EXAMEN DE FISICA I (GTI) 6-9-2019

CUESTIONES

1) a) Se puede integrar un vector? Coméntalo. (0.1). b) Explica los diferentes tipos de integrales de "vectores". Para cada tipo, pon un ejemplo de una magnitud física que podría representar el "vector", comentando cual seria el resultado de la integral. (0.9)

SOLUCION:

Mas que integrar un vector, que es algo constante, lo que podemos integrar en una función vectorial. Hay tres tipos de integrales:

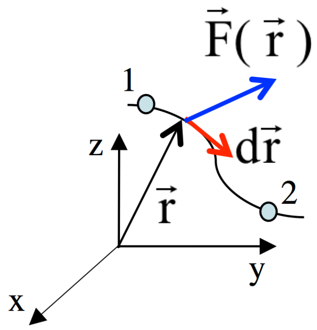
a) La **integral de una función vectorial**, $\vec{F}(u)$, **que depende de una variable escalar** u, y cuyo resultado es un vector.

$$\int \vec{F}(u)\, du = \hat{i}\int Fx(u)\, du + \hat{j}\int Fy(u)\, du + \hat{k}\int Fz(u)\, du$$

Como ejemplo, si la función F es la aceleración de una partícula y u el tiempo, la integral seria la velocidad de la misma y si F es la velocidad y u el tiempo, la integral sería la posición.

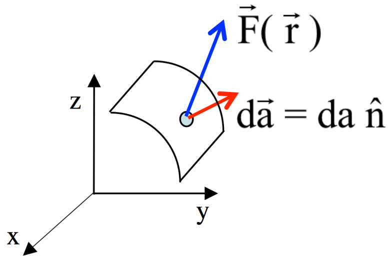
b) **Integral curvilínea o circulación** es la integral de una función vectorial que depende de la posición $\vec{F}(\vec{r})$ a lo largo de una trayectoria. El resultado es un escalar.

$$\int_1^2 \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r} = \int_1^2 Fx\, dx + \int_1^2 Fy\, dy + \int_1^2 Fz\, dz$$



Si la función F es una fuerza, la integral curvilínea representaría el trabajo que realiza dicha fuerza entre los puntos 1 y 2.

c) **Integral de superficie (flujo)** es la integral de una función vectorial que depende de la posición $\vec{F}(\vec{r})$ a lo largo de una superficie definida por un vector normal a la misma. El resultado es un escalar.



Si la Función F fuese la velocidad de un fluido, la integral de superficie representaría el caudal del fluido a través de la superficie (m^3/segundo)

2) La aceleración de un cuerpo que se mueve en línea recta viene dada por $a = 2 - t$ con a en m/s^2 y t en s. Sabiendo que el móvil parte del reposo en la posición $x = 5$, hallar:
a) la expresión de la velocidad y la posición en función del tiempo (0.4),
b) en que instante la velocidad es nula (0.2).
c) Representar a y v en función del tiempo (0.4).

SOLUCION:

a) Recordando que $a = dv/dt \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int dv = \int a\, dt + c_1$

Sustituyendo el valor de la aceleración dentro de la integral

$$\int dv = \int (2 - t)\, dt + c_1 \quad \Rightarrow v = 2t - t^2/2 \quad + c_1$$

Para determinar c1 imponemos que para $t = 0$, $v = 0 \Rightarrow 0 = 0 - 0 + c1 \Rightarrow c_1 = 0$, por lo tanto

$$\boxed{v = 2t - t^2/2}$$

Para determinar la posición, partimos de $v = dx/dt \Rightarrow dx = vdt \Rightarrow \int dx = \int v\, dt + c_2$

Sustituyendo el valor de la velocidad dentro de la integral

$$\int dx = \int (2t - \frac{t^2}{2})\, dt + c_2 \quad \Rightarrow x = 2\, t^2/2 - t^3/6 \quad + c_2$$

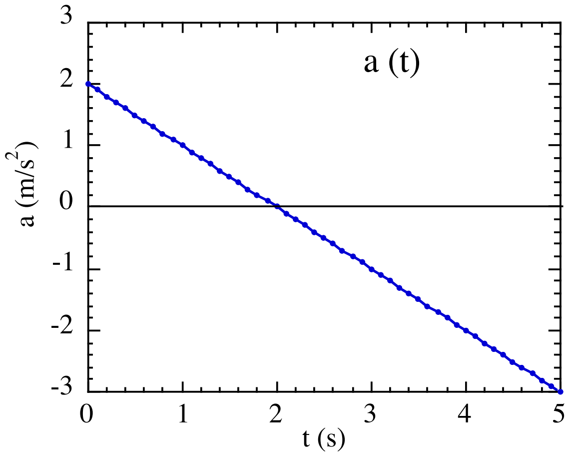
Para determinar c_2 imponemos que para $t = 0$, $x = 5 \Rightarrow 5 = 0 - 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 5$, por lo tanto

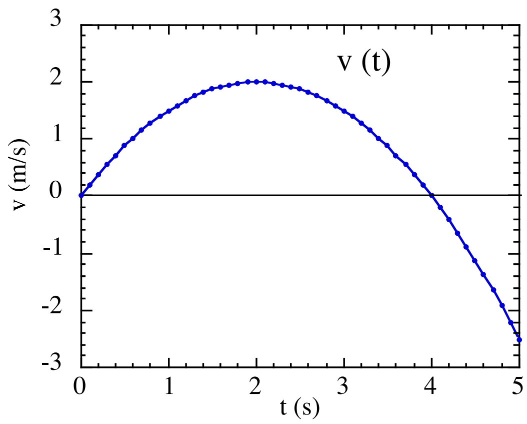
$$\boxed{x = 5 + t^2 - \frac{t^3}{6}}$$

b) Si la velocidad es nula $\Rightarrow 0 = 2t - t^2/2 = (2 - t/2)\, t \Rightarrow$ hay dos posibilidades,

$$t = 0 \quad \Rightarrow \boxed{t = 0}$$
$$2 - t/2 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{t = 4}$$

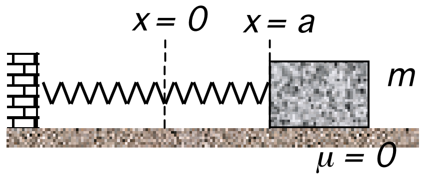
c)





3) Teniendo en cuenta que las fuerzas ejercidas por los muelles son de tipo elástico:

a) Obtener la expresión de la energía potencial elástica asociada a este tipo de fuerzas conservativas.



Se suelta la masa m desde la posición indicada en la figura:

b) Representar la curva de la energía potencial del sistema en función del alargamiento x del muelle.

c) Señalar en la gráfica los puntos de equilibrio y el sentido de la fuerza en cada intervalo del eje X.

d) ¿Qué tipo de movimiento realizará la masa?

SOLUCION

a) Las fuerzas elásticas son conservativas, por lo que $dW = -dEp$.

Para obtener la expresión de la energía potencial, integramos esta expresión entre dos posiciones, por ejemplo entre el origen, x = 0, y una posición final x = a.

Para ello, recordemos que la definición de trabajo es $dW = \mathbf{F}\, d\mathbf{r}$, y como el movimiento se realiza en una dimensión, podemos suponer que esta es la x:

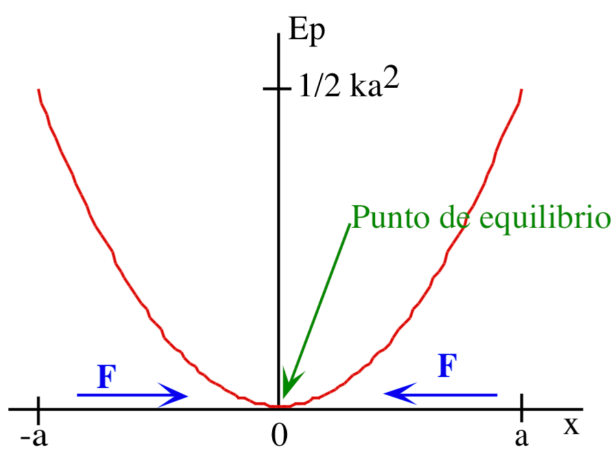
$$dW = \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = -kx\,\mathbf{i}\;\; dx\,\mathbf{i} = -kx\,dx$$

Integrando: $$\int_0^a -dEp = \int_0^a -kx\,dx \;\Rightarrow\; \left[Ep\right]_0^a = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^a \;\Rightarrow\; Ep_a - Ep_0 = \frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{2}k0^2$$

Por lo que $Ep_a = Ep_0 + (1/2)ka^2$. Si suponemos que la energía potencial en el origen vale 0 ($Ep_0 = 0$), en el punto a la energía es $Ep_a = (1/2)ka^2$

si consideramos que este valor a puede tomar cualquier valor x del eje X, $\boxed{Ep_x = (1/2)\,kx^2}$ lo que nos da la expresión final de la energía potencial en función de la posición x que ocupa la masa.

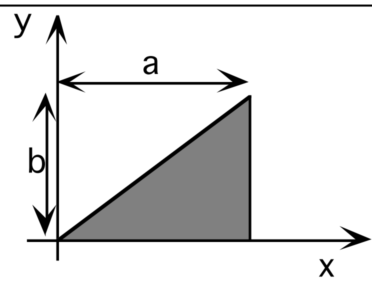
b) La curva de energía potencial será una parábola, con un valor máximo de x = a:



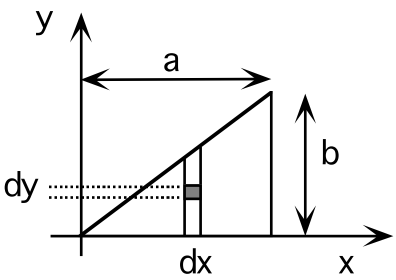
c) El puntos de equilibrio será el x = 0.
Como $\mathbf{F} = -\nabla Ep$, en el intervalo [–a, 0] la fuerza es positiva, mientras que en el [0,a] la fuerza lleva sentido negativo.

d) La masa oscila entre las posiciones –a y a realizando un movimiento armónico simple ($x = a\,\text{sen}\,(\omega t + \theta_0)$)

4) Determina la posición del centro de masas del cuerpo homogéneo de la figura.



SOLUCION:



Recordando la definición de centro de masas de una superficie homogénea $x_{CM} = \dfrac{\int x\, ds}{\int ds}$ y teniendo en cuenta que $ds = dx\, dy$, donde este diferencial de área se integra en el área sombreada delimitada por una recta de pendiente $k = b/a$ y el eje x, llegamos a la ecuación de partida:

$$\boxed{x_{CM}} = \frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_0^a x\,dx \int_0^{kx} dy}{\int_0^a dx \int_0^{kx} dy} = \frac{\int_0^a x\,dx\,[y]_0^{kx}}{\int_0^a dx\,[y]_0^{kx}} = \frac{\int_0^a x\,dx\;kx}{\int_0^a dx\;kx} = \;\ldots\ldots$$

donde primero hemos integrado dy entre el eje x y la recta (kx) y posteriormente integraremos la variable x entre 0 y a.

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\int_0^a kx^2\;dx}{\int_0^a kx\;dx} = \frac{\left[k\dfrac{x^3}{3}\right]_0^a}{\left[k\dfrac{x^2}{2}\right]_0^a} = \frac{k\dfrac{a^3}{3}}{k\dfrac{a^2}{2}} = \frac{\left(\dfrac{b}{a}\right)\dfrac{a^3}{3}}{\left(\dfrac{b}{a}\right)\dfrac{a^2}{2}} = \frac{b\dfrac{a^2}{3}}{b\dfrac{a}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}a}$$

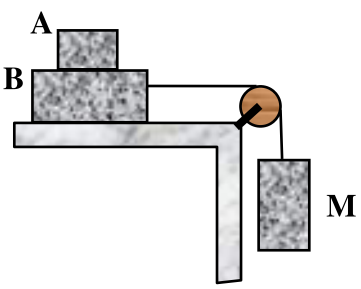
Procediendo de forma análoga para la coordenada y:

$$\boxed{y_{CM}} = \frac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_0^a dx \int_0^{kx} y\;dy}{\int_0^a dx \int_0^{kx} dy} = \frac{\int_0^a dx \left[\dfrac{y^2}{2}\right]_0^{kx}}{\int_0^a dx\,[y]_0^{kx}} = \frac{\int_0^a dx\;\dfrac{k^2x^2}{2}}{\int_0^a dx\;kx} =$$

$$= \frac{\left[\dfrac{k^2}{2}\dfrac{x^3}{3}\right]_0^a}{\left[k\dfrac{x^2}{2}\right]_0^a} = \frac{\left[\dfrac{k^2}{2}\dfrac{x^3}{3}\right]_0^a}{\left[k\dfrac{x^2}{2}\right]_0^a} = \frac{\dfrac{k^2}{2}\dfrac{a^3}{3}}{k\dfrac{a^2}{2}} = \frac{\left(\dfrac{b}{a}\right)^2\dfrac{a^3}{6}}{\left(\dfrac{b}{a}\right)\dfrac{a^2}{2}} = \frac{b^2\dfrac{a}{6}}{b\dfrac{a}{2}} = \boxed{\frac{1}{3}b}$$

PROBLEMAS

1) En el sistema de la figura se conocen las masas de A y B, $m_A = 5$ kg y $m_B = 15$ kg, y los coeficientes de rozamiento entre A y B son $\mu_{est.} = 0.2$ y $\mu_{din.} = 0.15$. Entre B y la superficie horizontal no hay rozamiento. La polea se puede considerar ideal sin masa.



a) Si A se mueve conjuntamente con B, discútase el tipo de fuerza que está acelerando a A (0.2).
b) Según lo discutido en el apartado anterior, determine la máxima aceleración que se le puede suministrar horizontalmente al bloque A moviéndose conjuntamente con B (0.3).
c) Visto lo que se ha respondido en los dos apartados anteriores, ¿cuál será el valor máximo de M para que A y B se muevan juntos con la misma aceleración? (0.5).
d) ¿Cuál será en este caso la tensión en la cuerda? (0.5).
e) Si M es mayor que el valor máximo calculado en c) ¿con qué aceleración se moverá A? (0.5)

SOLUCION:

a) y b) Cada bloque va a realizar un movimiento rectilíneo. Debemos tomar un sentido positivo de movimiento para cada uno de ellos (como cuando uno tomaba un sistema de referencia para los movimientos unidimensionales). Al final el signo del resultado nos informará del sentido de movimiento. Vamos a tomar en nuestro caso el sentido positivo de movimiento hacia la derecha para *A* y para *B* y hacia abajo para el bloque *C* de masa *M*.

Dibujando el diagrama de fuerzas para el cuerpo *A* podemos ver que la única fuerza que acelera horizontalmente al bloque *A* es la fuerza de rozamiento estática entre *A* y *B*. Su máximo valor será

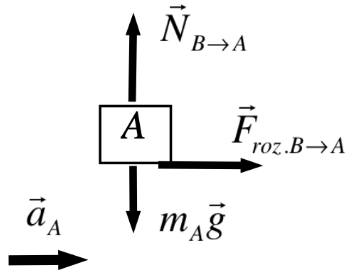
$$\boxed{F_{roz.B\to A,máx}} = \mu_{est} N_{B\to A} = \mu_{est} m_A g = \boxed{9.8 \text{ N}}$$

c) y d) Podemos calcular la máxima aceleración que puede adquirir *A* moviéndose conjuntamente con *B*:

$$\vec{F}_{roz.B\to A} = m_A \vec{a}_A$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{A,máx}} = \frac{F_{roz.B\to A,máx}}{m_A} = \frac{\mu_{est} N_{B\to A}}{m_A} =$$

$$= \frac{\mu_{est} m_A g}{m_A} = \mu_{est} g = \boxed{1.96 \text{ m/s}^2}$$

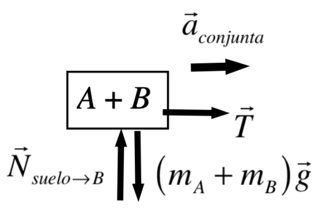


Ésta es la máxima aceleración de *A* y por lo tanto la máxima aceleración conjunta que pueden tener *A* y *B*, y la máxima aceleración descendente para el bloque *C* de masa *M*. Dibujando el diagrama de fuerzas para el conjunto *A* y *B*:

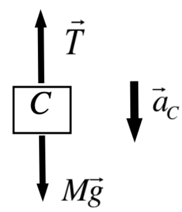
$$\vec{T} = (m_A + m_B)\vec{a}_{conjunta}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{máx}} = (m_A + m_B) a_{\substack{conjunta \\ máxima}} =$$

$$= \mu_{est}(m_A + m_B) g = \boxed{39.2 \text{ N}}$$



Dibujando el diagrama de fuerzas para el cuerpo *C*:



$$M\vec{g} + \vec{T} = M\vec{a}_C \quad \Rightarrow \quad Mg - T = Ma_C$$

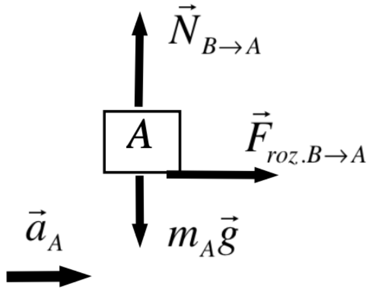
$$\Rightarrow \quad M = \frac{T}{g - a_C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{máx}} = \frac{T_{máx}}{g - a_{C,máx}} = \left(\frac{\mu_{est}}{1 - \mu_{est}}\right)(m_A + m_B) \boxed{= 5 \text{ kg}}$$

e) El rozamiento sobre el bloque A es ahora dinámico.

$$\vec{F}_{roz.B\to A} = m_A \vec{a}_A$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_A} = \frac{F_{roz.B\to A}}{m_A} = \frac{\mu_{din} N_{B\to A}}{m_A} =$$

$$= \frac{\mu_{din} m_A g}{m_A} = \mu g = \boxed{1.47 \text{ m/s}^2}$$



---

2) El sistema que muestra la figura está constituido por un anillo de radio $r_1 = 0.1$ m y masa $m_1 = 5$ kg, un cilindro homogéneo de radio $r_2 = 0.15$ m y masa $m_2 = 13$ kg y una masa $m = 12$ kg. Soltamos esta última desde el reposo y la dejamos caer 6 m. Despreciando el rozamiento calcular:

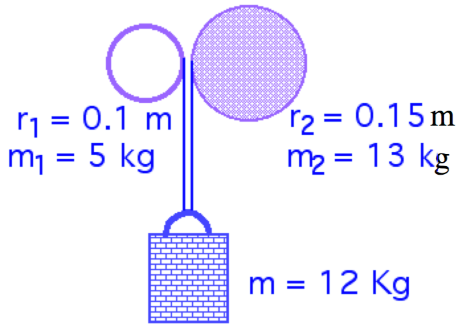
a) Los momentos de inercia del anillo y del cilindro (0.4).

b) La velocidad final de la masa cuando ha descendido los 6 m (0.5).

c) La aceleración (0.4).

d) La aceleración angular del anillo y del cilindro (0.3).

e) La tensión en ambas cuerdas (0.4).



SOLUCION:

a) El anillo tiene toda su masa en el borde, a una distancia r_1 del eje, por lo que el momento de inercia es

$$\boxed{I_1} = m_1 r_1^2 = 5 \;\; 0.1^2 \boxed{= 0.05 \text{ kgm}^2}$$

El cilindro, al ser homogéneo, tiene un momento de inercia igual al de un disco:

$$\boxed{I_2} = (1/2)\, m_2 r_2^2 = (1/2)\; 13 \;\; 0.15^2 \boxed{= 0.146 \text{ kgm}^2}$$

b) La velocidad se puede calcular por energías, la perdida de energía potencial se convierte en energía cinética de traslación y de rotación:

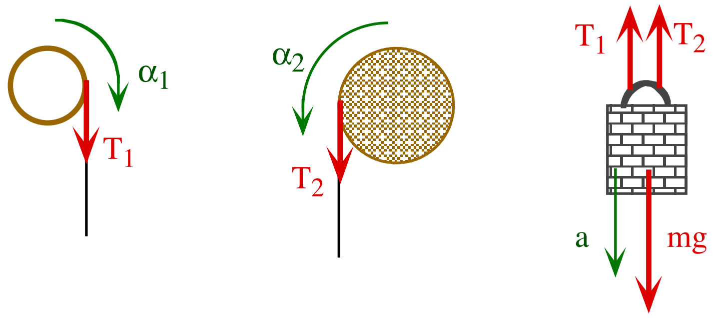
$$mgh = 1/2\, mv^2 + 1/2\, I_1\omega_1^2 + 1/2\, I_2\omega_2^2$$

Teniendo en cuenta la relación entre la velocidad lineal y la angular $\omega_1 = v/r_1$ y $\omega_2 = v/r_2$

$$mgh = 1/2\, mv^2 + 1/2\, I_1(v/r_1)^2 + 1/2\, I_2(v/r_2)^2 = 1/2\, v^2 (m + I_1/r_1^2 + I_2/r_2^2) = 1/2\, v^2 (m + m_1 + m_2/2) \Rightarrow$$

$$\boxed{v} = \sqrt{\frac{2\,mgh}{m + m_1 + m_2/2}} = \sqrt{\frac{2 \;\; 12 \;\; 9.81 \;\; 6}{12 + 5 + 13/2}} \boxed{= 7.75 \text{ m/s}}$$

c) Tenemos que aplicar $\sum F = ma$ en la masa y $\sum M = I\alpha$ para las dos poleas



$$r_1\,T_1 = I_1\,\alpha_1 \qquad \Rightarrow \qquad T_1 = I_1\,[\alpha_1/\,r_1] \;=\; m_1\,r_1^2\,[(a/r_1)/\,r_1] \;=\; m_1\,a$$

$$r_2\,T_2 = I_2\,\alpha_2 \qquad \Rightarrow \qquad T_2 = I_2\,[\alpha_2/\,r_2] \;=\; (1/2)m_2\,r_2^2\,[(a/r_2)/\,r_2] \;=\; (1/2)m_2\,a$$

$$mg - T_1 - T_2 = ma$$

Sustituyendo los valores de T_1 y T_2 en le 3ª ecuación:

$$mg - m_1\,a - (1/2)m_2\,a = ma \quad \Rightarrow \quad mg \;=\; (m + m_1 + (1/2)\,m_2)\,a \quad \Rightarrow$$

$$a = \frac{mg}{m \;+\; m_1 \;+\; (1/2)m_2} \;=\; \frac{12 \quad 9.81}{12 \;+ 5 + (1/2)13} = 5.01\ \mathrm{m/s^2}$$

d) $\alpha_1 = a/r_1 \;=\; 5.01\,/\,0.1 \;=\; 50.1\ \mathrm{rad/s^2}$

$\alpha_2 = a/r_2 \;=\; 5.01\,/\,0.15 = \;33.4\ \mathrm{rad/s^2}$

e) $T_1 = \; m_1\,a = 5 \;\; 5.01 = 25.05\ \mathrm{N}$

$T_2 = \; (1/2)m_2\,a = (1/2)13 \;\; 5.01 = 32.56\ \mathrm{N}$

---

3) La compuerta AB de la figura de un peso de 200 kg, articulada en A, y cuyas dimensiones son a = AB = 2m y b= 1m (Longitud, normal al plano de la fig.); está soportada por medio de una cadena BC que pasa por una polea de radio muy pequeño situada en C, sobre la vertical que pasa por A, y por medio de un peso P. En la posición de la figura:

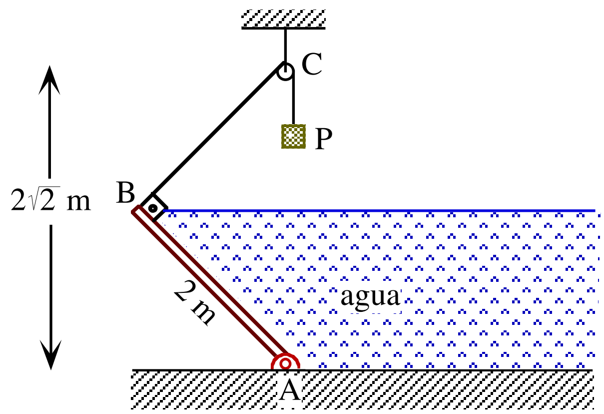
a) Determinar la presión absoluta en el fondo del embalse.

b) Calcular la fuerza que ejerce el agua sobre la compuerta.

c) Determinar el punto de aplicación de dicha fuerza.

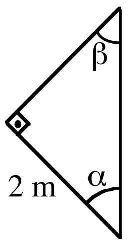
d) Representa todas las fuerzas que actúan sobre la compuerta.

e) Calcular P para que el sistema este en equilibrio.



SOLUCION

a) primer paso será determinar la altura de agua para lo cual representamos el triangulo ABC



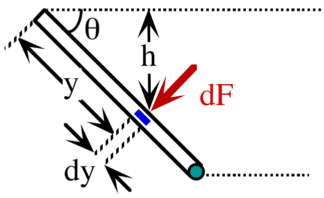
por el teorema del seno: $\dfrac{2}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\operatorname{sen}90} \Rightarrow \beta = 45° \Rightarrow \alpha = 45°$

La altura de agua es $h = 2\cos 45 = \sqrt{2}$ m

La presión absoluta será: $P = P_{atm} + \rho\, g\, h = 1.013\ 10^5 + 1000\ \ 9.81\ \ \sqrt{2} = 1.013\ 10^5 + 0.139\ 10^5 \Rightarrow$

$$\boxed{P = 1.152\ 10^5 \text{ Pascales} = 1.137 \text{ atm}}$$

b) La fuerza ejercida por el agua sobre la placa será únicamente debida a la presión ejercida por el agua, que a una profundidad h es $P = \rho g h$. Si consideramos una franja de la presa de anchura dy y longitud b, toda ella situada a una profundidad h, la fuerza que actúa sobre la misma será:



$$dF = P\,ds = P\,bdy = \rho g h\,bdy = \rho g\,y\cos\theta\,bdy$$

Para calcular la fuerza total sobre la presa debemos integrar dF entre la superficie del agua y el extremo inferior de la presa. La "altura" de la compuerta es L = AB = 2m:

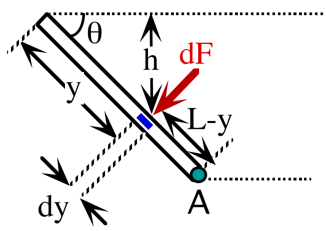
$$F = \int_0^L \rho\, g\, y \operatorname{sen}\theta\, b\, dy = \rho\, g \operatorname{sen}\theta\, b \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^L = \boxed{(1/2)\,\rho\, g \operatorname{sen}\theta\, b\, L^2} \Rightarrow$$

$$F = (1/2)\ 10^3\ 9.81\ \operatorname{sen}45\ 1\ \ 2^2 = \boxed{13873 \text{ N}}$$

b) El punto de aplicación de la fuerza F sobre la presa será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos)

El momento respecto al punto A de un dF actuando sobre una franja a una profundidad h será:

$$dM = dF\,(L-y) = \rho g\, y\cos\theta\, bdy\,(L-y)$$



donde hemos tomado el valor de dF calculado en el apartado anterior. Para calcular el momento total, integramos entre el borde superior e inferior de la presa:

$$M = \int_0^L \rho\, gy\cos\theta\, b\,(L-y)\,dy = \rho\, g\cos\theta\, b\int_0^L (Ly - y^2)\,dy = \rho\, g\cos\theta\, b\left(L\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^L - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^L\right) \Rightarrow$$

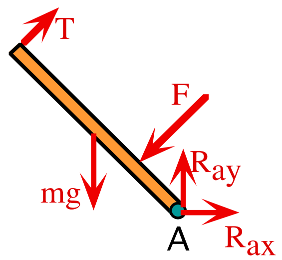
$$M = \rho\, g\cos\theta\, b\left(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{6}\rho\, g\cos\theta\, bL^3}$$

Si el punto de aplicación esta a una distancia d respecto a la parte inferior de la presa a lo largo de la compuerta, tiene que verificarse que

$$Fd = M \Rightarrow$$

$$d = \frac{M}{F} = \frac{(1/6)\,\rho\, g \cos\theta\, b\, L^3}{(1/2)\,\rho\, g \cos\theta\, b\, L^2} \Rightarrow \boxed{d = (1/3)\, L} \Rightarrow \boxed{d = 0.667 \text{ m}}$$

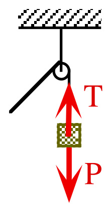
c) Las fuerzas que actúan sobre la compuerta son las representadas en la figura:



d) En principio, no es necesario determinar R_{ax} y R_{ay}, por lo que si calculamos momentos respecto al punto A, podremos despejar directamente T: como la compuerta está en equilibrio $\sum M_A = 0 \Rightarrow$

$$2\,T - mg\,1\,\text{sen}45 - F\,(1/3)\,2 = 0 \Rightarrow \boxed{T = \frac{mg}{2\sqrt{2}} + \frac{F}{3} = 693.7 + 4624.3 = 5318 \text{ N}}$$

La tensión se propaga por la cuerda y soporta el peso P que esta en equilibrio, por lo que



$$P - T = 0 \Rightarrow \boxed{P = T = 5318 \text{ N}}$$

Que corresponde a una masa $\boxed{m = P/g = 542 \text{ kg}}$