se pueden resolver de diferentes formas:

a) y b) Planteamiento 1: Girando los ejes



Si ponemos el origen de coordenadas en la posición de inicio del salto, y en ese momento ponemos a cero el cronómetro, las ecuaciones del movimiento parabólico del esquiador serán ($\theta = 15.0°$, $\varphi = 50.0°$):

$x(t) = v_0 \cos(\theta + \varphi)\, t + \frac{1}{2} g \,\mathrm{sen}\varphi\, t^2$ (1.1) $\qquad v_x(t) = v_0 \cos(\theta + \varphi) + g\,\mathrm{sen}\varphi\, t$

$y(t) = v_0 \,\mathrm{sen}(\theta + \varphi)\, t - \frac{1}{2} g \cos\varphi\, t^2$ (1.2) $\qquad v_y(t) = v_0 \,\mathrm{sen}(\theta + \varphi) - g\cos\varphi\, t$

Cuando el esquiador toca el suelo para un tiempo t_{suelo}, lamcoordenada y vale 0 ➔ $y(t_{suelo}) = 0$

Introduciendo este valor en la ecuación 1.2:

$$t_{suelo} = 2 v_0 \,\mathrm{sen}(\theta + \varphi) / \cos\varphi = \boxed{2.88 \text{ s}}$$

y la distancia d alcanzada sobre la pendiente se obtiene introduciendo este valor del tiempo en la ecuación 1.1:

$$d = x(t_{suelo}) = v_0 \cos(\theta + \varphi)\, 2.88 + \frac{1}{2} g\,\mathrm{sen}\varphi\, 2.88^2 = \boxed{43.2 \text{ m}}$$

a) y b) Planteamiento 2: Sin girar los ejes

De nuevo ponemos el origen de coordenadas en la posición de inicio del salto, y en ese momento ponemos a cero el cronómetro. En este caso las ecuaciones del movimiento parabólico del esquiador serán (θ = 15.0º):

$$x(t) = v_0 \cos\theta \, t \qquad v_x(t) = v_0 \cos\theta$$

$$y(t) = v_0 \,\mathrm{sen}\theta \, t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad v_y(t) = v_0 \,\mathrm{sen}\theta - g t$$

Cuando llegue al suelo a lo largo de la pendiente nuestro cronómetro medirá t_{suelo} y la distancia alcanzada sobre la pendiente será d, las coordenadas en ese momento del esquiador serán: $\left(d\cos\varphi, -d\,\mathrm{sen}\varphi\right)$ (φ = 50.0º) con lo que sustituyendo en las ecuaciones generales tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} d\cos\varphi &= v_0 \cos\theta \, t_{suelo} \\ -d\,\mathrm{sen}\varphi &= v_0 \,\mathrm{sen}\theta \, t_{suelo} - \frac{1}{2} g t_{suelo}^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{d = 43.2 \text{ m}} \\ \boxed{t_{suelo} = 2.88 \text{ s}} \end{array}$$

c) En ese momento las componentes de la velocidad del esquiador serán:

$$v_x(t_{suelo}) = v_0 \cos\theta = \boxed{9.66 \text{ m/s}}$$

$$v_y(t_{suelo}) = v_0 \,\mathrm{sen}\theta - g t_{suelo} = \boxed{-25.6 \text{ m/s}}$$

d) Las componente intrínsecas de la aceleración serán:

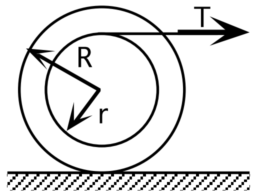
$$a_t = \vec{g} \cdot \hat{v}_{suelo} = \vec{g} \cdot \left(\frac{\vec{v}_{suelo}}{v_{suelo}} \right) = -\frac{g\, v_{y,suelo}}{v_{suelo}} = 9.17 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_t^2} = \frac{g\, v_{x,suelo}}{v_{suelo}} = 3.48 \text{ m/s}^2$$

Con lo que el radio de curvatura de la trayectoria justo antes del impacto será:

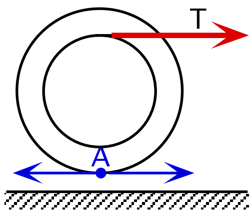
$$a_n = \frac{v_{suelo}^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{v_{suelo}^2}{a_n} = \boxed{217 \text{ m}}$$

2) Un cilindro homogéneo pesado tiene un masa m y un radio R. Se ve acelerado por una fuerza T que se aplica mediante una cuerda arrollada a lo largo de un tambor ligero de radio r unido al cilindro (ver figura). El coeficiente de rozamiento estático es suficiente para que el cilindro ruede sin deslizar.
a) Representar todas las fuerzas que actúan sobre el cilindro
b) Hallar la fuerza de rozamiento.
c) Hallar la aceleración a del centro del cilindro.
d) Es posible escoger r de modo que a sea mayor que T/m? ¿Cómo?
e) ¿Cuál es el sentido de la fuerza de rozamiento en la circunstancia descrita en el apartado d?

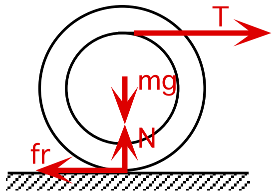


SOLUCION

a) La tensión produce una traslación del centro de masas y una rotación entorno al mismo. En ausencia de suelo, dependiendo del valor de r, el efecto de la rotación es mayor o menor que el de la traslación por lo que el punto A podría tratar de ir hacia la izquierda o derecha respectivamente. El suelo ejerce una fuerza de rozamiento que evita que dicho punto "deslice", y podrá llevar el mismo sentido que la tensión o el contrario dependiendo de que A trate de ir hacia la izquierda o hacia la derecha respectivamente.



Si suponemos que el punto A trata de moverse (deslizar) en la dirección de la tensión, la fuerza de rozamiento se opone a este movimiento (deslizamiento), por lo que las fuerzas que actúan son las de la figura:



b) Traslación: $T - f_r = ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = (T - f_r)/m$ (2.1)

Rotación: $Tr + f_r R = I\alpha \Rightarrow Tr + f_r R = (1/2)mR^2 (a_{cm}/R)$ (2.2)

Hemos utilizado las relaciones $I = (1/2)mR^2$ y como rueda sin deslizar: $\alpha = a_{cm}/R$. Sustituyendo a_{cm} (ecuación 2.1) en la ecuación 2.2:

$$Tr + f_r R = (1/2)mR^2 (T - f_r)/Rm = (1/2)R(T - f_r) = RT/2 - Rf_r/2 \Rightarrow$$

Pasando los términos con f_r al primer miembro de la ecuación y los de T al segundo:

$$f_r R + Rf_r/2 = RT/2 - Tr \Rightarrow f_r (R + R/2) = T(R/2 - r) \Rightarrow f_r (3/2)R = T(R/2 - r) \Rightarrow$$

$$\boxed{f_r = T\frac{(R-2r)}{3R}} \qquad (2.3)$$

c) Introduciendo el valor de la f_r en la ecuación 2.1

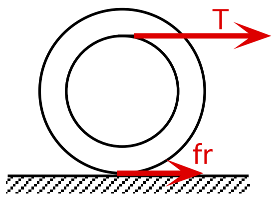
$$a_{cm} = (T - f_r)/m = \frac{T - T\frac{(R-2r)}{3R}}{m} = \frac{T\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{2r}{3R}\right)}{m} = \frac{T\left(\frac{2}{3} + \frac{2r}{3R}\right)}{m} \Rightarrow$$

$$\boxed{a_{cm} = \frac{2}{3}\frac{T}{m}\left(1 + \frac{r}{R}\right)}$$

d) si $a_{cm} > T/m \Rightarrow \frac{2}{3}\frac{T}{m}\left(1 + \frac{r}{R}\right) \rangle \frac{T}{m} \Rightarrow \left(1 + \frac{r}{R}\right) \rangle \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{r}{R}\right) \rangle \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{r > (R/2)}$

Por lo tanto si el posible, siempre que r > (R /2).

d) El que la a_{cm} sea mayor que T/m solo puede ser debido a que existe otra fuerza que acelera aun mas el centro de masas del cilindro al actuar en la misma dirección que la tensión, y esta fuerza es la f_r. Así pues, cuando r > (R /2) la f_r lleva el mismo sentido que la tensión, de hecho en la ecuación 2.3, si r > (R /2) la fr sale negativa, lo que significa que tiene sentido contrario al tomado inicialmente en la figura superior.



---

3 a) Explica el Teorema de Arquímedes en el caso de que un cuerpo este sumergido en un fluido sometido a una aceleración vertical *a*. **(0.5)**

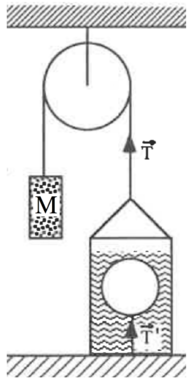
Dado el montaje de la figura, en el que una esfera de volumen V_e = 250 cm^3 y masa m_e= 150 g está atada al fondo de un recipiente que contiene un volumen de agua Va = 200 cm^3, calcular la aceleración *a* y las tensiones T y T´ para los siguientes valores dela masa M del bloque:

b) M = 300 g **(0.6).**

c) M = 800 g **(0.5).**

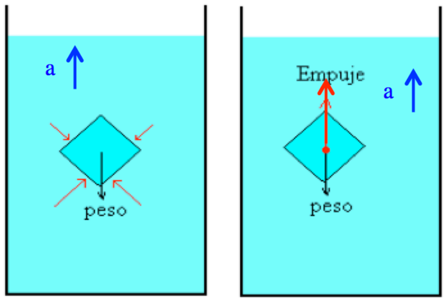
d) M = 4000 g **(0.4).**

Nota: considerar que el recipiente, las cuerdas y la polea tienen una masa despreciable.



SOLUCION

a) Cuando un recipiente que contiene un fluido experimenta una aceleración vertical a, si nos fijamos en un elemento de fluido imaginario, el resto del fluido tiene que ejercer una fuerza sobre dicho elemento que compensé el peso del fluido (m_{fluido} g) y que haga producir dicha aceleración, es decir, aplicando la 2ª ley de Newton en la dirección vertical:



$$\boxed{\text{Empuje} = \text{Peso} + m_{fluido}\, a = m_{fluido}\,(g + a)}$$

Es decir, el empuje es mayor que el peso del fluido desalojado. Si la aceleración fuese hacia abajo, el empuje sería menor que el peso: Empuje $= m_{fluido}\,(g - a)$

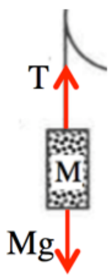
b) El recipiente tiene una masa total m que es la suma de la masa de la esfera m_e y la masa del agua m_a:

$$m = (m_e + m_a) = m_e + V_a\,\rho_a = 150 \text{ g} + 200 \text{ cm}^3 \bullet 1\text{g/cm}^3 = 350 \text{ g} = 0.35 \text{ kg}$$

En este caso M ≤ m, por lo que el recipiente sigue apoyado en el suelo y no hay movimiento, es decir la aceleración es cero:

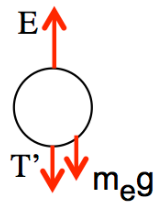
$$\boxed{a = 0}$$

Para determinar T aplicamos la 2ª ley de Newton a la masa M:



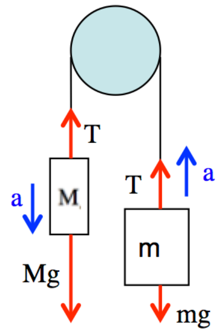
$$T - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = Mg = 0.3 \bullet 9.81 = 2.942 \text{ N}}$$

Para determinar T’, aplicamos la 2ª ley de Newton a la esfera teniendo en cuenta que la masa de agua desalojada es: $m_{ad} = V_e\, \rho_a = 250\ cm^3 \bullet 1 g/cm^3 = 250\ g = 0.25\ kg$:



$$E - m_e g - T' = 0 \rightarrow T' = E - m_e\, g = m_{ad}\, g - m_e\, g = (m_{ad} - m_e)g = (0.25 - 0.15) \bullet 9.81 = 0.981\ N$$

c) En este caso M ≥ m por lo que los cuerpos se moverán con una aceleración a. Para determinar la tensión y la aceleración, aplicamos la 2ª ley de Newton a los dos cuerpos:



$$\begin{cases} Mg - T = Ma \\ T - mg = ma \end{cases}$$

Despejando la segunda ecuación $\quad T = m\,(g + a) \qquad (3.1)$

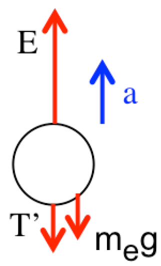
Y sumando las dos: $Mg - mg = Ma + ma \rightarrow (M - m)\, g = (M + m)\, a \rightarrow$

$$a = \frac{M - m}{M + m}\, g \qquad (3.2)$$

Dando valores a la ecuación 3.2 $\quad a = \dfrac{0.8 - 0.35}{0.8 + 0.35}\, 9.81 = 3.839\ m/s^2$

Aplicamos ahora la ecuación 3.1 $\quad T = 0.35\ (9.81 + 3.839) = 4.777\ N$

Para determinar T’ aplicamos la 2ª ley de Newton a la esfera: $E - m_e g - T' = m_e\, a \rightarrow$



$$T' = E - m_e(g + a) = m_{ad}\,(g + a) - m_e(g + a) = (m_{ad} - m_e)\ (g + a) \qquad (3.3)$$

En este caso: $\quad T' = (0.25 - 0.15)\ (9.81 + 3.839) = 1.365\ N$

d) Para M = 4000 g se sigue cumpliendo que M ≥ m, por lo que las ecuaciones 3.1, 3.2 y 3.3 siguen siendo validas. Aplicándolas para este nuevo valor de M:

3.2 → $a = \dfrac{4 - 0.35}{0.8 + 0.35}\, 9.81 = 8.23\ m/s^2$

3.1 → $T = 0.35\ (9.81 + 8.23) = 6.31\ N$

3.3 → $T' = (0.25 - 0.15)\ (9.81 + 8.23) = 1.8\ N$