EXAMEN DE FISICA I (GTI) 6-9-2017

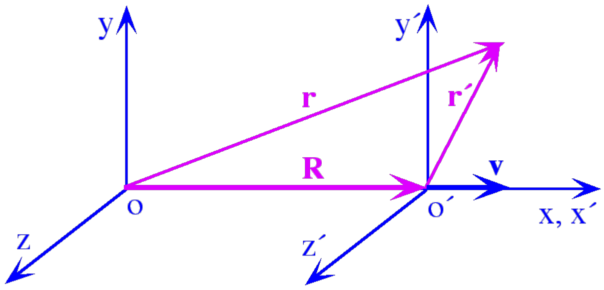
CUESTIONES

1) a) Relación entre las coordenadas espaciales, velocidades y aceleraciones en el movimiento relativo de traslación uniforme (Transformaciones Galileanas) (0.6).
b) ¿Cuando no se pueden utilizar estas trasformaciones, y hay que utilizar las de Lorentz? Da una idea de porqué. (0.4)

SOLUCION

Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia con los ejes paralelos y uno moviéndose respecto al otro a lo largo de la dirección x con una velocidad : $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$

Supongamos también que para t = 0 el origen de coordenadas de ambos sistemas o y o´ coinciden.
En un cierto instante de tiempo la separación entre los dos orígenes será $\mathbf{R} = \mathbf{oo´} = \mathbf{v}t = vt\,\mathbf{i}$
La posición de una partícula respecto al sistema o viene descrita por un vector de posición **r**, mientras que respecto al sistema o´ el vector de posición será **r´**.



La relación entre los vectores de posición en ambos sistemas es $\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'} \Rightarrow \begin{cases} x = vt + x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

Solo es diferente la coordenada x. Derivando la relación vectorial de las posiciones:

$$\mathbf{V} = d\mathbf{r}/dt = d\mathbf{R}/dt + d\mathbf{r}'/dt = \mathbf{v} + \mathbf{V}' \Rightarrow \begin{cases} Vx = v + V'x \\ Vy = V'y \\ Vz = V'z \end{cases}$$

Solo es diferente la componente x de la velocidad. Derivando la relación vectorial de las velocidades:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{V}/dt = d\mathbf{v}/dt + d\mathbf{V}'/dt$$

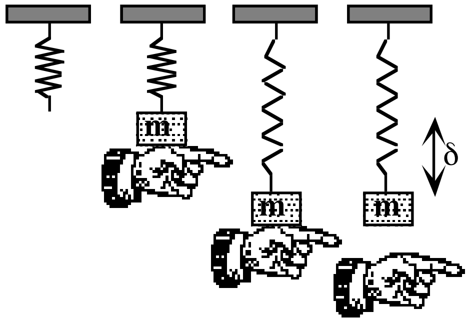
Pero al ser un movimiento de traslación uniforme: $d\mathbf{v}/dt = 0$ y $d\mathbf{V}'/dt = \mathbf{a}'$ por lo que $\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}'}$

Este es un resultado muy importante, ya que la aceleración es un invariante en los sistemas que se mueven con velocidades uniformes unos respecto de otros (sistemas inerciales).

Las transformaciones de Galileo dejan de ser validas cuando las velocidades entre los sistemas de referencia se acercan a la velocidad de la luz. En ese caso tenemos que utilizar las transformaciones de Lorentz. La razón esta en que la luz tiene que llevar la misma velocidad para los dos sistemas de referencia, y esto solo se cumple si aplicamos las transformaciones de Lorentz.

Para velocidades de desplazamiento entre sistemas pequeñas ($v << c$) aunque apliquemos las transformaciones de Galileo, la luz lleva prácticamente la misma velocidad c para los dos sistemas. Sin embargo, si v tiende a c, al aplicar las transformaciones de Galileo, encontraríamos claramente diferentes velocidades para la luz en los dos sistemas y ello nos obliga a utilizar Lorentz.

2) Un estudiante de física cuelga un cuerpo de un muelle y lo suelta poco a poco, sujetándolo con la mano, de forma que se alcanza un equilibrio final entre la fuerza del muelle y el peso del cuerpo con un alargamiento δ del muelle. Según sus conocimientos de física en este caso se debe de cumplir que:



$$\mathbf{F}_{\text{elástica}} + \mathbf{mg} = \mathbf{ma} \quad \Rightarrow \quad K\ \delta - mg = 0$$
$$\Rightarrow \delta = mg / K$$

Sin embargo utilizando el método de las energías y tomando el origen de energía potencial gravitatoria nulo en la posición final del cuerpo:

$$mg\delta = (1/2)\,K\delta^2 \quad \Rightarrow \delta = 2mg / K$$

¿Cuál de los dos razonamientos es el correcto y dónde está el fallo en el razonamiento incorrecto? (1)

SOLUCION

El razonamiento correcto es el primero, ya que las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en el estado final son nulas y como la velocidad es cero, por la 1ª ley de Newton el cuerpo permanece en reposo.

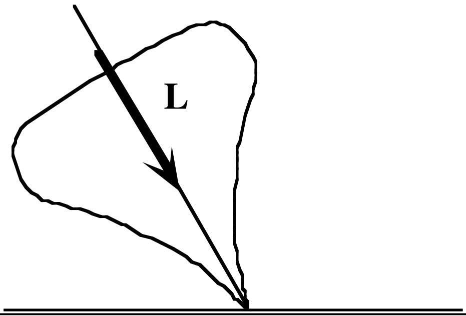
El segundo razonamiento no es aplicable en este caso ya que no considera el trabajo realizado por la mano para que la masa descienda lentamente.

El desplazamiento calculado en este razonamiento, δ = 2mg / K, que como hemos dicho anteriormente no considera el trabajo de la mano, corresponde al que desplazamiento máximo que tendría el cuerpo si lo soltamos libremente desde la posición inicial, y no se corresponde con una posición de equilibrio, ya que para δ = 2mg / K la fuerza del muelle es mayor que el peso y la masa volvería a subir.

4) El trompo de la figura de masa m y momento de inercia I gira de modo que su vector momento angular L apunta a lo largo de su eje hacia el punto de apoyo.

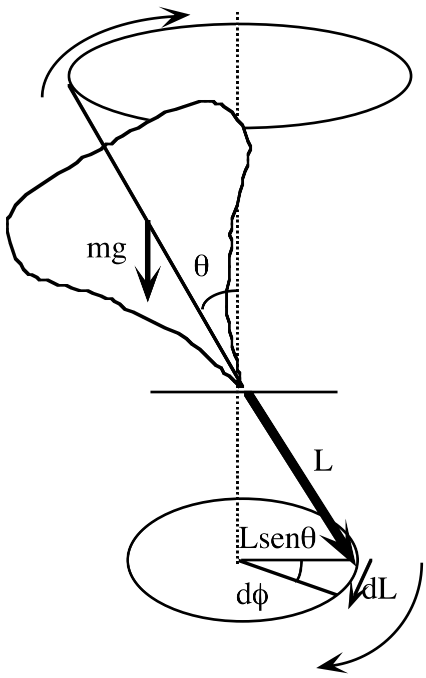
a) Analizar y discutir como se realizará el movimiento de precesión (0.4).

b) Deducir el valor de la velocidad angular de precesión si suponemos que el centro de masas se encuentra a una distancia d del punto de apoyo (0.6).



SOLUCION

El peso realiza un momento respecto al punto de apoyo que es perpendicular al plano del papel y sale de el. Ese momento produce un d**L** que siempre es perpendicular a **L** y que por lo tanto solo cambia su dirección, pero no su valor. **L** entonces gira entorno a la dirección vertical, realizando un movimiento que se denomina de precesión. El extremo de L realiza un movimiento circular, tal como muestra la figura. Visto el trompo desde arriba, el movimiento es en sentido horario.

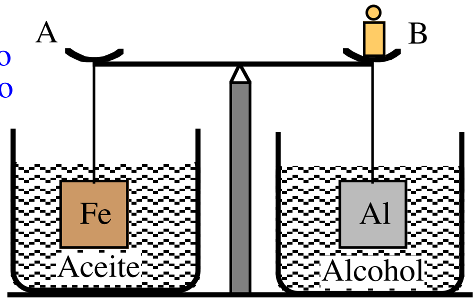


Para calcular la velocidad angular de precesión Ω (= dϕ / dt) partimos de la ecuación que relaciona el momento de la fuerza con la derivada temporal del momento angular: (suponemos que el centro de masas está a una distancia d del punto de apoyo)

$$\mathbf{M} = d\mathbf{L} / dt \qquad \begin{matrix} |\mathbf{M}| = mgd\,\mathrm{sen}\theta \\ |d\mathbf{L}| = L\,\mathrm{sen}\theta\, d\phi \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad mgd\,\mathrm{sen}\theta = L\,\mathrm{sen}\theta\, d\phi / dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Omega = d\phi / dt = (mgd\,\mathrm{sen}\theta) / (L\,\mathrm{sen}\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega = mgd / L}$$

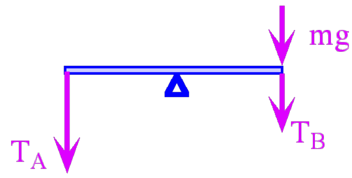
4) a) Enuncia y razona el principio de Arquímedes **(0.4)**.
b) Del platillo A de una balanza hidrostática se suspende un cubo macizo de Fe de arista 7 cm y del platillo B se suspende un cubo macizo de Al de arista 10 cm. Sumergimos el cubo de Fe en aceite y el de Al en alcohol. En estas condiciones hay que añadir al platillo B una masa de 496 g para equilibrar la balanza. Calcular la densidad del aceite **(0.6)**.
Datos: $\rho_{Fe} = 7{,}8$ g / cm^3, $\rho_{Al} = 2{,}67$ g / cm^3, $\rho_{Alcohol} = 0{,}91$ g / cm^3



SOLUCION

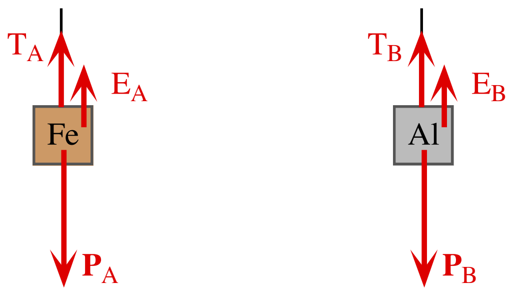
a) El principio de Arquímedes dice que todo cuerpo sumergido en el seno de un fluido experimenta una fuerza ascensorial (empuje) igual al peso del volumen desalojado.
Si tenemos….

b) Sobre el brazo de la balanza solo actúan las tensiones de las cuerdas y el peso colocado en B. Como está en equilibrio, se tiene que cumplir que



$$T_A = T_B + mg \qquad (1)$$

Para calcular las tensiones, aplicamos el Principio de Arquímedes a cada uno de los cuerpos



Cuerpo A: $T_A + E_A - P_A = 0 \Rightarrow T_A = P_A - E_A = V_A \rho_A g - V_A \rho_{aceite} g$

Cuerpo B: $T_B + E_B - P_B = 0 \Rightarrow T_B = P_B - E_B = V_B \rho_B g - V_B \rho_{alcohol} g$

Sustituyendo estas tensiones en la ecuación (1) :

$$V_A \rho_A \cancel{g} - V_A \rho_{aceite} \cancel{g} = V_B \rho_B \cancel{g} - V_B \rho_{alcohol} \cancel{g} + m\cancel{g} \Rightarrow$$

$$V_A \rho_A - V_A \rho_{aceite} = V_B (\rho_B - \rho_{alcohol}) + m \Rightarrow$$

$$V_A \rho_{aceite} = V_A \rho_A - V_B (\rho_B - \rho_{alcohol}) - m \Rightarrow$$

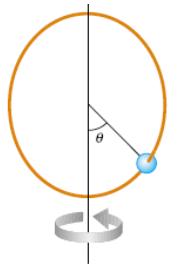
$$\rho_{aceite} = [V_A \rho_A - V_B (\rho_B - \rho_{alcohol}) - m] / V_A \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho_{aceite}} = [(0.07)^3\, 7.8\, 10^3 - (0.1)^3\, (2.67 - 0.91)\, 10^3 - 0.496] / (0.07)^3 = \boxed{1.22\, 10^3 \text{ Kg/m}^3}$$

PROBLEMAS

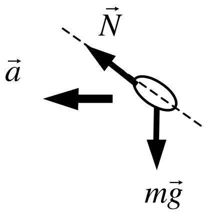
1) Una pequeña cuenta esférica de masa 10 g puede deslizar sin rozamiento por un aro circular de 15 cm de radio que se encuentra girando como se muestra en la figura. Si el periodo de la rotación del aro es de 0.45 s, hallar:

a) El valor de θ para la órbita estable de la cuenta (1).
b) La reacción del aro sobre la cuenta (0.5).
c) ¿Qué sucedería si el periodo es de 0.85 s? (0.5).



SOLUCION

a) y b) Dibujando el diagrama de fuerzas y planteando la segunda ley de Newton:



$$\left.\begin{aligned} &N\cos\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{mg}{N} \\ &N\,\mathrm{sen}\,\theta = ma_N = m\omega^2 R_{giro} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Sol. 1} \left\{\begin{aligned} &\mathrm{sen}\,\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0 \\ &N = mg = \boxed{0.098\text{ N}} \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \quad \text{Sol. 2} \left\{\begin{aligned} &N = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \boxed{0.292\text{ N}} \\ &\theta = \mathrm{Ar}\cos\left(\frac{\mathrm{g}\mathrm{T}^2}{4\pi^2 R}\right) = \boxed{70.42^{\circ}} \end{aligned}\right.$$

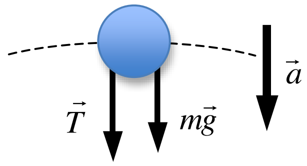
c) Si T = 0.85 la solución 2 no tendría sentido ya que el coseno del ángulo debería ser mayor que la unidad lo cual es imposible. La única solución viable es la 1.

2) Una pequeña esfera de 100 g de masa cuelga de un hilo de 2 m de longitud cuyo otro extremo está sujeto a un punto fijo. Lanzamos horizontalmente una segunda esfera que choca frontalmente con la primera, siendo el coeficiente de restitución e = 0.25.

a) Con qué velocidad mínima tendría que salir la esfera de 100 g después del choque para que describa un movimiento circular completo en el plano vertical (0.4).
b) Cuando sucede lo anterior y la segunda esfera cae verticalmente después del choque, calcular la velocidad que ha de llevar la segunda esfera (0.6) y su masa (0.6).
c) ¿Qué energía se pierde en el choque? (0.4).

SOLUCION

a) La esfera 1 va a realizar un movimiento circular de radio L. Dibujando el diagrama de fuerzas cuando se encuentra en la parte más alta del círculo vemos que su aceleración va a ser vertical y por lo tanto sólo tendrá componente normal $a_n = v_{arriba}^2 / L$. Aplicando la segunda ley de Newton:



$$\vec{T} + m_1\vec{g} = m_1\vec{a}_1 \quad \Rightarrow \quad T + m_1 g = m_1 a_1 = m_1 \frac{v_{1\,arriba}^2}{R} \quad \Rightarrow \quad T = m_1\left(\frac{v_{1\,arriba}^2}{R} - g\right)$$

Para la velocidad arriba mínima la cuerda pierde su tensión:

¡Error! Marcador no definido. $m_1\left(\frac{v_{1\,arriba}^2}{R} - g\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\substack{1\,arriba \\ mínima}} = \sqrt{gL}$

Aplicando conservación de la energía entre la posición de arriba y la de abajo (justo al salir del choque):

$$\frac{1}{2} m_1 v_{\substack{1\,abajo \\ mínima}}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{\substack{1\,arriba \\ mínima}}^2 + m_1 g(2L) \quad \Rightarrow \quad v_{\substack{1\,abajo \\ mínima}} = \sqrt{v_{\substack{1\,arriba \\ mínima}}^2 + 4gL} = \sqrt{5gL} = \boxed{9.90 \text{ m/s}}$$

b) Si la segunda esfera, que impacta horizontalmente con la primera, cae después verticalmente quiere decir que su velocidad horizontal después del choque es nula. Aplicando la conservación del momento lineal (en la dirección horizontal) y la ecuación del coeficiente de restitución:

$$\left.\begin{array}{l} m_2 v_2 = m_1 v_{\substack{1\,abajo \\ mínima}} \\[2ex] e = \dfrac{1}{4} = -\dfrac{v_{\substack{1\,abajo \\ mínima}}}{-v_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m_2 = \dfrac{m_1}{4} = \boxed{25 \text{ g}} \\[2ex] v_2 = 4 v_{\substack{1\,abajo \\ mínima}} = \boxed{39.60 \text{ m/s}} \end{array}\right.$$

c) La variación de energía cinética en el choque será:

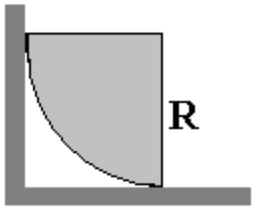
$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m_1 v_{\substack{1\,abajo \\ mínima}}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \boxed{-14.7 \text{ J}}$$

3) En Una placa está formada por un cuarto de círculo de radio R y masa M, se apoya sobre una pared vertical lisa y un suelo rugoso. Determinar:

a) Las coordenadas del centro de masas respecto del sistema de referencia pared-suelo (0.6).

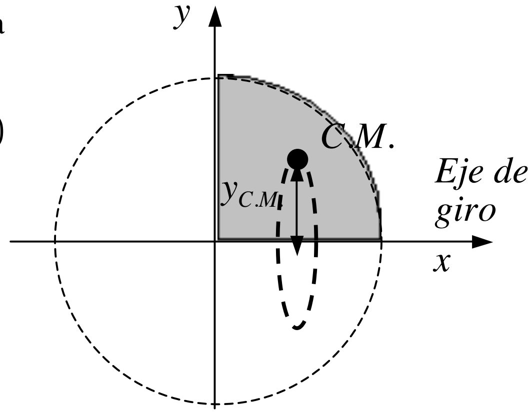
b) El valor mínimo del coeficiente de rozamiento compatible con el equilibrio (0.8).

c) Las reacciones en los apoyos si M = 3 kg (0.6).



SOLUCION

a) Aplicando el segundo teorema de Pappus Guldin a la placa de la figura:



$$Vol._{generado} = A_{placa} \cdot (\text{recorrido del C.M. de la placa})$$

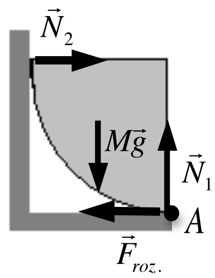
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{1}{4}\left(\pi R^2\right)\cdot\left(2\pi y_{C.M.}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y_{C.M.} = \frac{4R}{3\pi} \quad \overset{(\text{por simetría})}{\Rightarrow} \quad x_{C.M.} = \frac{4R}{3\pi}$$

Teniendo en cuenta que nuestro origen de coordenadas se sitúa en la esquina entre la pared y el suelo:

$$\vec{r}_{C.M.} = (R,R) - \left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}\right) = \boxed{\left(R - \frac{4R}{3\pi}, R - \frac{4R}{3\pi}\right)}$$

b) Dibujando el diagrama de fuerzas que actúan sobre la placa y aplicando las ecuaciones de la estática:



$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N_2 - F_{roz.} = 0 \\ N_1 - Mg = 0 \end{cases}$$

$$\sum_i \vec{\tau}_{i,A} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 R - Mg \cdot \frac{4R}{3\pi} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} N_1 = Mg \\ F_{roz.} = N_2 = \dfrac{4}{3\pi} Mg \end{cases}$$

El valor mínimo necesario del coeficiente de rozamiento sería:

$$F_{roz.} \le \mu N_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3\pi} \le \mu \quad \Rightarrow \quad \mu_{mín.} = \boxed{\frac{4}{3\pi} = 0.4244}$$

c) Para el valor de masa que nos dan:

$$N_1 = Mg = \boxed{29.4 \text{ N}}$$

$$F_{roz.} = N_2 = \frac{4}{3\pi} Mg = \boxed{12.48 \text{ N}}$$