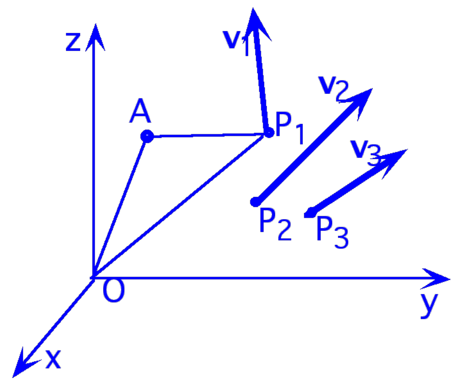
EXAMEN DE FISICA I (GTI) 13-1-2020

CUESTIONES

1) Demostrar que un sistema de fuerzas cuya resultante es nula ($\sum \mathbf{F} = 0$), el momento de fuerzas resultante ($\sum \mathbf{M}_p$) es independiente del punto respecto al cual se calcula (**1**).

SOLUCION :



Vamos a calcular el momento resultante respecto a un punto cualquiera A y lo relacionaremos con el obtenido respecto al origen.

$$\mathbf{M}_A = \sum \mathbf{AP}_i \wedge \mathbf{V}_i = \sum (\mathbf{AO} + \mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{V}_i) = \sum (-\mathbf{OA} + \mathbf{OP}_i) \wedge \mathbf{V}_i = = \sum (-\mathbf{OA} \wedge \mathbf{V}_i) + \sum (\mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{V}_i) = -\mathbf{OA} \wedge \sum (\mathbf{V}_i) + \sum (\mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{V}_i) = -\mathbf{OA} \wedge \mathbf{R} + \sum (\mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{V}_i) = = -\mathbf{OA} \wedge \mathbf{R} + \mathbf{M}_O$$

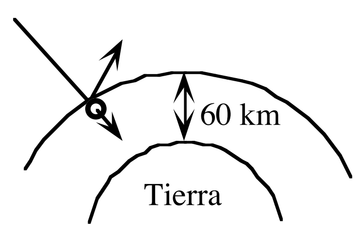
Es lo que se denomina campo de momentos.

Si la resultante es nula ($\mathbf{R} = 0$) $\Rightarrow$ $\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_O$ lo que significa que el momento resultante es igual cuando lo calculamos respecto al origen o respecto aun punto cualquiera A, y por lo tanto es independiente del punto respecto al cual se calcula.

2) El muón es una partícula inestable cuya masa es unas 207 veces la masa del electrón. Estas partículas se desintegran con una vida media τ; esto significa que si tenemos un numero de muones N en reposo en el laboratorio, cuando ha pasado un tiempo τ solo nos quedan la mitad de los muones (N/2). Siguiendo el mismo razonamiento, cuando ha pasado un tiempo $n\tau$ nos quedaran ($N/2^n$). Sabemos que los muones en reposo en el laboratorio tienen una vida media de $1.5\ 10^{-6}$ s, que se producen en la atmósfera a una altura de 60 Km y que tienen una velocidad cercana a la de la luz (v = 0.999 c) ¿Que fracción de los muones llegan a la superficie terrestre? Explica por que. Nota: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(v^2/c^2\right)}}$ **(1).**

SOLUCION

La velocidad de los muones es $v = 0.999\ c = 0.999 \cdot 3\ 10^8$ m/s $= 2.9949\ 10^8$ m/s



El tiempo que tardan en alcanzar la superficie terrestre es igual al espacio dividido por la velocidad:

$$\boxed{t = 60 \bullet 10^3 / 2.9949\ 10^8 = 2\ 10^{-4}\ \text{s}}$$

Si dividimos este tiempo por la vida media ($\tau = 1.5\ 10^{-6}$ s) encontramos cuantas vidas medias pasan hasta llegar a la Tierra

$$t / \tau = 2\ 10^{-4} / 1.5\ 10^{-6} = 133 \Rightarrow \boxed{t = 133\tau}$$

si se producen N muones, solo llegarían a la superficie $N/2^{133} = 10^{-40} N$

Sin embargo se observa que llegan muchos mas. La explicación radica en que los muones viajan a velocidades cercanas a la de la luz, y por lo tanto para ellos el tiempo que tardan en alcanzar la Tierra (tiempo propio t´) es diferente al observado por nosotros (t).

La relación es $t = \gamma t'$ con

$$\boxed{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{(0.999c)^2}{c^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.999^2}} = \boxed{22.2}$$

El tiempo propio es $\boxed{t' = t / \gamma = 2\ 10^{-4} / 22.2 = 9.09\ 10^{-6}\ s}$

Si calculamos de nuevo a cuanta vidas medias corresponde este tiempo:

$$t' / \tau = 9.09\ 10^{-6} / 1.5\ 10^{-6} = 6 \Rightarrow \boxed{t' = 6\tau}$$

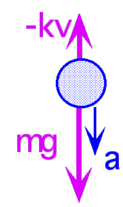
Si se producen N muones, solo llegarían a la superficie $N/2^6 = \boxed{(1/64)\ N}$

---

3) Analizar el tipo de movimiento que posee una partícula sometida a su propio peso y a una fuerza de rozamiento proporcional a su velocidad **(0.6).** Representar aproximadamente la aceleración **(0.2)** y la velocidad **(0.2)** de la partícula en función del tiempo.

SOLUCION:

Aplicando la segunda ley de Newton, la suma de las fuerzas que actúan es igual a la masa por la aceleración:



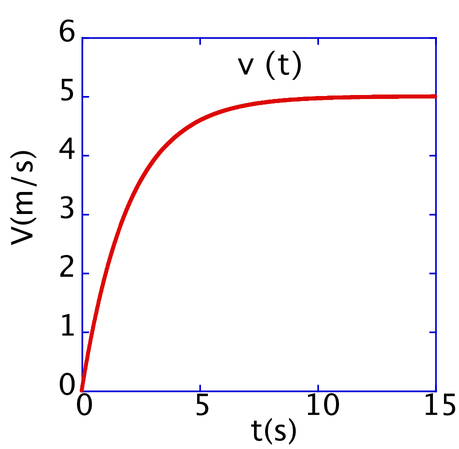
$$mg - kv = ma \qquad (3.1)$$

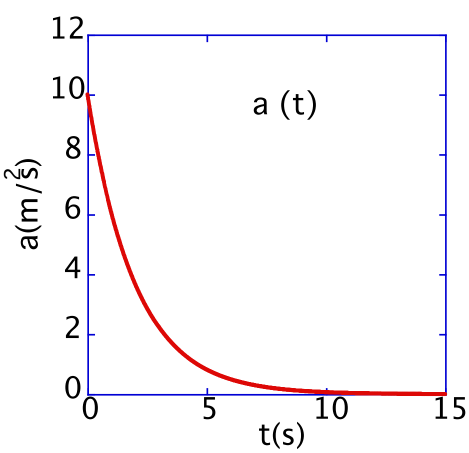
Si la partícula parte del reposo, la velocidad inicial es 0 y por lo tanto la aceleración inicial es: $a = g$.

A medida que pasa el tiempo, la partícula va adquiriendo velocidad por lo que la aceleración va disminuyendo.

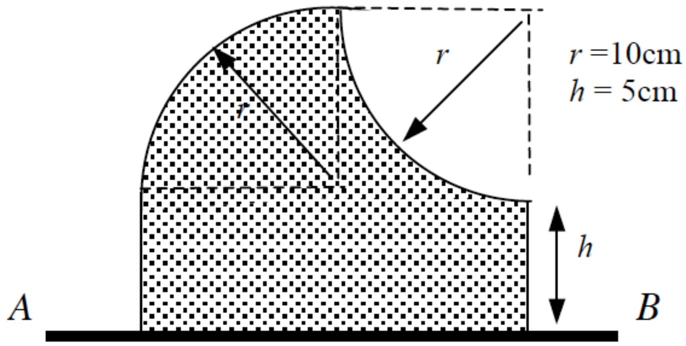
Este proceso continua hasta que la velocidad es tan grande que la fuerza de rozamiento compensa al peso ($kv = mg$), y la aceleración es $a = 0$; alcanzándose entonces la velocidad límite: $v_L = mg/k$.

Las graficas aproximadas son:



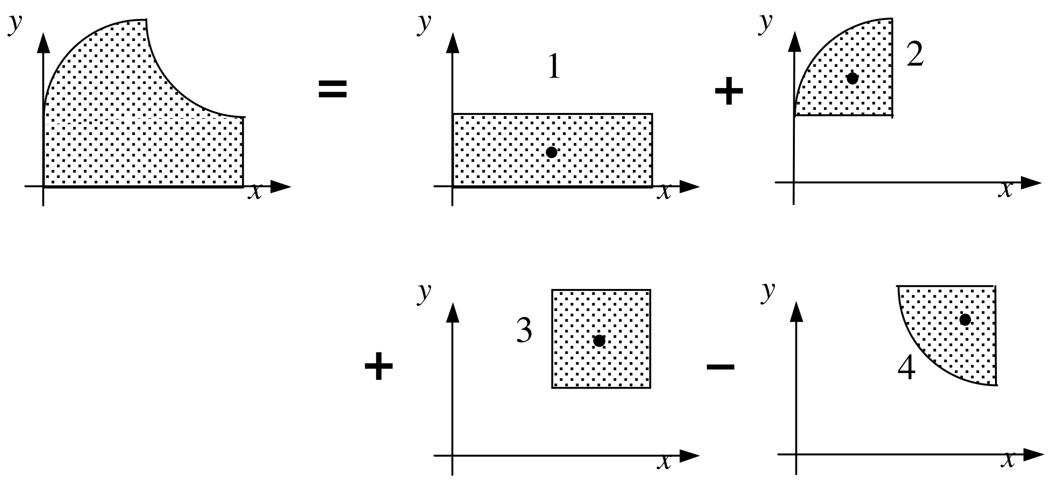


4) a) Determinar el centro de masas de la placa homogénea de la figura **(0.6).**
b) Obtener el volumen del sólido de revolución formado al girar respecto al eje AB el área mostrada en la figura **(0.4)**.



SOLUCION:

a) Para calcular la posición del C.M. de la placa vamos a dividirla en diferentes partes cuyos C.M. conozcamos:



Las posiciones del C.M. de cada una de las piezas son:

$$\vec{r}_1 = \left(r, \frac{h}{2}, 0 \right) \qquad \vec{r}_2 = \left(r - \frac{4r}{3\pi}, h + \frac{4r}{3\pi}, 0 \right)$$

$$\vec{r}_3 = \left(\frac{3r}{2}, h + \frac{r}{2}, 0 \right) \qquad \vec{r}_4 = \left(2r - \frac{4r}{3\pi}, h + r - \frac{4r}{3\pi}, 0 \right)$$

La coordenada x del C.M. de toda la pieza será:

$$\boxed{x_{C.M.}} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 - x_4 A_4}{A_1 + A_2 + A_3 - A_4} =$$

$$= \frac{(r)(2rh) + \left(r - \frac{4r}{3\pi} \right)\left(\frac{\pi}{4} r^2 \right) + \left(\frac{3r}{2} \right)(r^2) - \left(2r - \frac{4r}{3\pi} \right)\left(\frac{\pi}{4} r^2 \right)}{2rh + \frac{\pi}{4} r^2 + r^2 - \frac{\pi}{4} r^2} = \boxed{8.57 \text{ cm}}$$

análogamente, la coordenada *y* del C.M. de toda la pieza será:

$$\boxed{y_{C.M.}} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 - y_4 A_4}{A_1 + A_2 + A_3 - A_4} =$$

$$= \frac{\left(\frac{h}{2}\right)(2rh) + \left(h + \frac{4r}{3\pi}\right)\left(\frac{\pi}{4}r^2\right) + \left(h + \frac{r}{2}\right)(r^2) - \left(h + r - \frac{4r}{3\pi}\right)\left(\frac{\pi}{4}r^2\right)}{2rh + \frac{\pi}{4}r^2 + r^2 - \frac{\pi}{4}r^2} = \boxed{5.66 \text{ cm}}$$

b) Para obtener el volumen del sólido de revolución generado al girar la placa aplicamos el segundo teorema de Pappus-Gulding:

$$V_{generado} = A_{placa}\left(recorrido\ C.M.\ placa\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{generado}} = \left(2rh + r^2\right)\left(2\pi y_{C.M.}\right) = 200 \bullet 35.54 = \boxed{7.11 \cdot 10^3 \text{ cm}^3}$$

PROBLEMAS

---

1) Disponemos de un muelle vertical de K = 1000 N/m, longitud L_1 = 110 cm y masa despreciable sobre el que colocamos una lámina de 10 kg.

a) ¿Cuál es la longitud del muelle L_2 una vez colocada dicha masa?

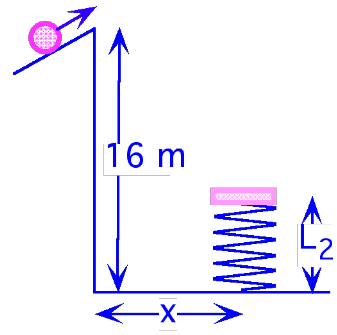
Desde una azotea de 16 m de altura se lanza un balón de 1 kg a una velocidad de 20 m/s formando un ángulo de 30° con la horizontal.

b) ¿A que distancia x debemos colocar el muelle para que el balón caiga sobre la lámina?

c) Una vez que el balón choca con la lámina, determinar las velocidades de ambos (e = 0.8) y la energía perdida en el choque.

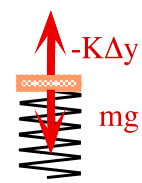
d) ¿Cuál será la mínima longitud del muelle L_3?

(recordar que $e = -\dfrac{v'_B - v'_A}{v_B - v_A}$).



SOLUCION

a) Al colocar la masa el muelle se comprime un valor Δy. Como el sistema queda en equilibrio, el peso es equilibrado por la fuerza del muelle:



$$mg + (- K\,\Delta y) = 0 \;\Rightarrow\; \Delta y = mg / K = 10\ \ 9.81 / 1000 = 0.0981 \text{ m}$$

Por lo que $\boxed{L_2 = L_1 - \Delta y = 110 - 9.81 = 100.2 \text{ cm}}$

b) Las componentes iniciales de la velocidad son

$$v_{0x} = v_0 \cos 30 = 20\ \ \sqrt{3} / 2 = 17.32 \text{ m/s}$$
$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} 30 = 20\ \ 1 / 2 = 10 \text{ m/s}$$

En la dirección vertical la ecuación de la trayectoria es $y = y_0 + v_{0y}\, t + 1/2\, a\, t^2 \;\Rightarrow$

$$1.02 = 16 + 10\,t + 1/2\,(-9.81)\,t^2 \;\Rightarrow\; -4.905\,t^2 + 10\,t + 14.98 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\boxed{t =} \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 293.91}}{-9.81} = \begin{cases} -1.004 \text{ s} \\ \boxed{3.043 \text{ s}} \end{cases}$$

la solución real corresponde al tiempo positivo, por lo tanto $t = 3.043$ s

En este tiempo el balón recorre una distancia horizontal: $\boxed{\Delta x = v_{0x}\, t = 17.32\ 3.043 = 52.70 \text{ m}}$

c) Antes del choque, el balón llevará unas velocidades $v_x = v_{0x} = 17.32$ m/s

$v_y = v_{0y} - gt = 10 - 9.81\ 3.043 = -19.85$ m/s

la línea de choque va en la dirección vertical, por lo que “el choque” se produce a lo largo de esta dirección:

Conservación del momento: $m_b\, v_{by} + m_l\, v_{ly} = m_b\, v'_{by} + m_l\, v'_{ly} \;\Rightarrow\; 1\,(-19.85) + 0 = 1\, v'_{by} + 10\, v'_{ly}$ (1.1)

Coeficiente de restitución: $e = -\dfrac{(v'_{ly} - v'_{by})}{(v_{ly} - v_{by})} \;\Rightarrow\; 0.8 = -\dfrac{(v'_{ly} - v'_{by})}{(0\ -\ (-19.85))} \;\Rightarrow\; 15.88 = v'_{by} - v'_{ly}$ (1.2)

Multiplicando la ecuación (1.2) por 10 y sumándole la ecuación (1.1):

$$158.8 - 19.85 = 10\, v'_{by} + v'_{by} \;\Rightarrow\; \boxed{v'_{by} = 12.63 \text{ m/s}}$$

Sustituyendo esta velocidad en la ecuación (1.2): $v'_{ly} = -3.25$ m/s

en la dirección horizontal las velocidades del balón y la placa no cambian

$$\boxed{\begin{array}{l} v'_{bx} = v_{bx} = 17.32 \text{ m/s} \\ v'_{lx} = v_{lx} = 0 \text{ m/s} \end{array}}$$

El módulo de la velocidad del balón antes del choque es $v_b = \sqrt{19.85^2 + 17.32^2} = 26.34$ m/s

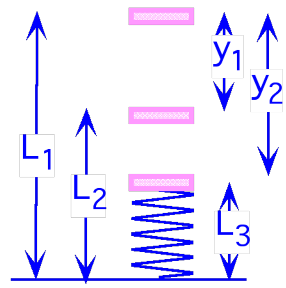
Y después del choque $v'_b = \sqrt{12.63^2 + 17.32^2} = 21.44$ m/s

Durante el choque, no se producen cambios ni de energía potencial gravitatoria ni elástica, solo de energía cinética.

$$Eci = (1/2)\, m_b\, v_b^2 = (1/2)\ 1\ 26.34^2 = 346.9 \text{ Julios}$$

$$Ecf = (1/2)\, m_b\, v'^2_b + (1/2)\, m_l\, v'^2_l = (1/2)\ 1\ 21.44^2 + (1/2)\ 10\ 3.25^2 = 282.6 \text{ Julios}$$

La energía perdida en el choque es $\boxed{Eci - Ecf} = 346.9 - 282.6 = \boxed{64.3 \text{ Julios}}$.



d) Para encontrar la mínima longitud del muelle, aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica de la lámina entre el punto inmediatamente después del choque y el punto de máxima compresión, donde la energía cinética será cero. Tenemos que recordar que en la posición inicial (inmediatamente después del choque) el muelle esta comprimido una longitud y_1, por lo que ya tenemos energía potencial elástica.

$$m_l g L_2 + 1/2\ m_l\, v'^2_1 + 1/2\ K\, y_1^2 = 1/2\ k\, y_2^2 + mgL_3$$

$$m_l g(L_2 - L_3) + 1/2\ m_l\, v'^2_1 + 1/2\ K\, y_1^2 = 1/2\ k\, y_2^2$$

$$m_l g(y_2 - y_1) + 1/2\ m_l\, v'^2_1 + 1/2\ K\, y_1^2 = 1/2\ k\, y_2^2$$

$$10\ 9.81\ (y_2 - 0.0981) + 1/2\ 10\ 3.25^2 + 1/2\ 1000\ 0.0981^2 = 1/2\ 1000\ y_2^2$$

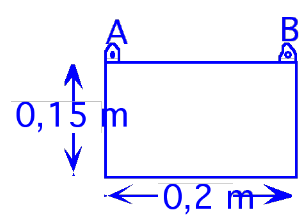
$$500\, y_2^2 - 98.1\, y_2 - 48.00 = 0$$

$$\boxed{y_2} = \frac{98.1 \pm \sqrt{98.1^2 + 96000}}{1000} = \begin{cases} \boxed{0.423 \text{ m}} \\ -0.227 \text{ m} \end{cases}$$

y $\boxed{L_3} = L_1 - y_2 = 1.1 - 0.423 = \boxed{0.677 \text{ m}}$

---

2) Una placa rectangular de 20 kg de masa está suspendida de los puntos A y B, como indica la figura.

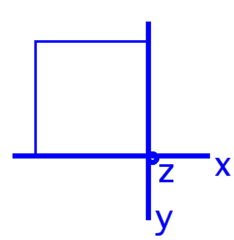


a) Determinar el momento de inercia de la placa respecto un eje perpendicular a la misma que pasa por el punto B. Suponer que la placa es uniforme (0.5).

Si se rompe el pasador A:

b) ¿Cuál será la aceleración angular de la placa en el instante inicial?(0.5).
c) ¿Cuál será la velocidad angular de la misma cuando pase por la posición de equilibrio?(0.5).
d) ¿Cuál será la fuerza que ejerce el eje que pasa por B sobre la placa en ese instante?(**0.5**).

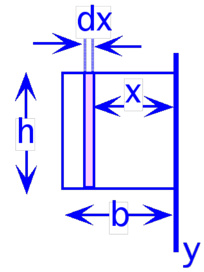
SOLUCION



a) En teoría se ha visto que cuando tenemos una lámina plana, el momento de inercia respecto a un eje perpendicular a la misma, I_z, es la suma de los momentos de inercia de la lámina respecto a dos ejes contenidos en el plano de la misma, que sean perpendiculares entre si, I_x e I_y, y que se corten en el punto por donde pasa el eje I_z.

$$I_z = I_x + I_y$$

$$I_y = \int_0^b dm\, x^2 = \int_0^b \sigma\, ds\, x^2 = \int_0^b \sigma\, h dx\, x^2 = \sigma h \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b = \sigma h \frac{b^3}{3} = \frac{1}{3}\sigma hb\, b^2 = \frac{1}{3} m\, b^2$$

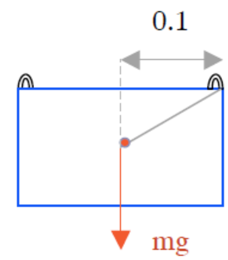


Por analogía, el momento de inercia respecto al eje x, será: $I_z = \frac{1}{3} m\, h^2$

El momento de inercia respecto al eje z será:

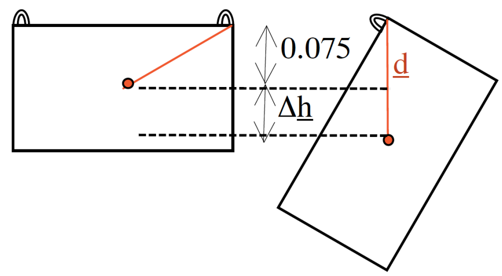
$$I_z = \frac{1}{3} m\, b^2 + \frac{1}{3} m\, h^2 = \frac{1}{3} m\, (b^2 + h^2) = \frac{1}{3} 20\, (0.2^2 + 0.15^2) = 0.4167 \text{ kg m}^2$$

b)) Para calcular la aceleración angular aplicamos $\sum \mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\alpha}$, todo respecto al punto B. La única fuerza que origina momento respecto del punto B es el peso aplicado en el centro de masas $\Rightarrow$ la ecuación anterior se transforma en



$$mg\, 0.1 = 0.4167\, \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 20 \bullet 9.81 \bullet 0.1 / 0.4167 = 47.09 \text{ rad/s}^2$$

c) Cuando la placa rota, el centro de masas, que al ser uniforme está situado en el centro, cambia su altura. La variación de altura entre la posición inicial y cuando el centro de masas está en la posición mas baja es:

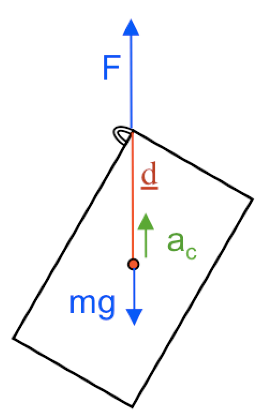


$$\Delta h = d - 0.75 = \sqrt{0.2^2 + 0.15^2} - 0.075 = 0.125 - 0.05 \text{ m}$$

La energía potencial gravitatoria se transforma en energía cinética de rotación:

$$mg\Delta h = 1/2\, I\, \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2mg\Delta h}{I}} = \sqrt{\frac{2 \bullet 20 \bullet 9.81 \bullet 0.05}{0.467}} = 6.86 \text{ rad/s}$$

d) El centro de masas esta realizando un movimiento circular, de radio R = d, entorno al eje.
Aplicando $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_{cm}$ y teniendo en cuenta que tanto las fuerzas como la $\mathbf{a}_{cm}$ están en la dirección del eje vertical



$$\Rightarrow F - mg = mv^2/R = m\omega^2 d$$

$$\Rightarrow F = m\,(g + \omega^2 d) = 20\,(9.81 + 6.86^2\, 0.125) = 313.8 \text{ N}$$

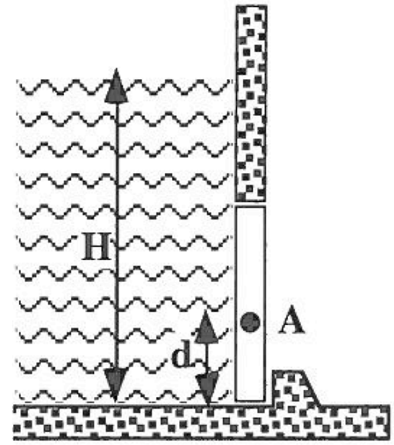
3) Una válvula automática consta de una placa cuadrada de 2.75 x 2.75 m^2 gira con respecto a un eje horizontal que pasa por A localizado a una distancia d =1m por encima del borde inferior. Determinar:

a) La presión manométrica y la presión absoluta en el fondo del embalse si H m? (0.2).

b) La fuerza que ejerce el agua sobre la válvula (encuentra la expresión en función de H y luego aplícala para H = 10 m) **(0.6)**.

c) El punto de aplicación de dicha fuerza (encuentra la expresión en función H y luego aplícala para H = 10 m) **(0.6)**.

d) La altura H de agua para la cual la válvula se abrirá **(0.6).**



SOLUCION

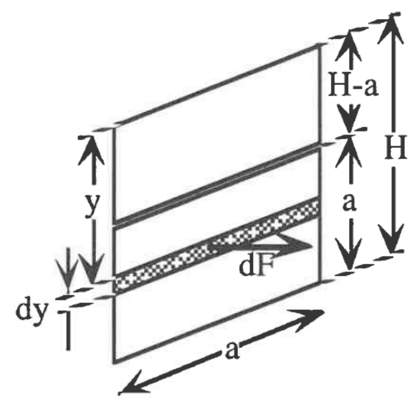
a) Por la ecuación fundamental de la hidrostática sabemos que la presión absoluta en el fondo de un estanque a una profundidad H es la presión en la superficie (Patm) mas la presión debida al agua (ρgH):

$$\boxed{P} = P_{atm} + \rho\, g\, h \;=\; 1.013\ 10^5 + 10^3\ 9.81\ 10 \;= 1.013\ 10^5 + 0.981\ 10^5 = \boxed{1.994\ 10^5\ \text{Pascales}}$$

La presión manométrica es la debida al agua: $\boxed{P_{ma}} = 0.981\ 10^5$ Pascales = $\boxed{0.968\ \text{atm}}$

b) Como P_{atm} actua a ambos lados de la valvula, la fuerza absoluta sobre la misma será unicamente debida a la presión ejercida por el agua, que a una profundidad y es P= ρgy. Si consideramos una franja de la valvula de altura dy y longitud a, toda ella situada a una profundidad y, la fuerza que actúa sobre la misma será:

$$dF = Pds = Pady = \rho gy\ ady$$

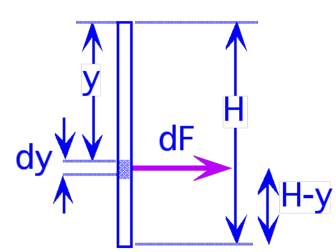


Para calcular la fuerza total sobre la presa debemos integrar dF entre el extremo superior e inferior de la misma:

$$\boxed{F} = \int_{H-a}^{H} dF = \int_{H-a}^{H} \rho\ g\ y\ a\ dy = \rho\ g\ a \int_{H-a}^{H} y\, dy = \rho\ g\ a \left[\frac{y^2}{2}\right]_{H-a}^{H} = \frac{1}{2}\rho\ g\ L\left[H^2 - (H - a)^2\right] =$$

$$= (1/2)\,\rho g a\,[H^2 - (H^2 + a^2 - 2aH)] = (1/2)\,\rho g a\,[-a^2 + 2aH] = \rho g a^2\,(H - a/2) = \boxed{74188\,(H - 1.375)\ N}$$

$$\text{Si } H = 10\ m \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = 74188\,(10 - 1.375) = 639.87\ \ kN}$$



c) El punto de aplicación de la fuerza F sobre válvula será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos)

El momento respecto a un punto del fondo de un dF actuando sobre una franja a una profundidad y será:

$$dM = dF(H-y) = \rho gy\, ady\, (H-y)$$

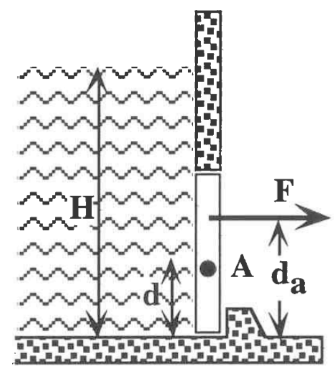
donde hemos tomado el valor de dF calculado en el apartado anterior. Para calcular el momento total, integramos entre el borde superior e inferior de la válvula.:

$$\boxed{M} = \int_{H-a}^{H} dM = \int_{H-a}^{H} \rho\, gya\,(H-y)\, dy = \rho\, ga \int_{H-a}^{H} (Hy - y^2)\, dy = \rho\, ga\left(H\left[\frac{y^2}{2}\right]_{H-a}^{H} - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^H \right) =$$

$$\rho ga\left(H\frac{1}{2}\left(H^2 - (H-a)^2\right) - \frac{1}{3}\left(H^3 - (H-a)^3\right)\right) =$$

$$\rho ga\left(\frac{H}{2}\left(H^2 - (H^2 + a^2 - 2aH)\right) - \frac{1}{3}\left(H^3 - (H^3 - a^3 + 3a^2H - 3H^2a)\right)\right) =$$

$$\rho ga\left(\frac{H}{2}\left(2aH - a^2\right) - \frac{1}{3}\left(a^3 + 3H^2a - 3a^2H\right)\right) = \boxed{\rho ga^3\left(\frac{H}{2} - \frac{a}{3}\right)}$$



La distancia del punto de aplicación al fondo (d_a) será aquella que cumpla

$$F\, d_a = M \;\Rightarrow\; \boxed{d_a} = \frac{M}{F} = \frac{\rho ga^3\left[\frac{H}{2} - \frac{a}{3}\right]}{\rho ga^2\left[H - \frac{a}{2}\right]} = \frac{a\left[\frac{3H - 2a}{6}\right]}{\frac{2H - a}{2}} = \boxed{\frac{a}{3}\left[\frac{3H - 2a}{2H - a}\right]}$$

Si H = 10 m

$$\boxed{d_a = \frac{2.75}{3}\left[\frac{3\ 10\ -\ 2\ 2.75}{2\ 10\ -\ 2.75}\right] = 1.30 \text{ m}}$$

Como el punto de aplicación está situado por encima del eje ($d_a > 1$ m) si no se ejerce una fuerza externa que lo impida, la válvula tiende a abrirse.

d) La altura H para la cual la válvula se abre es aquélla en la que $d_a > d = 1$ m $\Rightarrow$

$$\frac{a}{3}\left[\frac{3H - 2a}{2H - a}\right] > 1 \;\Rightarrow\; 3H - 2a > (2H - a)\frac{3}{a} \;\Rightarrow\; 3H - \frac{6H}{a} > 2a - 3 \;\Rightarrow\; \boxed{H > \frac{2a - 3}{3 - \frac{6}{a}} = 3.05 \text{ m}}$$