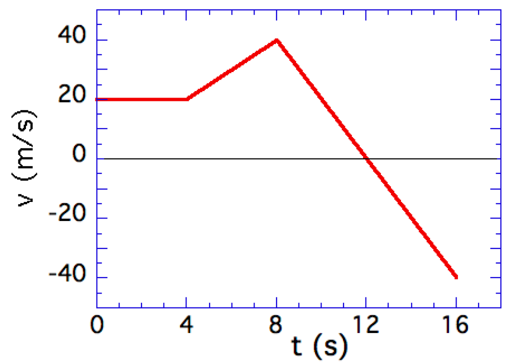
EXAMEN DE FISICA I (GTI) 21-1-2019

1) El movimiento unidimensional de una partícula viene representado en la gráfica adjunta,

a) Representar las aceleraciones (**0.4**) y el desplazamiento de la partícula en función del tiempo (**0.4**).

b) ¿Cuál es la velocidad media en el intervalo de 0 a 16 segundos (**0.2**).



SOLUCION:

a) En el **primer tramo** del movimiento la velocidad es constante, por lo que se trata de un movimiento rectilíneo uniforme en el que $\boxed{a = 0}$ y el espacio vale $\boxed{x = x_0 + 20\ t}$. Si tomamos $x_0 = 0$, a los cuatro segundos la partícula estará en $x = 80$ m

En el **segundo tramo** la aceleración es constante y vale

$$\boxed{a = \Delta v/\ \Delta t\ = (40 - 20)\ /\ (8 - 4)\ = 20\ /\ 4 = 5\ \mathrm{m/s^2}}$$

y el espacio $\boxed{x = x_0 + v_0\ (t - 4)\ + ½\ a\ (t - 4)^2\ =\ 80 + 20\ (t - 4) + ½\ 5\ (t - 4)^2}$

Para t = 8 s, $x = 80 + 80 + 40 = 200$ m

Finalmente, en el **tercer tramo** la aceleración también es constante y vale

$$\boxed{a = \Delta v/\ \Delta t\ = (-40 - 40)\ /\ (16 - 8)\ = -80\ /\ 8 = -10\ \mathrm{m/s^2}}$$

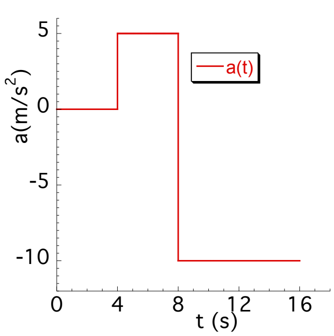
y el espacio $\boxed{x = x_0 + v_0\ (t - 8)\ + ½\ a\ (t - 8)^2\ =\ 200 + 40\ (t - 8) - ½\ 10\ (t - 8)^2}$

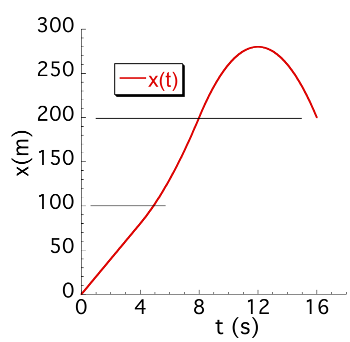
Para t = 16 s, $x = 200 + 320 - 320 = 200$ m

El valor de x máximo se alcanzara cuando la velocidad se hace cero, en t = 12 s. Aplicando la ecuación de ese tramo:

$$\boxed{x_{max}\ =\ 200 + 40\ (12 - 8) - ½\ 10\ (12 - 8)^2 = 200 + 160 - 80 = 280\ \mathrm{m}}$$

Las graficas serán:





b) La velocidad media es el espacio recorrido (posición final menos la posición inicial) dividido por el tiempo que tarde en recorrerlo, es decir:

$$\boxed{v_{media} = 200/16 = 12.5 \text{ m/s}}$$

La rapidez media, sería la media del modulo de la velocidad, es decir el espacio total recorrido sumando el desplazamiento positivo y el negativo (280 + 80 = 360 m) dividido por el tiempo que tarde en recorrerlo, es decir:

$$\text{Rapidez}_{media} = 360/16 = 22.5 \text{ m/s}$$

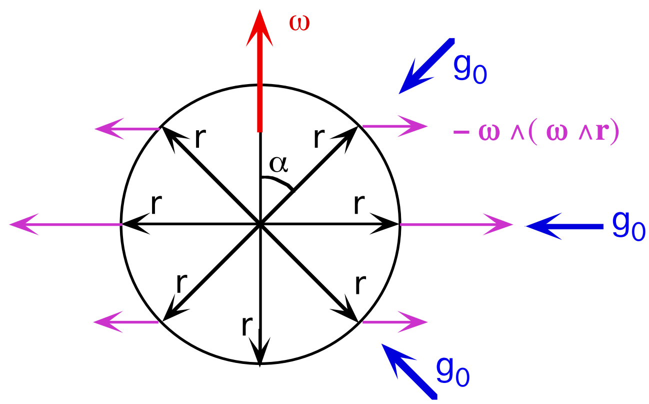
---

2) Recordando que en la Tierra: $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - 2\,(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}') - \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r})$,
   a) Representa y explica como es la aceleración centrífuga; en que puntos de la superficie es máxima y mínima.
   b) Cuanto valen las componentes radial y transversal? En que punto de la superficie serán máximas y mínimas estas componentes. ¿Qué diferencias hay entre el hemisferio norte y el hemisferio sur?

SOLUCION

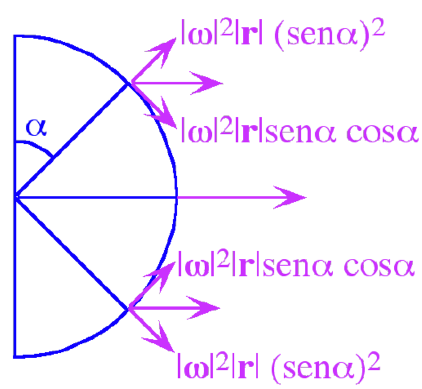
a) Al realizar el producto vectorial $-\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r})$, vemos que la aceleración centrífuga se aleja perpendicular al eje de giro de la Tierra, y que su modulo vale:

$$\boxed{|\mathbf{a}_{cen}| = |\omega|\,|\omega \wedge \mathbf{r}| \text{ sen } 90 = |\omega|\,|\omega|\,|\mathbf{r}| \text{ sen}\alpha = |\omega|^2 |\mathbf{r}| \text{ sen}\alpha}$$



siendo α el ángulo que forma el vector de posición con el eje de giro (el complementario de la latitud).
Por lo tanto su módulo es máximo en el ecuador y cero en los polos

b) Proyectamos $-\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r})$, sobre la dirección radial y transversal.



La componente radial vale: $|\omega|^2 |\mathbf{r}|\,(\text{sen}\alpha)^2$
y la componente transversal: $|\omega|^2 |\mathbf{r}| \text{ sen}\alpha \cos\alpha$

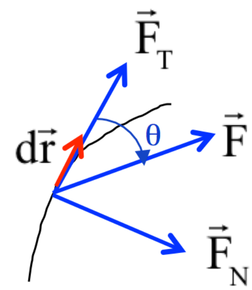
Por lo que la componente radial es máxima en el ecuador y nula en los polos.
La componente transversal es nula tanto en el ecuador como en los polos, siendo máxima para $\alpha = 45°$

La única diferencia entre el Hemisferio Norte y Sur, es que en el Norte la componente transversal va dirigida hacia el sur, mientras que en el Hemisferio Sur va dirigida hacia el norte.

3) Definir el trabajo realizado por una fuerza sobre una partícula (0.3). ¿Qué relación existe entre este concepto y la energía cinética de la partícula? Demostrar dicha relación (0.7).

SOLUCION:

Cuando una fuerza actúa sobre una partícula mientras esta se desplaza un $d\vec{r}$ realiza un diferencial de trabajo que es el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento:



$$d\omega = \vec{F}\,d\vec{r} = |\vec{F}|\,|d\vec{r}|\cos\theta = F_T\,ds$$

donde $|d\vec{r}| = ds$. El trabajo total a lo largo de una trayectoria es la integral curvilínea de la fuerza, o circulación:

$$\boxed{\omega} = \int \vec{F}\,d\vec{r} = \boxed{\int F_T\,ds}$$

Si no hay desplazamiento (ds = 0) o la fuerza es perpendicular al desplazamiento, el trabajo es cero. Si la fuerza forma mas de 90 grados con el desplazamiento, el trabajo es negativo.

Cuando sobre una partícula actúan varia fuerzas, el trabajo total será:

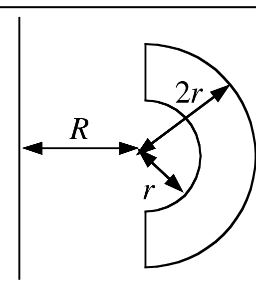
$$\omega_T = \int_i^f \sum \vec{F}\,d\vec{r} = \int_i^f m\vec{a}\,d\vec{r} = m\int_i^f a_T\,ds = m\int_i^f \frac{dv}{dt}ds = m\int_i^f dv\frac{ds}{dt} = m\int_i^f dv\,v = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_i^f \Rightarrow$$

$$\omega_T = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = Ec_f - Ec_i \Rightarrow \boxed{\omega_T = \Delta Ec}$$

Es decir, el trabajo realizado por todas las fuerzas es igual al incremento de la energía cinética.

4) Una Calcular el volumen de revolución obtenido al girar la placa de la figura respecto del eje vertical en función de r y R (0.8).

Aplica la ecuación obtenida para calcular el volumen si r = (R/2) = 1 m (0.2).



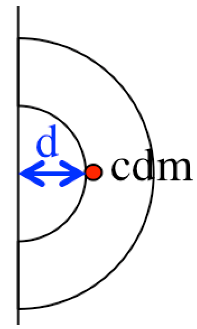
SOLUCION:

Aplicamos el segundo teorema de Pappus Guldin, que dice que para un cuerpo de revolución el volumen es igual a área de la superficie generatriz multiplicada por el espacio que recorre el centro de masas de dicha superficie:

$$\boxed{V = 2\pi x_{cm}\, A} \qquad (2.1)$$

En este caso, la superficie generatriz, la calculamos restando a la superficie de medio disco de radio 2r la de medio disco de radio r:

$$A = \frac{1}{2}\pi(2r)^2 - \frac{1}{2}\pi(r)^2 = \frac{4}{2}\pi r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 = \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right)\pi r^2 = \frac{3}{2}\pi r^2 \qquad (2.2)$$



Y la distancia del eje de giro al centro de masas de la superficie será:

$$\boxed{x_{cm} = R + d} \qquad (2.3)$$

siendo d la distancia desde el borde de la placa al centro de gravedad de la misma

Para calcular d, volvemos a aplicar el segundo teorema de Pappus Guldin a la placa girando alrededor de un eje que pasa por el borde, ya que conocemos tanto la superficie generatriz A como el volumen que genera V1 (resta de dos esferas) . Es decir ahora:

$$V1 = 2\pi d\, A \qquad (2.4)$$

$$\Rightarrow \quad A = (3/2)\,\pi r^2$$

$$V1 = (4/3)\,\pi(2r)^3 - (4/3)\,\pi(r)^3 = (4/3)\,\pi\, r^3\,(2^3 - 1) = (4/3)\,\pi\, r^3\, 7 = (28/3)\,\pi\, r^3$$

Introduciendo estos valores en la ecuación (2.4):

$$(28/3)\,\pi r^3 = 2\pi\, d\,(3/2)\,\pi r^2 \;\Rightarrow\; \boxed{d = (28r/9\pi)}$$

Sustituyendo este valor de d en la ecuación (2.3), encontramos que la distancia del eje al centro de masas es:

$$\boxed{x_{cm} = R + (28r/9\pi)}$$

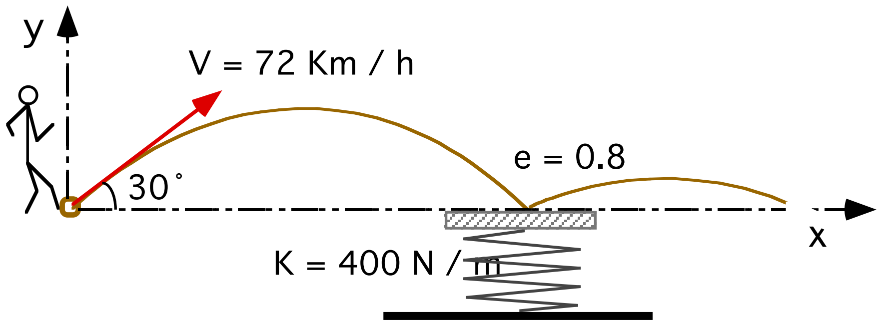
Finalmente, introduciendo este valor de x_{cm} y el área (2.2) en la ecuación (2.1):

$$V = 2\pi\,[R + (28r/9\pi)]\,(3/2)\,\pi r^2 = 3\pi^2[Rr^2 + (28r^3/9\pi)] \qquad (2.5)$$

si r = (R/2) $\Rightarrow$ R = 2r. Introduciendo este valor en (2.5)

$$V = 3\pi^2[2r^3 + (28r^3/9\pi)] = 3\pi^2[2 + (28/9\pi)]\, r^3 = 3\pi^2[2 + (28/9\pi)]\, 1^3 = 88.54\ m^3$$

PROBLEMAS



1) Un futbolista golpea un balón de m = 0.5 kg inicialmente en reposo, suministrándole una velocidad inicial de 72 km/h y formando un ángulo de 30° con la horizontal.
a) Si el pie está en contacto durante 5 milésimas de segundo y suponemos que la fuerza que actúa es constante, determinar vectorialmente la fuerza que ejerce el pie sobre el balón.
b) Determinar el alcance horizontal del balón y la altura máxima (despreciar el rozamiento del aire)
El balón golpea sobre una placa horizontal de masa m = 4 kg en reposo sobre un muelle de constante K = 400 N/m y masa despreciable. Suponemos que el coeficiente de restitución es de e = 0.8
c) Determinar la velocidad del balón después del choque y el ángulo que forma con la horizontal. ¿Cuál será la velocidad de la placa? ¿qué tipo de choque se produce?
d) Determinar la máxima compresión de la placa respecto a su posición de equilibrio. ¿Qué tipo de movimiento realizará la placa?
e) Escribir la ecuación del movimiento de la placa tomando como t = 0 el momento del choque.

SOLUCION

a) Primero pasamos la velocidad inicial (v_0) al sistema internacional y calculamos sus dos componentes:

v_0 = 72 km/h *(1000 m/1 km) * (1 h/3600 s) = 20 m/s

$$v_{0x} = v_0 \cos 30 = 10 \text{ m/s}$$
$$v_{0y} = v_0 \text{ sen } 30 = 17.32 \text{ m/s}$$

Recordando la relación entre el incremento de momento y el Impulso y recordando que suponemos la fuerza constante:

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{I} = \int \mathbf{F}\, dt = \mathbf{F} \int dt = \mathbf{F}\, \Delta t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{F}} = \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = \frac{m \Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{0.5\,(17.32\,\mathbf{i} + 10\,\mathbf{j})}{0.005} = \boxed{(1732\,\mathbf{i} + 1000\,\mathbf{j}) \text{ N}}$$

b) Recordando que en el tiro parabólico $v_y = v_{0y} - gt$, y que en la altura máxima $v_y = 0 \Rightarrow$

$$0 = v_{0y} - g t_{ymax} \quad \Rightarrow \quad t_{ymax} = v_{0y} / g \qquad (= 17.32/9.81 = 1.019 \text{ s})$$

Además, la relación entre la altura y el tiempo es $y = v_{0y}\, t - (1/2) g t^2$

Sustituyendo el valor de t_{ymax} $\Rightarrow$ $\boxed{y_{max}} = (v_{0y})^2 / g - (1/2) g (v_{0y} / g)^2 = (1/2)(v_{0y})^2 / g = \boxed{5.097 \text{ m}}$

El alcance máximo se produce para un tiempo doble que el de la máxima altura: $t_{xmax} = 2\, t_{ymax} = 2 v_{0y} / g$

Sustituyendo este valor en la ecuación $x = v_{0x}\, t$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_{max}} = v_{0x}\, t_{xmax} = 2\, v_{0x}\, v_{0y} / g = \boxed{35.31 \text{ m}}$

c) En cuanto a las velocidades del balón antes del choque, la componente x es la misma que la inicial, ya que en la dirección x la velocidad permanece constante. La componente y también será igual a la inicial, pero cambiada de signo. Es decir $vb_x = v_{0x} = 17.32$ m/s y vb_y - $v_{0y} = -10$ m/s.

El choque es central oblicuo, por lo tanto la componente x de la velocidad no cambia en ninguno de los dos cuerpos , y solo se modifica la componente y. El choque es inelástico, ya que la energía no se conserva (e≤1). Planteamos las ecuaciones de conservación del momento y del coeficiente de restitución:

$$mb\, vb_y + mp\, vp_y = mb\, vb_y' + mp\, vp_y'$$

$$e = -\frac{vp_y' - vb_y'}{vp_y - vb_y} \quad \Rightarrow \quad e\,(vp_y - vb_y) = -\,(vp_y' - vb_y')$$

Como la velocidad inicial de la placa es cero, $vp_y = 0$, las dos ecuaciones nos quedan:

$$mb\, vb_y = mb\, vb_y' + mp\, vp_y'$$

$$e\; vb_y = vp_y' - vb_y'$$

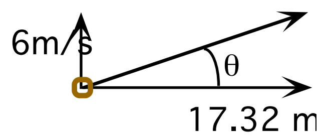
Sustituyendo los valores de e, las masas y vb_y:

$$0.5\,(-10) = 0.5\, vb_y' + 4\, vp_y'$$

$$0.8\,(-10) = vp_y' - vb_y' \qquad \Rightarrow \quad vb_y' = 8 + vp_y'$$

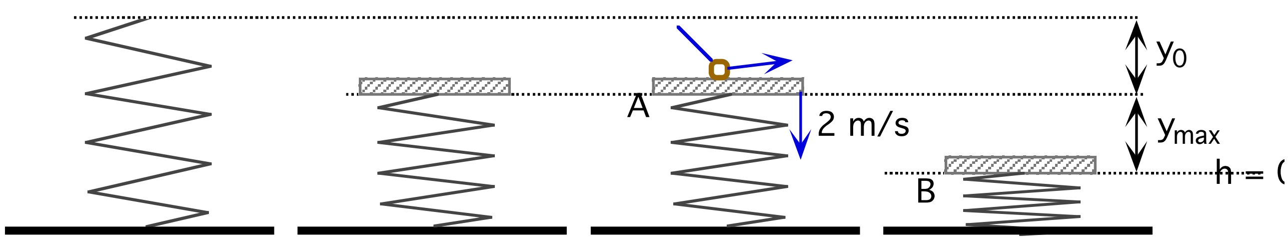
Nos queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas sencillo. Si despejamos vb_y' en la segunda ecuación y lo introducimos en la primera: $-5 = 0.5\,(8 + vp_y') + 4\, vp_y' \Rightarrow \boxed{vp_y' = -9 / 4.5 = -\,2\ \text{m/s}}$

Y para el balón: $\boxed{vb_y' = 8 + vp_y' = 8 - 2 = 6\ \text{m/s}}$



$$\text{tg}\,\theta = vb_y' / vb_x' \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} |\mathbf{vb}'| = 18.33\ \text{m/s} \\ \theta = 19.11° \end{array}}$$

d) Al colocar la placa, el muelle se comprime un valor: y_0, al golpear el balón, adquiere una energía cinética que lo comprime aún mas, tal como se muestra en la gráfica:



Aplicamos la conservación de la energía entre las posiciones A y B. Como la posición B es la de máxima compresión, la velocidad será 0, también tomamos en dicha posición h = 0:

$$1/2\; Ky_0^{\,2} + mg\; y_{max} + 1/2\; mv^2 = \; 1/2\; K(y_0 + y_{max})^{\,2} \Rightarrow$$

$$\cancel{1/2\; Ky_0^{\,2}} + mg\; y_{max} + 1/2\; mv^2 = \; \cancel{1/2\; Ky_0^{\,2}} + 1/2\; Ky_{max}^{\,2} + K\; y_0\; y_{max}$$

Además, cuando la placa estaba en equilibrio sobre el muelle, $mg = K\; y_0 \;\Rightarrow\; y_0 = mg/K$, sustituyendo este valor de y_0 en la ecuación anterior:

$$\cancel{mg\; y_{max}} + 1/2\; mv^2 = \; 1/2\; Ky_{max}^{\,2} + \cancel{K\,(mg/K)\; y_{max}} \;\Rightarrow\; 1/2\; mv^2 = \; 1/2\; Ky_{max}^{\,2} \;\Rightarrow$$

$$\boxed{y_{max} = \sqrt{\frac{mv^2}{K}} = \sqrt{\frac{4\;\;2^2}{400}} = 0.2\ \text{m}}$$

La placa realiza un movimiento armónico simple entorno a su posición inicial de equilibrio con una amplitud A = 0.2 m

e) La frecuencia angular será $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{400}{4}} = 10$ rad/s

Si partimos de la ecuación general y = A sen(ωt + φ), en el momento en que el balón golpea a la placa, t = 0 e y = 0, por lo que sen(φ) = 0 ⇒ φ = 0, π

Para saber cual de estos dos valores es el correcto, derivamos la ecuación general ⇒ $v_y = A\omega \cos(\omega t + \phi)$. Como en t = 0, v_y= -2, (negativa y de magnitud máxima) ⇒ cos(φ) = -1 ⇒ φ = π

La ecuación será por tanto: $\boxed{y = 0.2 \text{ sen}(10\,t + \pi)}$

Si hubiéramos partido de y = A cos(ωt + φ), llegaríamos a que φ = π/2, 3π/2, y realizando un análisis similar con la velocidad, a que φ = π/2, por lo que

$\boxed{y = 0.2 \cos(10\,t + \pi/2)}$

Ambas ecuaciones son equivalentes.

---

2) Una varilla homogénea de 1 m de longitud puede girar en torno a un eje horizontal que pasa por a 1/4 de uno de sus extremos. La separamos de su posición de equilibrio estable y la colocamos vertical, de modo que el eje de giro este en el punto mas bajo del sistema. la varilla cae girando espontáneamente. Calcular:

a)El momento de inercia de la varilla respecto al eje (0.4).

b)La velocidad de su extremo libre al pasar por la posición horizontal. (0.2),

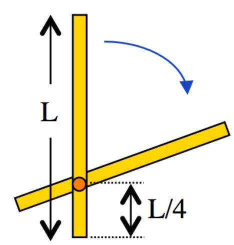
c)La velocidad de su extremo libre al pasar por la posición de equilibrio estable. (0.2),

En función de la longitud L, del ángulo descrito desde la posición inicial y de g, hallar la formula general de:

d)la velocidad de su extremo libre (0.4).

e)La aceleración angular (0.4)

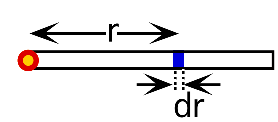
f)Las aceleraciones tangencial y normal de su extremo libre (0.4).



SOLUCION

a) La definición de momento de inercia es $I = \int dm\, r^2$, con dm = ρ dV = ρ S dr (S = sección transversal de la barra) ⇒

$$I = \int_0^L \rho\, S dr\, r^2 = \rho\, S \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^L = \frac{1}{3}\rho\, SL^3$$



Donde ρ y S han salido fuera de la integral por ser una barra uniforme.

Como la masa de la barra es M = ρ SL, el momento de inercia se puede escribir como $\boxed{I_e = (1/3)\, ML^2}$

Este es el momento de inercia respecto a un extremo. Respecto al centro, tenemos que aplicar el teorema de Steiner:

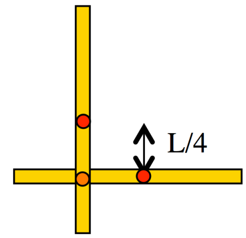
$$I_e = I_G + M\,(L/2)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_G} = (1/3)\,ML^2 - (1/4)\,ML^2 = \boxed{(1/12)\,ML^2}$$

Y volviendo a aplicar Steiner para un eje situado a (L/4) del centro de gravedad:

$$I = I_G + M\,(L/4)^2 = (1/12)\,ML^2 + (1/16)\,ML^2 \Rightarrow \boxed{I = (7/48)\,ML^2}$$

b) La forma mas sencilla de determinar la velocidad angular es por energías. Respecto al eje, la varilla realiza un movimiento de rotación puro, por lo que la perdida de energía potencial gravitatoria se convierte en energía cinética de rotación:

$$-\Delta Ep = \Delta Ec \Rightarrow Mg\,(-\Delta h) = (1/2)\,I\,(\omega^2 - \omega_0^2)$$

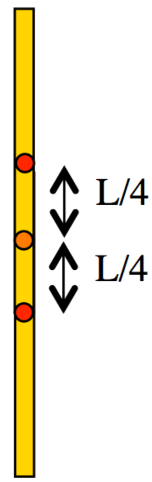


Teniendo en cuenta que parte del reposo $\omega_0 = 0$. Además la perdida de Ep se contabiliza en el centro de masas por lo que $-\Delta h = (L/4)$. Con estas consideraciones la ecuación de la energía se transforma en:

$$Mg(L/4) = (1/2)\,I\,\omega^2 = (1/2)\,(7/48)\,ML^2\,\omega^2 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{24g}{7L}}\ \text{rad/s}}$$

Como la velocidad lineal es la velocidad angular multiplicada por el radio:

$$\boxed{v = \omega\,(3/4)L = \sqrt{\frac{24g}{7L}\frac{9L^2}{16}} = \sqrt{\frac{27}{14}gL} = 4.35\ \text{m/s}}$$



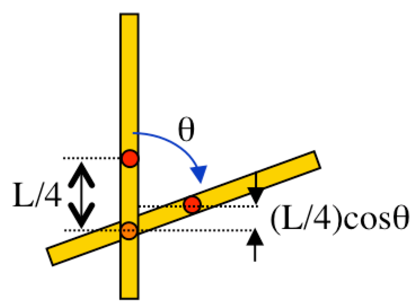
c) Se sigue el mismo procedimiento que en caso anterior pero ahora $-\Delta h = 2\,(L/4) = (L/2)$.

$$Mg(L/2) = (1/2)\,I\,\omega^2 = (1/2)\,(7/48)\,ML^2\,\omega^2 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{48g}{7L}}\ \text{rad/s}}$$

Y la velocidad lineal :

$$\boxed{v = \omega\,(3/4)L = \sqrt{\frac{48g}{7L}\frac{9L^2}{16}} = \sqrt{\frac{27}{7}gL} = 6.15\ \text{m/s}}$$

d) Se sigue el mismo procedimiento que en caso anterior pero ahora $-\Delta h = (L/4) - (L/4)\cos\theta$.



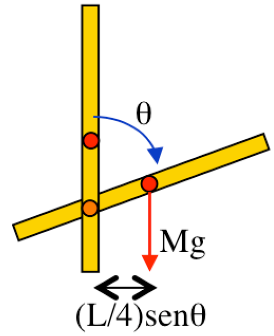
$$Mg(L/4)\,(1-\cos\theta) = (1/2)\,I\,\omega^2 = (1/2)\,(7/48)\,ML^2\,\omega^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{24g}{7L}(1-\cos\theta)}\ \text{rad/s}}$$

Como la velocidad lineal es la velocidad angular multiplicada por el radio:

$$\boxed{v = \omega\,(3/4)L = \sqrt{\frac{24g}{7L}(1-\cos\theta)\frac{9L^2}{16}} = \sqrt{\frac{27}{14}(1-\cos\theta)gL}}$$

e) En cuanto a la aceleración angular, aplicamos la ecuación equivalente a la segunda ley de Newton para las rotaciones:



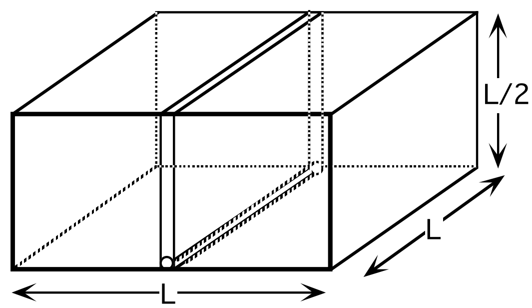
El momento de las fuerzas es igual al momento de inercia por la aceleración angular: $M = I\alpha \Rightarrow$.

$$\boxed{\alpha =} \frac{M}{I} = \frac{Mg\,(L/4)\,\mathrm{sen}\theta}{(7/48)\,mL^2} = \boxed{\frac{12g\mathrm{sen}\theta}{7\,L}\ \ \mathrm{rad/s}}$$

f) Partimos de las definiciones de aceleración tangencia y normal:

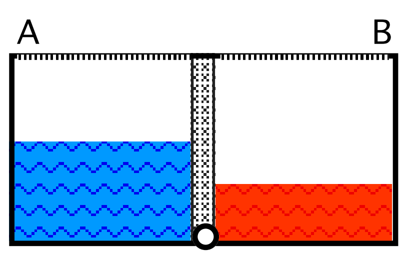
$$\boxed{a_T} = \alpha\, R = \frac{12g\mathrm{sen}\theta}{7\,L}\,\frac{3L}{4} = \boxed{\frac{9}{7}g\mathrm{sen}\theta \ \ \mathrm{m/s^2}}$$

$$\boxed{a_N =} \frac{V^2}{R} = \frac{\frac{27}{14}(1-\cos\theta)gL}{\frac{3L}{4}} = \boxed{\frac{18}{7}(1-\cos\theta)g \ \ \mathrm{m/s^2}}$$



3) Un recipiente cuadrado de lado L = 1 m y altura L/2 = 0.5 m (medidas interiores), esta dividido en dos partes iguales por una placa de acero de 4mm de espesor. Dicha placa está unida al recipiente por un eje en su parte inferior (ver figura). Vertemos 249 litros de agua en la parte izquierda y 124.5 litros de mercurio (ρ_{HG} = 13.6 g/cm^3) en la derecha.
a) ¿Cuál es la presión en el fondo del recipiente en los dos lados? **(0.2)**
b) ¿Cuál es la fuerza que ejerce el agua sobre la placa y el punto de aplicación? **(0.3)**
c) ¿Cuál es la fuerza que ejerce el mercurio sobre la placa y el punto de aplicación? **(0.3)**
d) Determinar la fuerza total ejercida sobre la placa y el punto de aplicación **(0.3).**

Para que la placa no gire, tenemos que unirla mediante un cable a uno de los lados del recipiente.
e) ¿A que lado habrá que unirla, y cuanto valdrá la tensión? **(0.4)**
Si la densidad del acero es ρ_a = 7 g/cm^3,
f) ¿Cuánto pesará la placa? **(0.2)**
g) ¿Cuál será la reacción en el eje? **(0.3)**



SOLUCION

a) Primero calculamos las alturas alcanzadas por el agua y el mercurio:

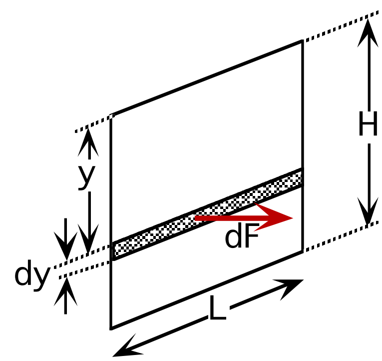
$$\boxed{h_a} = V_a / S = \frac{249\ 10^{-3}\ m^3}{(1 \times 0.498)\ m^2} = \boxed{0.5\ m}$$

$$\boxed{h_{Hg}} = V_{Hg} / S = \frac{124.5\ 10^{-3}\ m^3}{(1 \times 0.498)\ m^2} = \boxed{0.25\ m}$$

La presión manométrica será: $\boxed{P_a} = \rho_a\, g\, h_a = 1000\ 9.81\ \ 0.5 = 4905 \text{ Pascales} = \boxed{0.0968 \text{ atm}}$

$\boxed{P_{Hg}} = \rho_{Hg}\, g\, h_{hg} = 13600\ 9.81\ \ 0.25 = 33354 \text{ Pascales} = \boxed{0.329 \text{ atm}}$

b) La fuerza ejercida por el agua sobre la placa será únicamente debida a la presión ejercida por el agua, que a una profundidad y es P= ρgy. Si consideramos una franja de la presa de altura dy y longitud L, toda ella situada a una profundidad y, la fuerza que actúa sobre la misma será:



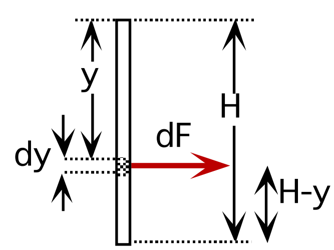
$$dF = Pds = PLdy = \rho_a gy\, Ldy$$

Para calcular la fuerza total sobre la presa debemos integrar dF entre la superficie del agua y el extremo inferior de la presa:

$$\boxed{F} = \int_0^H \rho\ \ g\, y\, L\ dy = \rho\ \ g\ \ L\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^H = \boxed{(1/2)\,\rho\ \ g\ \ L\, H^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_a} = (1/2)\ 10^3\ 9.81\ 1\ 0.5^2 = \boxed{1226.25 \text{ N}}$$

El punto de aplicación de la fuerza F sobre la presa será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos)

El momento <u>respecto a un punto del fondo</u> de un dF actuando sobre una franja a una profundidad y será:



$$dM = dF(H-y) = \rho gy\ Ldy\ (H-y)$$

donde hemos tomado el valor de dF calculado en el apartado anterior. Para calcular el momento total, integramos entre el borde superior e inferior de la presa:

$$M = \int_0^H \rho\, gyL\ (H-y)\ dy = \rho\, gL\int_0^H (Hy-y^2)\ dy = \rho\, gL\left(H\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^H - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^H\right) = \rho\, gL\left(\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{M = (1/6)\ \rho g L H^3} \qquad (3.1)$$

Si el punto de aplicación esta a una altura d respecto a la parte inferior de la presa, tiene que verificarse que

$$Fd = M \Rightarrow$$

$$d = \frac{M}{F} = \frac{(1/6)\,\rho\, g\, L\, H^3}{(1/2)\,\rho\, g\, L\, H^2} \Rightarrow \boxed{d = (1/3)\,H} \Rightarrow \boxed{d_a = 0.1667 \text{ m}}$$

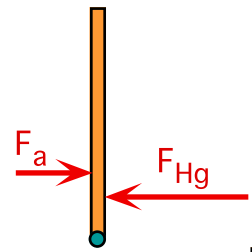
c) En el caso del mercurio las ecuaciones son las mismas cambiando únicamente la densidad y el valor de la altura H (H = 0.25 m).

$$F = (1/2)\,\rho g L H^2 \Rightarrow F_{Hg} = (1/2)\; 13.6\; 10^3\; 9.81\; 1\; 0.25^2 = 4169.25 \text{ N}$$

$$d = (1/3)\,H \Rightarrow d_{Hg} = 0.08333 \text{ m}$$

d) la fuerza total ejercida por los fluidos sobre la placa es

$$F_T = F_a - F_{Hg} = 1226.25 - 4169.25 = -2943 \text{ N}$$

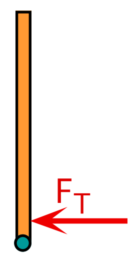


es una fuerza de 2943 N dirigida hacia el sentido negativo del eje x.

El punto de aplicación estará a una distancia d tal que

$$d\, F_T = d_a F_a - d_{Hg} F_{Hg} \Rightarrow d = (d_a F_a - d_{Hg} F_{Hg}) / F_T \Rightarrow$$

$$d = (204.4 - 347.4) / (-2943) = 0.0486 \text{ m}$$

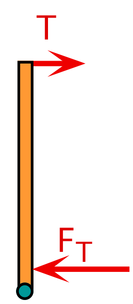


e) si observamos en la figura la fuerza resultante y el punto de aplicación, vemos que trata de girar la placa en sentido antihorario, por lo que para que no gire, tendremos que unir el extremo superior de la placa al lado B.

El valor de la tensión la calculamos aplicando las leyes de la estática, y en particular como la placa no puede rotar, $\sum M = 0$.

Calculamos los momentos respecto al eje y considerando que el cable forma 90 grados con la placa,

$$(L/2)\,T + d\,F_T = 0 \Rightarrow T = -(d\,F_T)/(L/2) \Rightarrow T = -(0.0486\;\; -2943)\;/\;0.5 \Rightarrow T = 286.1 \text{ N}$$



f) La masa de la placa será el producto del volumen por la densidad:

$$m = V\,\rho_{acero} = 1 \times 0.5 \times 0.004 \times 7\;\; 10^3 = 14 \text{ kg}$$

g) la reacción en el eje se calcula aplicando las leyes de la estática, y en particular como la placa no se traslada

$$\sum fx = 0 \Rightarrow F_T + T + Rx = 0 \Rightarrow Rx = -(T + F_T) = -(286.1 - 2943) = 2656.9 \text{ N}$$

$$\sum fy = 0 \Rightarrow Peso + Ry = 0 \Rightarrow Ry = -Peso = -(-14\;\; 9.81) = 137.34 \text{ N}$$