EXAMEN DE FISICA I (GTI) 6-9-2018

---

1) El vector de posición de una partícula es $\mathbf{r} = t^3\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Calcular en función del tiempo:

- **a)** El vector velocidad y su modulo. **(0.2)**
- b) El vector aceleración y su modulo. **(0.2)**
- c) Las componentes tangencial y normal de la aceleración. **(0.3)**
- d) El radio de curvatura. **(0.3)**

SOLUCION:

a) La velocidad es la derivada del vector posición $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt \Rightarrow \boxed{\mathbf{v} = 3t^2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}}$

$$\boxed{|\mathbf{v}| = \sqrt{9t^4 + 4}}$$

b) La aceleración es la derivada del vector velocidad $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt \Rightarrow \mathbf{a} = 6t\,\mathbf{i}$

$$\boxed{|\mathbf{a}| = 6t}$$

c) La aceleración tangencial es la derivada del modulo de la velocidad $a_t = d|\mathbf{v}|/dt \Rightarrow$

$$a_t = (1/2)\,(9t^4 + 4)^{-(1/2)}\,36t^3 = \boxed{\frac{18t^3}{\sqrt{9t^4+4}}}$$

También se puede calcular como

$$a_t = \vec{a}\,\vec{u}_t = \vec{a}\,\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(6t\,\vec{i})\,(3t^2\,\vec{i} + 2\,\vec{j})}{\sqrt{9t^4+4}} = \boxed{\frac{18t^3}{\sqrt{9t^4+4}}}$$

Siendo $\vec{u}_T$ el vector unitario tangente.

La aceleración normal es igual al modulo de la velocidad al cuadrado dividido por el radio de curvatura, pero como no conocemos el radio de curvatura, tenemos que utilizar el hecho de que la aceleración normal y tangencial son perpendiculares:

$$|\vec{a}|^2 = a_t^2 + a_n^2 \Rightarrow a_n = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_t^2} = \sqrt{36\,t^2 - \frac{324t^6}{9\,t^4+4}} = \boxed{\frac{12t^2}{\sqrt{9t^4+4}}}$$

Aunque no nos lo piden, si quisiéramos calcularlas de forma vectorial:

$$\vec{a}_T = a_t\,\vec{u}_T = \frac{18t^3}{\sqrt{9t^4+4}}\,\frac{(3t^2\,\vec{i} + 2\,\vec{j})}{\sqrt{9t^4+4}} = \frac{53t^5\,\vec{i} + 36\,t^3\,\vec{j}}{9t^4+4}$$

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t = 6t\,\vec{i} - \frac{54t^5\,\vec{i} + 36\,t^3\,\vec{j}}{9t^4+4} = \boxed{\frac{24t\,\vec{i} - 36\,t^3\,\vec{j}}{9t^4+4}}$$

d) El radio de curvatura (ρ) lo calculamos a partir de la formula de la aceleración normal:

$$a_n = v^2/\rho \Rightarrow \rho = v^2/a_n = \frac{9\,t^4+4}{\dfrac{12t^2}{\sqrt{9t^4+4}}} = \boxed{\frac{(9\,t^4+4)^{3/2}}{12t^2}}$$

2) Explica que son el tiempo propio y la longitud propia. ¿Cuándo se utilizan estos conceptos? Pon un ejemplo sencillo de aplicación donde intervenga el tiempo propio, y otro donde intervenga la longitud propia. **(1)**

Nota: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(v^2/c^2\right)}}$

SOLUCION:

Para un observador, el tiempo es propio (T´), cuando transcurre entre dos sucesos que ocurren en la misma posición.
Para un observador, la longitud es propia (L´) cuando las posiciones inicial y final entre las cuales estamos calculando la longitud, permanecen en reposo. (Si es la longitud de un cuerpo, este está en reposo para el observador).

Estos conceptos se utilizan cuando el observador y/o los objetos se mueven a velocidades cercanas a la de la luz c, y por lo tanto las transformaciones de Galileo dejan de ser validas y hay que utilizar las transformaciones de Lorentz. En estos casos (v/c) se aproxima a 1 y el parámetro $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\left(v/c\right)^2\right)}}$ es mayor que 1: $\gamma > 1$

Si una nave espacial se mueve cerca de la Tierra a velocidades cercanas a la de la luz, la longitud de la nave vista desde la Tierra, L, es mucho menor que la longitud medida por un pasajero de la nave, L´ (longitud propia). Se produce un fenómeno conocido como contracción de longitudes. L< L´ (L= L´/γ).

En la misma nave, el tiempo transcurrido para un pasajero T´(tiempo propio) es mucho menor que el tiempo transcurrido en la Tierra, T , lo que se conoce como dilatación del tiempo, T >T´ (T= γ T´)..

3) ¿Qué son las fuerzas de inercia o fuerzas ficticias? ¿Por qué unos observadores deben utilizarlas y otros no? **(0.4)**
Pon un ejemplo de traslación y otro de rotación y analiza la física de cada uno de ellos desde el punto de vista de los dos tipos de observadores, los que necesitan y los que no necesitan trabajar con fuerzas de inercia. **(0.6)**

SOLUCION:

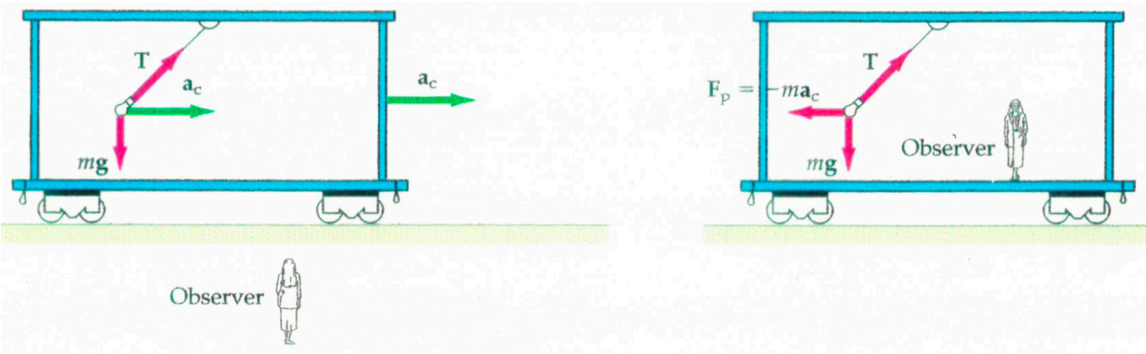
Son unas fuerzas que no existen como fuerzas físicas en el sentido de que no se corresponden con ningún tipo de interacción.

Para un Observador Inercial no existen las fuerzas de inercia, puede aplicar las leyes de Newton utilizando las fuerzas reales que actúan sobre el objeto. Sin embargo, si tenemos un Observador No Inercial, éste no puede aplicar las leyes de Newton, ya que estas no son validas en sistemas acelerados. Para que un Observador No Inercial pueda utilizar las leyes de Newton, tiene que introducir las fuerzas de inercia, cuyo valor es $\vec{F} = -m\vec{a}$, siendo $\vec{a}$ la aceleración del observador.

Ejemplo de traslación:

Inercial: Solo actúan T y el peso

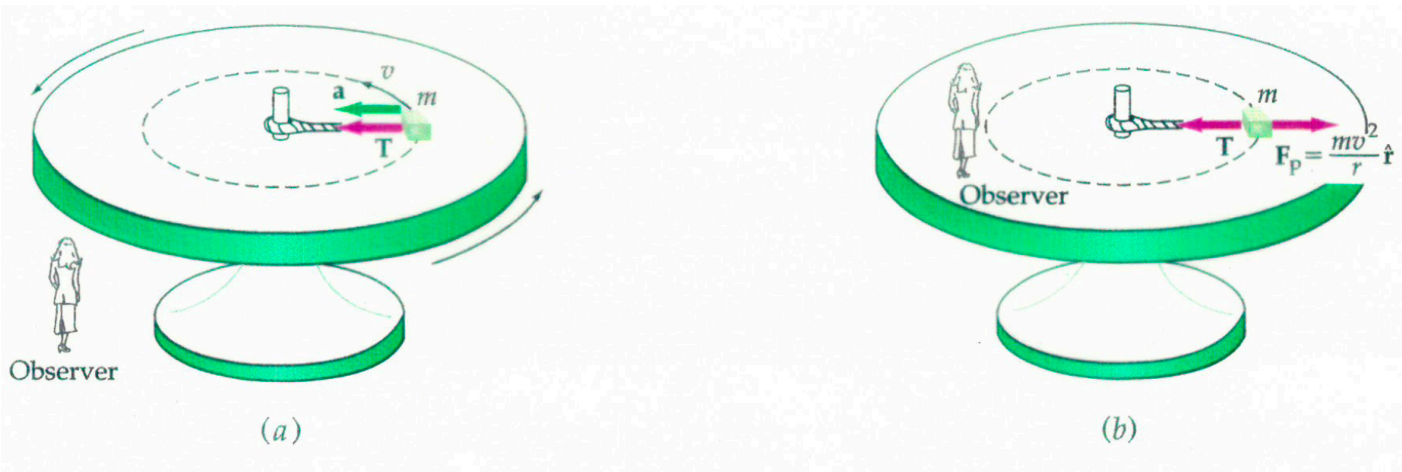
No Inercial: para poder aplicar Newton tiene que introducir $-m\vec{a}$



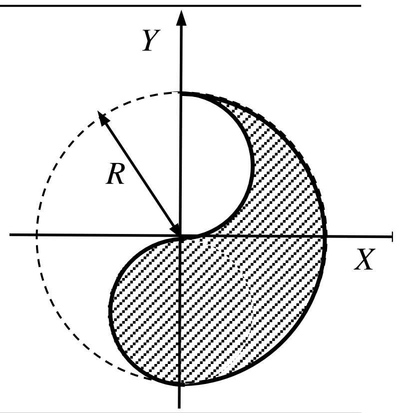
Ejemplo de rotación:

Inercial: en la dirección horizontal solo actúa T

No Inercial: para poder aplicar Newton tiene que introducir $-m\vec{a} = \dfrac{mv^2}{r}\vec{r}$



4) Calcular el centro de masas de una placa homogénea semicircular. **(0.2)** Utilizar este resultado para determinar las coordenadas del centro de masas de la placa plana rayada en la figura, cuyo perímetro está formado por tres semicircunferencias con centros alineados, y que tiene una densidad superficial constante σ. **(0.8)**

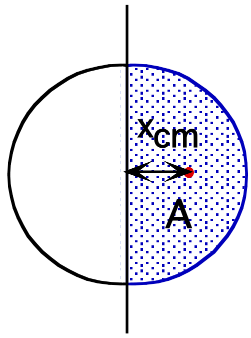


SOLUCION:

La placa se supone la suma de dos placas semicirculares, una de radio R y otra de radio R/2, a las que le restamos otra placa semicircular de radio R/2.

Por simetría, los centros de masas de las placas semicirculares están a lo largo de la línea que divide las placas en 2 partes iguales.

Para saber en que posición de dicha línea se encuentra el centro de masas, aplicamos el teorema de Pappus Guldin, que para un cuerpo de revolución dice que el volumen es igual a área de la superficie generatriz multiplicada por el espacio que recorre el centro de masas:



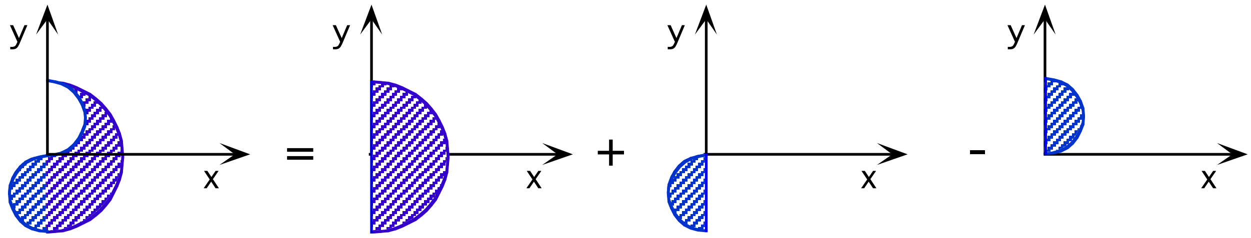
$$V = 2\pi x_{cm} A$$

Con A = área de la placa $\Rightarrow$ $A = (1/2)\,\pi R^2$

y V = volumen de la esfera que genera $\Rightarrow$ $V = (4/3)\,\pi R^3$

Introduciendo estos valore en la ecuación: $(4/3)\,\pi R^3 = 2\pi x_{cm}\,(1/2)\,\pi R^2 \Rightarrow \boxed{x_{cm} = (4R/3\pi)}$

A continuación descomponemos la placa en la suma de tres placas, y como son homogéneas, en lugar de utilizar masas, utilizamos áreas:



$A_1 = (1/2)\,\pi R^2$ $\quad$ $x_{cm1} = (4R/3\pi)$ $\quad$ $y_{cm1} = 0$

$A_2 = (1/2)\,\pi (R/2)^2 = (1/8)\,\pi R^2$ $\quad$ $x_{cm2} = -\,(4(R/2)/3\pi) = -\,(2R/3\pi)$ $\quad$ $y_{cm2} = -R/2$

$A_3 = (1/8)\,\pi R^2$ $\quad$ $x_{cm3} = (2R/3\pi)$ $\quad$ $y_{cm3} = R/2$

$$x_{cm} = \frac{\sum A_i\, x_{cmi}}{\sum A_i} = \frac{\frac{\pi R^2}{2}\frac{4R}{3\pi} + \frac{\pi R^2}{8}\frac{-2R}{3\pi} - \frac{\pi R^2}{8}\frac{2R}{3\pi}}{\frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{8} - \frac{\pi R^2}{8}} = \frac{\frac{2R^3}{3} - \frac{R^3}{12} - \frac{R^3}{12}}{\frac{\pi R^2}{2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{x_{cm} = \frac{\frac{6R^3}{12}}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{R}{\pi}}$$

$$\boxed{y_{cm} = \frac{\sum A_i\, y_{cmi}}{\sum A_i} = \frac{\frac{\pi R^2}{2}0 + \frac{\pi R^2}{8}\frac{-R}{2} - \frac{\pi R^2}{8}\frac{R}{2}}{\frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{8} - \frac{\pi R^2}{8}} = \frac{-\frac{\pi R^2}{8}R}{\frac{\pi R^2}{2}} = -\frac{R}{4}}$$

PROBLEMAS

1) Un bloque de 30 kg se deja caer desde un altura de 2 m sobre un platillo de 10 kg de una balanza de muelle (K = 2 kN/m), calcular:

a) La compresión inicial del muelle. **(0.1)**

b) La velocidad con la que llega el bloque al platillo. **(0.1)**

Suponiendo que el choque es totalmente inelástico determinar:

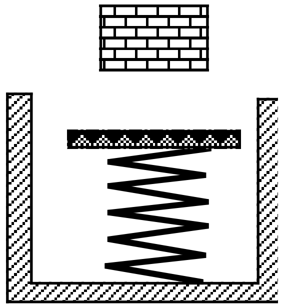
c) La energía perdida en el choque. **(0.4)**

d) El máximo desplazamiento del platillo. **(0.4)**

Suponiendo que el bloque se queda pegado al platillo:

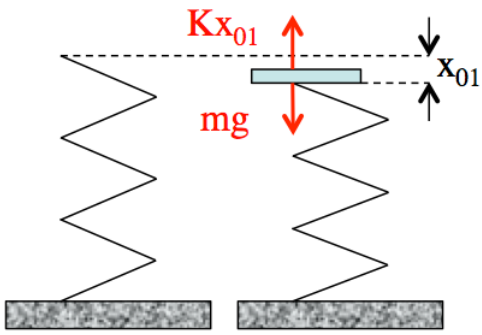
e) ¿ Explica como es el movimiento que realizan ambos **(0.1)** y calcula la amplitud **(0.3)** y el periodo **(0.3)** del mismo.

f) Escribe la ecuación del movimiento, tomando como t = 0 el momento de máxima compresión. **(0.3)**



SOLUCION:

a) Al colocar el platillo el muelle se comprime un valor x_{01} tal que el peso del platillo es igual a la fuerza elástica:



$$mg = K\, x_{01} \Rightarrow \boxed{x_{01} = mg/K = 10 \bullet 9.81/2000 = 0.049 \text{ m}}$$

b) Por energías, la energía potencial gravitatoria del bloque se transforma en energía cinética:

$$Mg\, \Delta h = ½\, Mv^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2g\Delta h} = \sqrt{2 \bullet 9.81 \bullet 2} = 6.26 \text{ m/s}}$$

c) En el choque se conserva el momento lineal:

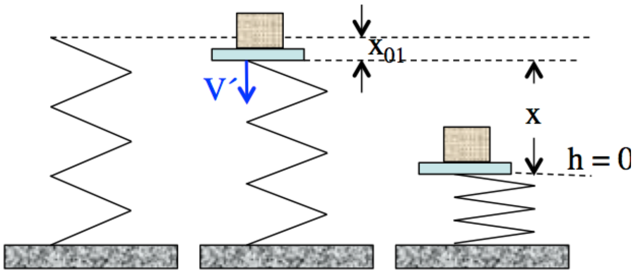
$$M \bullet v + m \bullet 0 = (M+m)v' \Rightarrow \boxed{v' = M \bullet v \;/\; (M+m) = 30 \bullet 6.26 / (30 + 10) = 4.698 \text{ m/s}}$$

Por lo que las energías cinéticas antes (Eci) y después (Ecf) del choque serán:

$$Eci = ½\, Mv^2 = ½\; 30 \bullet 6.26^2 = 587.81 \text{ J}$$
$$Ecf = ½\, (M+m)v'^2 = ½\; 40 \bullet 4.698^2 = 441.42 \text{ J}$$

Siendo la energía perdida: $\boxed{Eper = Eci - Ecf = 146.39 \text{ J}}$

d) Si tomamos h = 0 en el punto de máxima compresión del platillo , y teniendo en cuenta que en dicho punto la velocidad es 0, solo tendrá energía potencial elástica.



Planteamos la ecuación de conservación de la energía entre el punto del choque y el de máxima compresión:

$$\cancel{\tfrac{1}{2} k x_{01}^{2}} + \tfrac{1}{2}(M+m)\,v'^{2} + (M+m)\,g\,x = \tfrac{1}{2} k\,(x_{01}+x)^{2} = \cancel{\tfrac{1}{2} k x_{01}^{2}} + \tfrac{1}{2} k x^{2} + k\,x\,x_{01} \Rightarrow$$

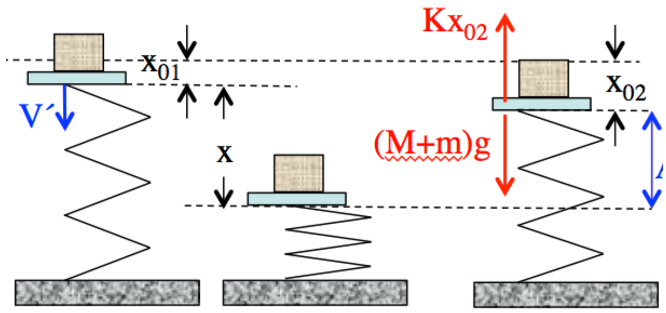
$$\tfrac{1}{2} k x^{2} + (k x_{01} - (M+m)g)\,x - \tfrac{1}{2}(M+m)\,v'^{2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\tfrac{1}{2} k x^{2} + (-Mg)\,x - \tfrac{1}{2}(M+m)\,v'^{2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$1000\,x^{2} - 294.4\,x - 441.42 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -0.533 \quad \text{o} \quad \boxed{x = 0.8276\ \text{m}}$$

El máximo desplazamiento desde el estado sin comprimir será $x_{01} + x = = \boxed{0.8766\ \text{m}}$

e) Realizaran in movimiento armónico simple (MAS) entorno a la nueva posición de equilibrio del bloque mas el platillo x_{02}, que será:



$$(M+m)g = K\,x_{02} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{02}} = (M+m)g/K = 40 \bullet 9.81/20000 \quad \boxed{= 0.196\ \text{m}}$$

La Amplitud es: $\boxed{A =}\ x_{01} + x - x_{02} = \boxed{0.6806\ \text{m}}$

Cuando tenemos una masa unida a un muelle la frecuencia angular vale: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$,

en nuestro caso $\boxed{\omega =} \sqrt{\dfrac{k}{M+m}} = \sqrt{\dfrac{20000}{40}} = \boxed{7.07\ s^{-1}}$

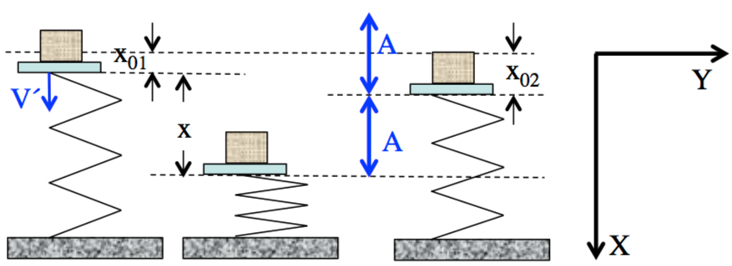
Por otra parte, la relación entre frecuencia angular y periodo es: $w = \dfrac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow$

$$\boxed{T =} \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{40}{2000}} = \boxed{0.889\ \text{s}}$$

f) La ecuación del movimiento armónico simple es $X = X_0 + A\cos(\omega t + \phi)$

Sabemos que : $\boxed{\begin{array}{l} A = 0.6806\ \text{m} \\ \omega = 7.07\ s^{-1} \end{array}}$

y solo nos falta por determinar X_0 y ϕ. El valor de X_0 depende de donde tomemos el origen y la orientación del sistema de referencia. Si tomamos el origen en la posición del muelle sin comprimir y el sentido positivo hacia abajo, tal como muestra la figura, $\boxed{X_0 = x_{02} = 0.196\ \text{m.}}$



Además, según este sistema de referencia, para $t = 0$, $X = X_0 + A$, por lo si escribimos la ecuación del MAS en ese punto:

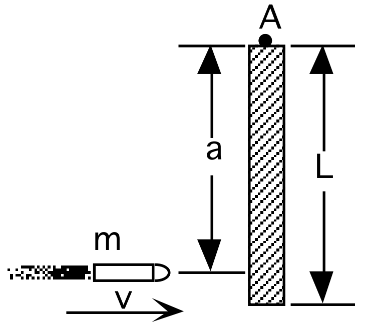
$$X_0 + A = X_0 + A\cos(\omega \bullet 0 + \phi) \Rightarrow \cos(\phi) = 1 \Rightarrow \boxed{\phi = 0}$$

Por lo que finalmente la ecuación del movimiento es:

$$\boxed{X = X_0 + A\cos(\omega \bullet t) = 0.196 + 0.6806\cos(7.07\,t)}$$

---

2) Una varilla de longitud L y masa M puede rotar libremente alrededor de un pivote en A. Una bala de masa m y velocidad v golpea la varilla a una distancia a de A y se incrusta en ella.



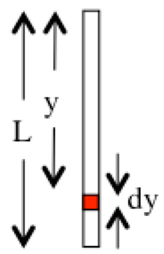
a) Determinar el momento de inercia de la varilla respecto del punto A. **(0.2)**

b) Encontrar el momento angular del sistema con respecto a A inmediatamente antes y después de que la bala dé contra la varilla. **(0.6)**

c) Determinar el momento del sistema inmediatamente antes y después de la colisión. Explicar cuidadosamente la respuesta. **(0.8)**

d) ¿Bajo qué condiciones se conservará el momento? **(0.4)**

SOLUCION



a) Definiendo λ como la densidad por unidad de longitud $\lambda = M/L$

$$dI = dM\,y^2 = \lambda\,dy\,y^2 \Rightarrow \boxed{I =} \int_0^L \lambda y^2 dy = \lambda\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^L = \lambda\frac{1}{3}L^3 = \frac{1}{3}\lambda L L^2 = \boxed{\frac{1}{3}ML^2}$$

b) $\vec{L}_i = \vec{r} \wedge m\vec{v} \Rightarrow$ (como $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares y $|\vec{r}| = a$) $\Rightarrow \boxed{|\vec{L}_i| = amv}$

$\vec{L}_f = \vec{L}_{bala} + \vec{L}_{barra}$, como los dos momentos angulares son paralelos, el modulo es la suma de los módulos, de hecho, si consideramos a la bala y a la barra como un único cuerpo que esta rotando, el modulo del momento angular será:

$$\boxed{|\vec{L}_f|} = I_T w = \boxed{\left(ma^2 + \frac{1}{3}ML^2\right)w}$$

Como $|\vec{L}_f| = |\vec{L}_i|$, despejando la velocidad angular: $\boxed{w = \dfrac{Mva}{ma^2 + \frac{1}{3}ML^2}}$

c1) El modulo del momento lineal inicial es $Pi = mv$

para calcular el momento lineal final, podemos hacerlo de dos maneras:

c2a) considerando a la bala y la barra como independientes, en este caso el modulo del momento final será:

$$\boxed{Pf =} m\,v_{bala} + MVcm_{barra} = mwa + Mw(L/2) = \boxed{w\,(ma + M(L/2))}$$

c2b) considerando a la bala y la barra como un único cuerpo que esta rotando

$$\boxed{Pf =} \ (m+M)Vcm = (m+M)wRcm \ = (m+M)w\frac{ma + M\frac{L}{2}}{m+M} \ = \boxed{w\,(ma + M(L/2))}$$

Sustituyen do elvalor de w encontrado en el apartado anterior:

$$\boxed{Pf =} \ \frac{Mva}{ma^2 + \frac{1}{3}ML^2}\left(ma + M\frac{L}{2}\right) = mv\left(\frac{ma^2 + \frac{1}{2}MLa}{ma^2 + \frac{1}{3}ML^2}\right) = \boxed{Pi\left(\frac{ma^2 + \frac{1}{2}MLa}{ma^2 + \frac{1}{3}ML^2}\right)}$$

Si a ➔ 0 : Pf ➔ 0 y si a ➔ L : $Pf = Pi\left(\frac{ma^2 + \frac{1}{2}ML^2}{ma^2 + \frac{1}{3}ML^2}\right)$ por lo que Pf es mayor que Pi.

d) Si Pi = Pf ➔ $\left(\frac{ma^2 + \frac{1}{2}MLa}{ma^2 + \frac{1}{3}ML^2}\right) = 1$ ➔ $ma^2 + \frac{1}{2}MLa = ma^2 + \frac{1}{3}ML^2$ ➔ $\frac{1}{2}MLa = \frac{1}{3}ML^2$ ➔ $\boxed{a = \frac{2}{3}L}$

Cuando se conserva el momento, el eje no ejerce ninguna fuerza en a.

---

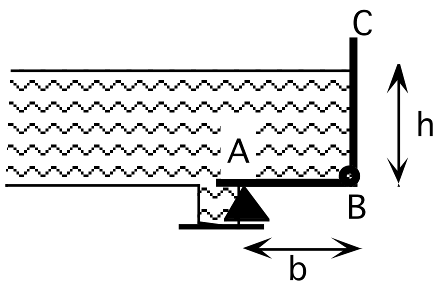
3) El extremo de un canal de agua está formado por una placa ABC que está articulada en B y tiene 1.2 m de ancho. Sabiendo que b = 600 mm y h = 450 mm, hallar:

a) La presión absoluta en el punto A. **(0.2)**

b) La fuerza neta ejercida por el agua sobre el lado AB. **(0.2)**

c) La fuerza neta ejercida por el agua sobre el lado BC y el punto de aplicación de la misma. **(0.6)**

d) Las reacciones en A y B. **(0.6)**



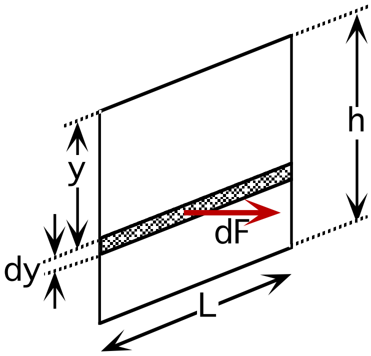
SOLUCION:

a) La presión absoluta es la suma de la presión atmosférica (Patm) mas la debida al agua:

$$P = Patm + \rho gH = 1.013\bullet10^5 + 10^3\bullet9.81\bullet0.45 = 1.013\bullet10^5 + 0.044\bullet10^5 \Rightarrow \boxed{P = 1.057\ 10^5 \ \text{Pascales}}$$

b) Como por la parte inferior del lado AB actúa la Patm, la fuerza neta que actúa sobre ese AB es la debida a la presión del agua: F_{AB} = (P-Patm) Area = ρgh Area = $0.0441 \bullet 10^5 \bullet 0.6 \bullet 1.2 \Rightarrow \boxed{F_{AB} = 3175\ \mathrm{N}}$

c) Como Patm actúa en ambos lados de la parte BC, la fuerza absoluta sobre la misma será únicamente debida a la presión ejercida por el agua, que a una profundidad y es P= ρgy. Si consideramos una franja de la presa de altura dy y longitud L, toda ella situada a una profundidad y, la fuerza que actúa sobre la misma será:

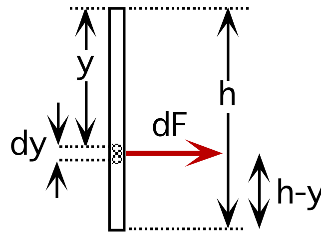


$$dF = Pds = PLdy = \rho gy\ Ldy$$

Para calcular la fuerza total sobre la presa debemos integrar dF entre la superficie del agua y el extremo inferior de la presa:

$$\boxed{F_{BC}} = \int_0^h \rho\ g\ y\ L\ dy = \rho\ g\ L\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h = \boxed{(1/2)\,\rho\ g\ L\ h^2} \Rightarrow \boxed{F_{BC}} = (1/2)\ 10^3 \bullet 9.81 \bullet 1.2 \bullet (0.45)^2 = \boxed{1192\ \mathrm{N}}$$

El punto de aplicación de la fuerza F sobre la presa será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos)



El momento <u>respecto a un punto del fondo</u> B de un dF actuando sobre una franja a una profundidad y será:

$$dM = dF(h-y) = \rho gy\ Ldy\ (h-y)$$

donde hemos tomado el valor de dF calculado en el apartado anterior. Para calcular el momento total, integramos entre el borde superior e inferior de la presa:

$$M = \int_0^h \rho\ gyL\ (h-y)\ dy = \rho\ gL\int_0^h (hy-y^2)\ dy = \rho\ gL\left(h\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h\right) = \rho\ gL\left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right) \Rightarrow$$

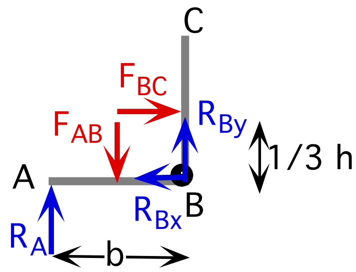
$$\boxed{M = (1/6)\ \rho gLh^3}$$

Si el punto de aplicación esta a una altura d respecto a la parte inferior de la presa, tiene que verificarse que

$$F_{BC}d = M \Rightarrow$$

$$d = \frac{M}{F_{BC}} = \frac{(1/6)\,\rho\ g\ L\ h^3}{(1/2)\,\rho\ g\ L\ h^2} \Rightarrow \boxed{d = (1/3)\ h\ = 0.15\ \mathrm{m}}$$

c) Las fuerzas que actúa sobre la placa se muestran en la figura:



Calculando momentos respecto al punto B; $\sum M_B = 0 \Rightarrow$

$R_A b + F_{BC}(h/3) - F_{AB}(b/2) = 0 \Rightarrow$

$R_A = F_{AB}/2 - F_{BC}(h/3b) = 3175 / 2 - 1192(0.45 / 3 \bullet 0.6) \Rightarrow$ $\boxed{R_A = 1289.5 \text{ N}}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BC} - R_{Bx} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{R_{Bx} = F_{BC} = 1192 \text{ N}}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{By} + R_A - F_{AB} = 0 \Rightarrow R_{By} = F_{AB} - R_A \Rightarrow$ $\boxed{R_{By} = 3175 - 1289.5 = 1885.5 \text{ N}}$

d) Si $R_A = 0 \Rightarrow F_{BC}(h/3) - F_{AB}(b/2) = 0 \Rightarrow (1/2)\,\rho\, g\, L\, h^2\,(h/3) = \rho\, g\, h\, L\, b\,(b/2) \Rightarrow$

Dividiendo por $\rho\, g\, L$: $\Rightarrow (1/6)\,h^3 = (1/2)\,b^2 h \Rightarrow h^2 = 3\,b^2 \Rightarrow$ $\boxed{h = \sqrt{3}\,b}$