EXAMEN DE FISICA I (GTI) 23-1-2018

---

1) Un cuerpo parte del reposo, aumenta su velocidad con una aceleración de $1 m/s^2$ durante 50 m, recorre otros 10 m con velocidad constante, y decelera uniformemente durante 20 m hasta alcanzar el reposo. Representar a(x), v(x), x(t), v(t), a(t) **(1).**

SOLUCION:

Un cuerpo parte del reposo, aumenta su velocidad con una aceleración de $1 m / s^2$ durante 50 m, recorre otros 10 m con velocidad constante, y decelera uniformemente durante 20 m hasta alcanzar el reposo. Representar a(x), v(x), x(t), v(t), a(t).

SOLUCIÓN

Los datos son los siguientes:

$t_0 = 0$	$x_0 = 0$	$v_0 = 0$	$a_{0A} = 1\ m/s^2$
$t_A = ?$	$x_A = 50\ m$	$v_A = ?$	$a_{AB} = 0$
$t_B = ?$	$x_B = 60\ m$	$v_B = v_A$	$a_{BC} = ?$
$t_C = ?$	$x_C = 80\ m$	$v_C = 0$	

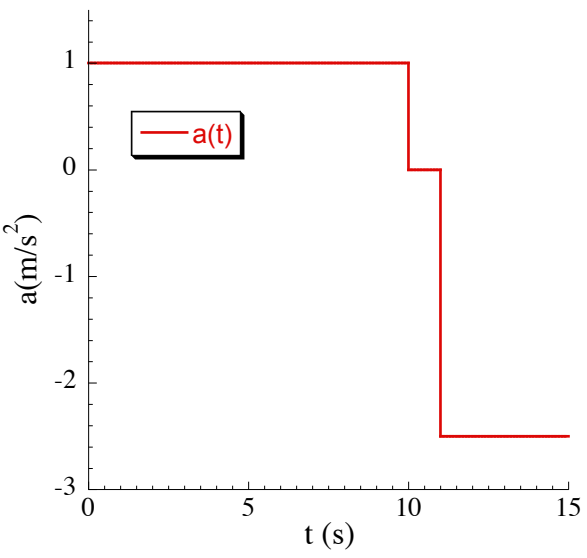
Tramo AB, movimiento uniformemente acelerado: $(v_A)^2 - (v_0)^2 = 2\ a_{0A}\ (x_A - x_0) \Rightarrow$ $v_A = 10\ m/s$

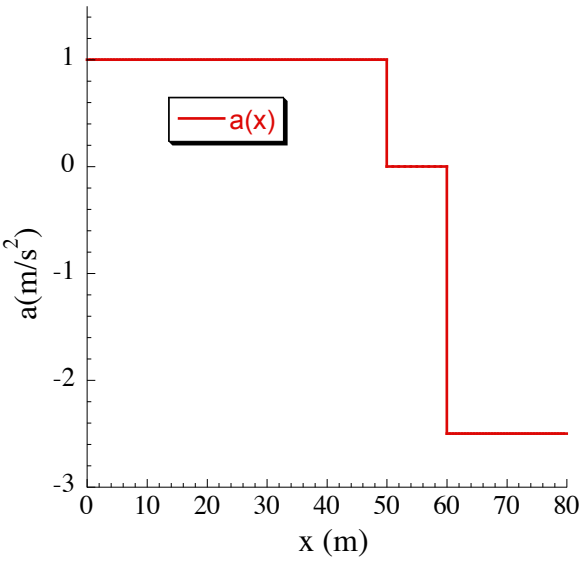
Por otra parte $v_A = v_0 + a_{0A}\ (t_A - t_0) \Rightarrow$ $t_A = 10\ s$

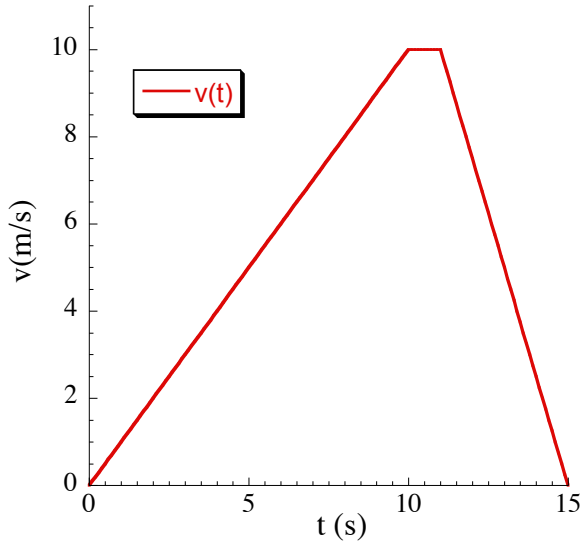
Tramo BC, movimiento uniforme: $(x_B - x_A) = v_A\ (t_B - t_A) \Rightarrow$ $t_B = 11\ s$

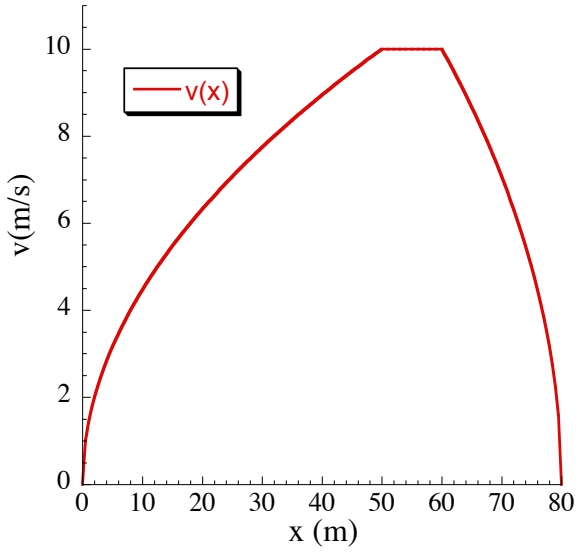
Tramo CD, movimiento uniformemente decelerado: $(v_C)^2 - (v_B)^2 = 2\ a_{BC}\ (x_C - x_B) \Rightarrow$ $a_{BC} = -2{,}5\ m/s^2$

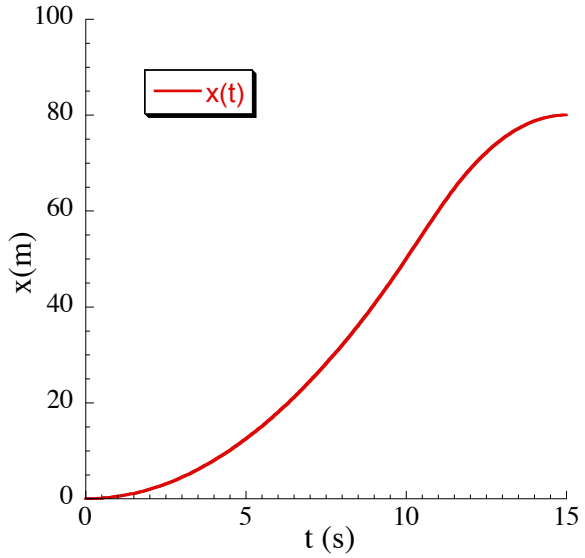
Además $v_C = v_B + a_{BC}\ (t_C - t_B) \Rightarrow$ $t_C = 15\ s$











---

2) MUELLE VERTICAL: Colgamos un muelle de longitud inicial Lo y masa despreciable de un techo. Si en la parte inferior del muelle situamos una masa **m** de modo que el conjunto queda en reposo,

a) ¿Cuánto se estira el muelle?

Si desplazamos la masa una distancia **b** de esta nueva posición de equilibrio y soltamos

b) Explica el tipo de movimiento que realiza.

c) Encuentra la ecuación del movimiento.

SOLUCION:

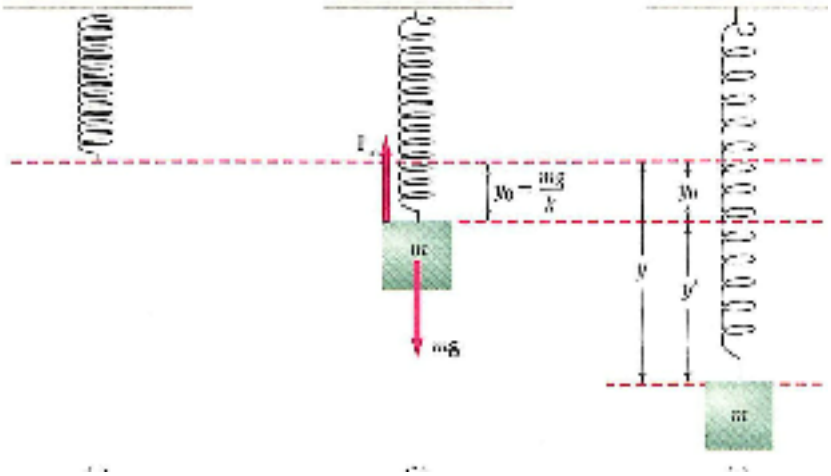
a) El muelle estará en equilibrio estático para una posición y_0 que cumpla:

$$mg - ky_0 = 0 \qquad (3.1)$$

$$y_0 = \frac{mg}{k}$$

b) La masa realizara un movimiento armónico simple (MAS) entorno a la nueva posición de equilibrio, por lo que la amplitud será b. Además, la frecuencia angular es como la de una mas unida a un muelle horizontal: $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$

c) Para encontrar la ecuación del movimiento aplicamos la segunda ley de Newton cuando la masa esta oscilando en una posición cualquiera $y = y_0 + y'$



$$mg - k\,y = m\,a \Rightarrow \quad mg - k\,(y_0 + y') = m\,a \quad \Rightarrow \quad mg - k\,y_0 - ky' = m\,a$$

Teniendo en cuenta la ecuación (3.1)

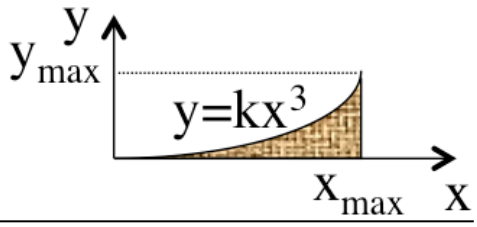
$$-ky' = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{d^2(y_0 + y')}{dt^2} = m\frac{d^2y'}{dt^2} \Rightarrow \quad \frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{k}{m}y' = = 0$$

Nos queda una ecuación diferencial de 2º orden cuya solución es $y' = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right)$

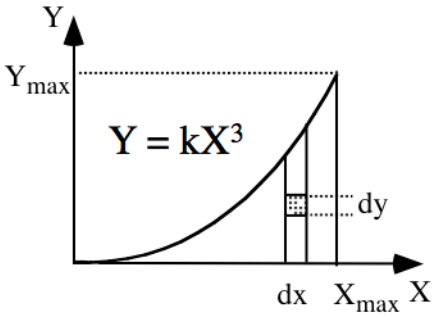
El efecto de la gravedad es desplazar la posición de equilibrio. El muelle realizara un MAS entorno a esta nueva posición de equilibrio (y_0) con el mismo T que el de un muelle horizontal. En este caso, si respecto a esta posición hemos estirado el muelle una longitud b, la amplitud será A = b y por lo tanto:

$$y' = b\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right)$$

3) Determinar la posición del centro de gravedad de la placa homogénea de la figura:



SOLUCION:



Recordando la definición de centro de masas de una superficie homogénea $x_{CM} = \frac{\int x\,ds}{\int ds}$ y teniendo en cuenta que $ds = dx\,dy$, donde este diferencial de área se integra en la superficie delimitada por la curva $y = kx^3$ y el eje x, llegamos a la ecuación de partida:

$$x_{CM} = \frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_0^{X_{max}} x\,dx \int_0^{kx^3} dy}{\int_0^{X_{max}} dx \int_0^{kx^3} dy} = \frac{\int_0^{X_{max}} x\,dx \left[y\right]_0^{kx^3}}{\int_0^{X_{max}} dx \left[y\right]_0^{kx^3}} = \frac{\int_0^{X_{max}} x\,dx\ kx^3}{\int_0^{X_{max}} dx\ kx^3} = \ .....$$

donde primero hemos integrado dy entre el eje x y la curva (kx^3) y posteriormente integraremos la variable x entre 0 y X_{max}.

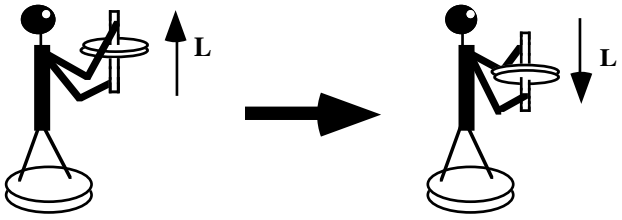
$$..... = \frac{\int_0^{X_{max}} kx^4\ dx}{\int_0^{X_{max}} kx^3\ dx} = \frac{\left[k\frac{x^5}{5}\right]_0^{X_{max}}}{\left[k\frac{x^4}{4}\right]_0^{X_{max}}} = \frac{k\frac{X_{max}^5}{5}}{k\frac{X_{max}^4}{4}} = = \frac{4}{5}X_{max}$$

Procediendo de forma análoga para la coordenada y:

$$y_{CM} = \frac{\int y\ ds}{\int ds} = \frac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_0^{X_{max}} dx \int_0^{kx^3} y\ dy}{\int_0^{X_{max}} dx \int_0^{kx^3} dy} = \frac{\int_0^{X_{max}} dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{kx^3}}{\int_0^{X_{max}} dx \left[y\right]_0^{kx^3}} = \frac{\int_0^{X_{max}} dx\ \frac{k^2x^6}{2}}{\int_0^{X_{max}} dx\ kx^3} =$$

$$= \frac{\frac{k^2}{2}\int_0^{X_{max}} dx\ x^6}{k\int_0^{X_{max}} dx\ x^3} = \frac{\frac{k^2}{2}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^{X_{max}}}{k\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{X_{max}}} = \frac{\frac{k^2}{2}\frac{X_{max}^7}{7}}{k\frac{X_{max}^4}{4}} = \frac{k^2\frac{X_{max}^7}{14}}{k\frac{X_{max}^4}{4}} = \frac{4}{14}kX_{max}^3 = \frac{2}{7}Y_{max}$$

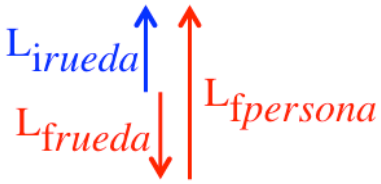
4) Una persona sostiene el eje de una rueda de bicicleta que está girando mientras se encuentra en una plataforma giratoria. Si inicialmente se encuentra en reposo mientras que la rueda gira en un plano horizontal tal con un momento angular inicial L apuntando hacia arriba explicar que ocurre si la rueda se invierte 180º alrededor de su centro. Suponer que el momento de inercia del conjunto plataforma-persona-rueda respecto al eje de giro de la plataforma es I. **(0.8).** ¿Qué principio físico has aplicado?**(0.2).**



SOLUCION:

El momento angular de la rueda apunta hacia arriba, eso significa que la rueda esta girando en sentido antihorario, para invertir el momento angular, la persona tiene que aplicar un par de fuerzas sobre el eje la rueda , por lo que (por el principio de acción y reacción) el eje aplica un par de fuerzas sobre la persona, que hace que la persona comience a girar.

Como sobre el conjunto plataforma-persona-rueda no actúa ninguna fuerza externa, el momento angular del conjunto se conserva:



$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_i\text{persona} + \vec{L}_i\text{rueda} = \vec{L}_f\text{persona} + \vec{L}_f\text{rueda} \quad \Rightarrow$$

$$0 + \vec{L} = \vec{L}_f\text{persona} + -\vec{L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{L}_f\text{persona} = 2\,\vec{L}}$$

Además, como el momento angular es igual al momento de inercia por la velocidad angular ($\vec{L} = I\vec{w}$), aplicándolo a la persona:

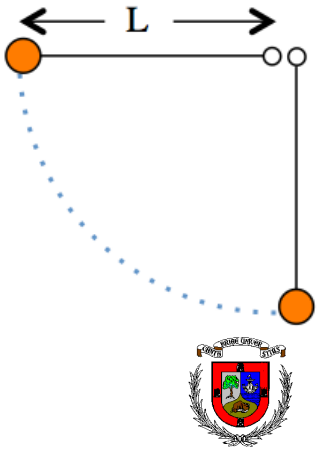
$$2\vec{L} = I\vec{w}_{\text{persona}} \Rightarrow \boxed{\vec{w}_{\text{persona}} = \frac{2\vec{L}}{I}}$$

Es decir la persona adquiere un momento angular $2\,\vec{L}$ y se pone a girar en sentido antihorario

El principio físico que hemos aplicado es el de conservación del momento angular.

PROBLEMAS

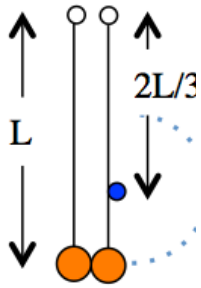
1) De un soporte penden dos esferas iguales de masa m mediante unas cuerdas ligeras y flexibles de longitud L. La primera de las esferas se desplaza hasta que la cuerda está extendida horizontalmente como se muestra en el diagrama, y se suelta desde el reposo.



a) Calcular la velocidad que alcanza la esfera cuando esta directamente debajo del punto de suspensión en la parte inferior de su oscilación **(0.2)**.

b) Determinar la tensión de la cuerda en ese punto **(0.4)**.

La esfera colisiona de forma elástica (e = 1) con la segunda esfera que quedo suspendida (recordar que e = - $\frac{v'_B - v'_A}{v_B - v_A}$).



c) Determinar la velocidad de las dos esferas después de la colisión **(0.4)**.

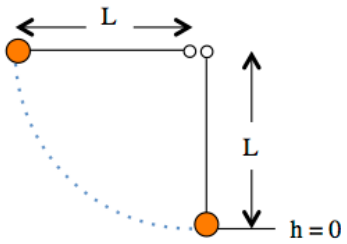
Una espiga horizontal colocada a 2L/3 debajo del punto de suspensión, como muestra la figura, intercepta el movimiento de la cuerda de la segunda esfera, lo que hace que la esfera se mueva en una trayectoria circular alrededor de aquella,

d) ¿Cuál es la velocidad de la esfera cuando alcanza el punto directamente encima de la espiga? **(0.2)**.

e) ¿Cuál es la tensión de la cuerda en ese punto? **(0.4)**.

f) ¿A que distancia de por debajo del soporte tendría que colocarse la espiga para que la cuerda se conservase tensa en todos los puntos de la trayectoria de la cuerda? **(0.4)**

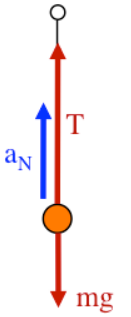
SOLUCION:



a) Aplicando el principio de conservación de la energía entre los puntos inicial y final:

$$Eci + Epi = Ecf + Epf \Rightarrow 0 + mgL = \tfrac{1}{2}mv^2 + 0 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gL}}$$

Donde hemos tomado h = 0 en la posición en que la bola esta debajo del punto de suspensión.



b) Aplicando la segunda ley de Newton, la tensión menos el peso es igual a la masa por la aceleración normal:

$$T - P = ma_N \Rightarrow \boxed{T = P + m\frac{V^2}{R} = mg + m\frac{2gL}{L} = mg + 2mg = 3mg}$$

c) Aplicando las ecuaciones del conservación del momento lineal y del coeficiente de restitución:

$$mv_1 + 0 = mv'_1 + mv'_2 \Rightarrow v_1 = v'_1 + v'_2$$

$$1 = -\frac{v'_2 - v'_1}{0 - v_1} \Rightarrow v_1 = -v'_1 + v'_2$$

Sumando las dos ecuaciones $2v_1 = 2\,v'_2$

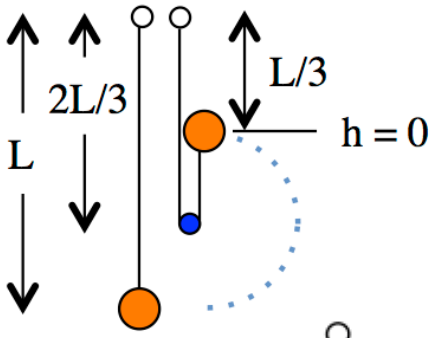
Por lo que $\boxed{\begin{array}{l} v'_2 = v_1 \\ v'_1 = 0 \end{array}}$

Es decir, la primera bola se queda parada y toda la energía cinética se transmite a la segunda bola.

d) Como no hay perdida de energía en la colisión, aplicamos el principio de conservación de la energía entre los puntos inicial, antes de soltar la bola y el final, con la bola encima de la espiga:

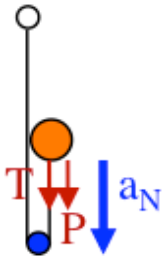
$$Eci + Epi = Ecf + Epf \Rightarrow 0 + mg(L/3) = \tfrac{1}{2}mv^2 + 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{v = \sqrt{\tfrac{2}{3}gL}}$$



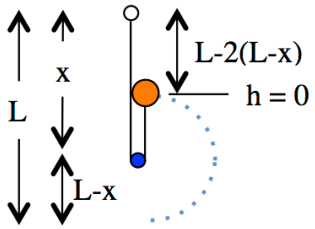
Donde hemos tomado h = 0 en la posición de la bola encima de la espiga (que se encuentara a L/3 por debajo del punto de suspensión).

e) Aplicando la segunda ley de Newton, la tensión mas el peso es igual a la masa por la aceleración normal:



$$T + P = ma_N \Rightarrow \boxed{T = m\frac{V^2}{R} - mg = m\frac{\frac{2}{3}gL}{\frac{1}{3}L} - mg = 2mg - mg = mg}$$

f) Si la espiga la situamos a una distancia h por debajo del punto de suspensión, el radio de giro de la bola entorno a la espiga será L-x , y cuando la bola este encima de la espiga, estará a una distancia L – 2(L-x) del punto de suspensión.



Aplicando otra vez el principio de conservación de la energía entre la posición de la bola a al altura del punto de suspensión y la bola justamente encima de la espiga (en esta posición tomamos h = 0):

$$Eci + Epi = Ecf + Epf \Rightarrow 0 + mg\,[L - 2(L-x)] = \tfrac{1}{2}mv^2 + 0 \Rightarrow v = \sqrt{2g(2x-L)}$$

Una vez conocida la velocidad, aplicamos la segunda ley de Newton: la tensión mas el peso es igual a la masa por la aceleración normal:

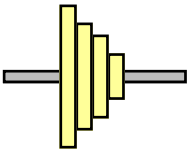
$$T + P = ma_N \Rightarrow T = m\frac{V^2}{R} - mg$$

Si la cuerda esta tensa $T \geq 0 \Rightarrow \frac{V^2}{R} \geq g \Rightarrow V^2 \geq gR \Rightarrow 2g(2x-L) \geq g\,(L-x)] \Rightarrow 4x - 2L \geq L - x$

$$5x \geq 3L \Rightarrow \boxed{x \geq \frac{3}{5}L}$$

---

2) Tenemos un conjunto de cuatro poleas unidas entre si que pueden girar entorno a un eje, tal como muestra la figura:



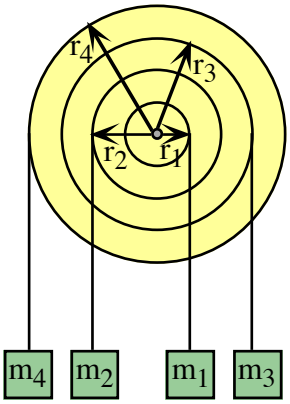
a) Determinar: el momento de inercia del conjunto. Considerar las poleas como discos uniformes **(0.2)**.

Si de cada polea enrollamos cuerdas de las que penden masas, tal como muestra la figura

b) Calcular el valor de la masa m_4 para que el sistema esté en equilibrio estático **(0.4)**,

c) Si cortamos la cuerda que sujeta a la masa m_4, determinar las ecuaciones de la aceleración angular de las poleas α y de las tensiones de las cuerdas T_i (en función de las masas, los radios, g y el momento de inercia del conjunto de poleas). Posteriormente, usando dichas ecuaciones determinar los valores numéricos de α y de T_i. **(1)**,

d) Si todas las masas estaban inicialmente a 2 m del suelo antes de cortar la cuerda, al cortar la cuerda, que dos masas (de entre las cuatro) llegan primero al suelo, y con que diferencia de tiempos lo hacen. **(0.4)**,



Datos: $r_1 = 10$ cm, $m_{P1} = 2$ kg, $m_1 = 100$ kg

$r_2 = 20$ cm, $m_{P2} = 5$ kg, $m_2 = 50$ kg

$r_3 = 30$ cm, $m_{P3} = 10$ kg, $m_3 = 40$ kg

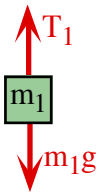
$r_4 = 40$ cm, $m_{P4} = 20$ kg, $m_4 =$ ¿?????

SOLUCION

a) El momento de inercia de un cilindro es $I = (1/2)mr^2$. En este caso tenemos 4 cilindros unidos y el momento de inercia del conjunto es la suma de los momentos de inercia:

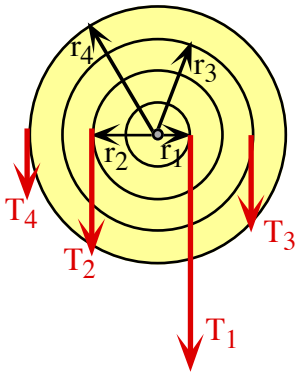
$$I = \sum Ii = (1/2)2\ (0.1)^2 + (1/2)5\ (0.2)^2 + (1/2)10\ (0.3)^2 + (1/2)20\ (0.4)^2 = 2.16 \text{ kg m}^2$$

b) Si el conjunto esta en estado estático, las masas no se mueven, por lo que las tensiones de las cuerdas serán iguales a los pesos de las masas que cuelgan de ellas.



$$\sum F = 0 \Rightarrow T_1 = m_1 g,\ T_2 = m_2 g,\ T_3 = m_3 g \text{ y } T_4 = m_4 g,$$

Estas tensiones, a su vez, actúan sobre las poleas originando momentos. La suma de todos los momentos tiene que ser cero, ya que las poleas no giran:



$$\sum M = 0 \Rightarrow m_1 g r_1 + m_3 g r_3 - m_2 g r_2 - m_4 g r_4 = 0$$

$$\Rightarrow m_4 = (100\ 0.1 + 40\ 0.3 - 50\ 0.2)/0.3 = 30 \text{ kg}$$

Hemos considerado positivos los momentos que tratan de girar las poleas en sentido horario y negativos los que tratan de girarlas en sentido antihorario.

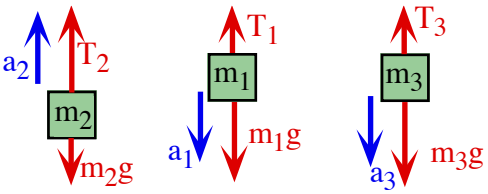
c) Al cortar la cuerda unida a la masa m_4 los momentos no se cancelan y el sistema empezara a girar con una aceleración angular α., mientras que las masas empezaran a desplazarse con una aceleración lineal $a_i = \alpha\ r_i$

Tenemos cuatro incógnitas: las tres tensiones y la aceleración angular α.. Por lo tanto tenemos que plantear cuatro ecuaciones, tres para las traslaciones de las masas y una para la rotación de la polea:

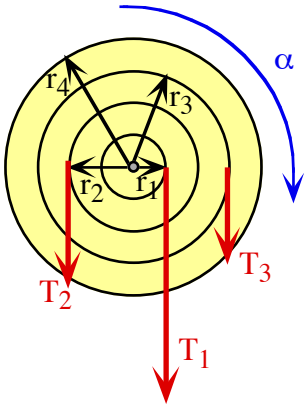
$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \Rightarrow T_1 = m_1 g - m_1 a_1 \Rightarrow$ $\boxed{T_1 = m_1(g - \alpha r_1)}$

$m_3 g - T_3 = m_3 a_3 \Rightarrow T_3 = m_3 g - m_3 a_3 \Rightarrow$ $\boxed{T_3 = m_3(g - \alpha r_3)}$

$T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \Rightarrow T_2 = m_2 g + m_2 a_2 \Rightarrow$ $\boxed{T_2 = m_2(g + \alpha r_2)}$



$T_1 r_1 + T_3 r_3 - T_2 r_2 = I\alpha$



Substituyendo las tensiones en esta ecuación

$m_1(g - \alpha r_1) r_1 + m_3(g - \alpha r_3) r_3 - m_2(g + \alpha r_2) r_2 = I\alpha \Rightarrow$

$m_1 g r_1 + m_3 g r_3 - m_2 g r_2 = I\alpha + m_1 r_1^2 \alpha + m_2 r_2^2 \alpha + m_3 r_3^2 \alpha \Rightarrow$

$$\boxed{\alpha = \frac{(m_1 r_1 + m_3 r_3 - m_2 r_2) g}{I + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2}}$$

sustituyendo los valores de I, las masas y los radios:

$$\boxed{\alpha = \frac{(100\ 0.1 + 40\ 0.3 - 50\ 0.2)\ 9.81}{2.16 + 100\ 0.1^2 + 50\ 0.2^2 + 40\ 0.3^2} = 13.44 \text{ rad/s}}$$

Sustituyendo este valor en las ecuaciones de las tensiones:

$T_1 = 100\ (9.81 - 13.44\ \ 0.1) \Rightarrow$ $\boxed{T_1 = 846.6 \text{ N}}$

$T_3 = 40\ (9.81 - 13.44\ 0.3) \Rightarrow$ $\boxed{T_3 = 231.1 \text{ N}}$

$T_2 = 50\ (9.81 + 13.44\ 0.2) \Rightarrow$ $\boxed{T_2 = 624.9 \text{ N}}$

d) Las aceleraciones de las masas serán:

$a_1 = \alpha\ r_1 = 13.44\ \ 0.1 = 1.344 \text{ ms}^{-2} \Downarrow$

$a_2 = \alpha\ r_2 = 13.44\ \ 0.2 = 2.688 \text{ ms}^{-2} \Uparrow$ (ascendente)

$a_3 = \alpha\ r_3 = 13.44\ \ 0.3 = 4.032 \text{ ms}^{-2} \Downarrow$

$a_4 = g = 9.81 \text{ ms}^{-2} \Downarrow$ (caída libre)

Las masas que primero llegan al suelo son m_4 y después m_3.

El movimiento es uniformemente acelerado por lo que $e = v_0 t + (1/2) a t^2$;

además como todas las masas parten del reposo, $v_0 = 0$ y el espacio a recorrer es $e = 2$metros $\Rightarrow$

$$t = \sqrt{\frac{2e}{a}}$$

aplicándolo a m_4 y m_3:

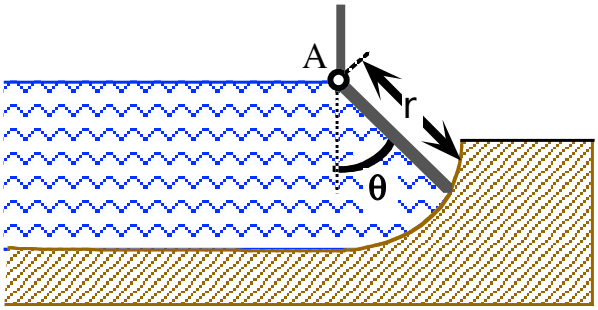
$$t_4 = \sqrt{\frac{2\ 2}{9.81}} = 0.639 \text{ s}$$

$$t_3 = \sqrt{\frac{2\ 2}{4.032}} = 0.996 \text{ s}$$

y la diferencia de tiempos es $t_3 - t_4 = 0.996 - 0.639 = 0.357$ s

---

3) Una compuerta uniforme rectangular de masa *M*, altura *r* y anchura *b* está sujeta por goznes en A. Si el líquido de densidad ρ alcanza una altura *r*, determinar:



a) La fuerza que el líquido ejerce sobre la compuerta (en función de ρ, g, b, r y θ) **(0.4)**.

b) El punto de aplicación de la fuerza resultante (en función de *r*) **(0.4)**.

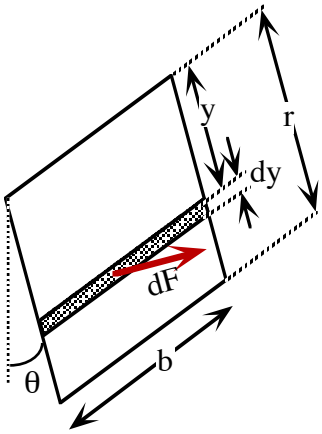
c) el ángulo que alcanza la compuerta respecto de la vertical θ (en función de ρ, b, r y *M* **(0.4)**.

Si el líquido es agua, $r = 2$ m, $b = 0.5$ m y $M = 1000$ kg, **calcular numéricamente**:

d) La presión debida al agua en el fondo del recipiente **(0.4)**.

e) La fuerza que ejerce el agua sobre la compuerta y el ángulo θ utilizando las ecuaciones encontradas en los apartados a) y c) respectivamente **(0.4)**.

SOLUCION:



a) Consideramos una franja de la compuerta de grosor dy y longitud b situada a una distancia y del gozne y por lo tanto a una profundidad ycosθ, la fuerza que actúa sobre la misma será la presión ejercida por el agua (P = ρgycosθ) multiplicada por la superficie:

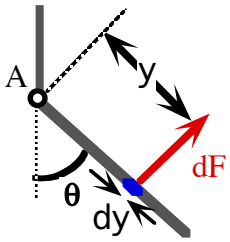
$$dF = Pds = Pbdy = \rho gy\cos\theta\ bdy$$

Para calcular la fuerza total sobre la presa debemos integrar dF entre la superficie del agua y el extremo inferior de la compuerta:

$$F = \int_0^r dF = \int_0^r \rho gy\cos\theta\ bdy = \rho gb\cos\theta \int_0^r ydy = \rho gb\cos\theta \left[\frac{y}{2}\right]_0^r = \frac{1}{2}\rho gb\cos\theta\ r^2$$

b) El punto de aplicación de la fuerza F sobre la presa será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos)

El momento respecto al punto A de un dF actuando sobre una franja de anchura dy a una distancia y será:



$$dM = dF\, y = \rho g y \cos\theta\, b\, dy\, y$$

donde hemos tomado el valor de dF calculado en el apartado anterior. Para calcular el momento total integramos entre el borde superior e inferior de la presa:

$$M = \int_0^r dM = \int_0^r \rho g y \cos\theta\, b\, dy\, y = \rho g b \cos\theta \int_0^r y^2 dy = \rho g b \cos\theta \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^r \Rightarrow$$

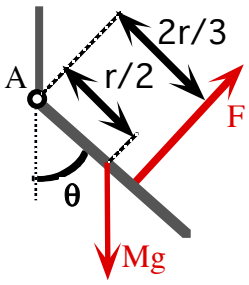
$$\boxed{M = (1/3)\,\rho g b \cos\theta\, r^3}$$

Si el punto de aplicación esta a una distancia d respecto al gozne A de la presa, tiene que verificarse que

$$Fd = M \Rightarrow$$

$$d = \frac{M}{F} = \frac{(1/3)\,\rho\, g\, b \cos\theta\, r^3}{(1/2)\,\rho\, g\, b \cos\theta\, r^2} \Rightarrow \boxed{d = (2/3)r}$$

d) La compuerta es uniforme, por lo que el punto de aplicación del peso esta situado en el centro de la misma, a una distancia r/2 del gozne.
En el equilibrio, la compuerta no rota, por lo que $\sum M_A = 0 \Rightarrow$



$$Mg\,(r/2)\,\text{sen}\theta - F\,(2/3)r\,\text{sen}\,90 = 0 \Rightarrow$$

$$Mg\,(r/2)\,\text{sen}\theta = (1/2)\,\rho g b \cos\theta\, r^2\,(2/3)\,r \Rightarrow \quad M\,(\text{sen}\theta/\cos\theta) = \rho b r^2\,(2/3) \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{tg}\theta = \frac{2\rho b r^2}{3M}}$$

d) La presión debida al agua a una profundidad H es ρgH, en nuestro caso H = r:

$$\boxed{P = \rho g r} = 10^3\ 9.81\ 2 = 19.62\ 10^3\ \text{Pascales} = \boxed{0.1937\ \text{atm}}$$

e) $\boxed{F = (1/2)\,\rho g b \cos\theta\, r^2 = (1/2)\ 10^3\ 9.81\ 0.5\ \cos\theta\ 2^2 = 9810\cos\theta\ \text{N}}$

$$\text{tg}\theta = \frac{2\rho b r^2}{3M} = \frac{2\ 1000\ 0.5\ 2^2}{3\ 1000} = \frac{4}{3} \Rightarrow \quad \theta = \text{arctg}\,(4/3) \Rightarrow \boxed{\theta = 53.13°}$$