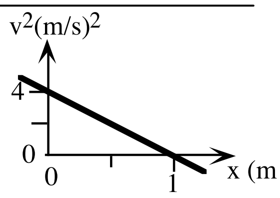
EXAMEN DE FISICA I (I.I.) 23-1-2017

CUESTIONES

1) Dada la dependencia de la velocidad con la posición en un movimiento rectilíneo mostrada por la siguiente gráfica:

a) Determinar la dependencia con el tiempo de la aceleración velocidad y posición del móvil, sabiendo que x(0) = 0.75 m. **(0.6)**

b) Representa las gráficas x(t), v(t) y a(t). **(0.4)**



SOLUCION:

a) Una de las ecuaciones conocidas de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2\,a\,(x_2 - x_1)$$

es decir, la velocidad al cuadrado es directamente proporcional al desplazamiento, tal como se observa en la gráfica. Para conocer la aceleración a, aplicamos dicha ecuación entre los puntos 1 ($v_1^2 = 4$, $x_1 = 0$) y 2 ($v_2^2 = 0$, $x_2 = 0$) y nos queda: $(0 - 4) = 2\,a\,(1 - 0)$ $\Rightarrow$ $\boxed{a = -2\ m/s^2}$

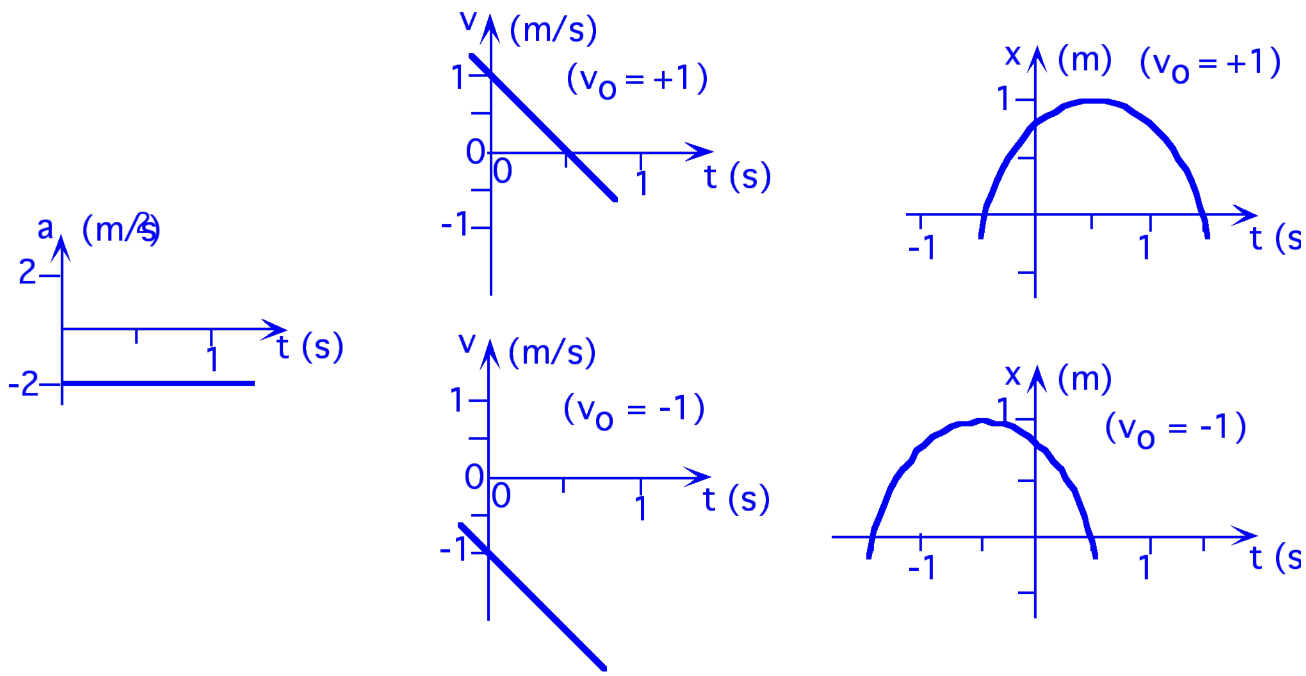
Por otra parte nos dicen que para t = 0, la posición es x = 0.75 m. Si nos fijamos en la gráfica vemos que a x = 0.75 le corresponde un valor de $v^2 = 1$ $\Rightarrow$ $v = \pm 1$ m/s. Otra forma sería a partir de la ecuación de la recta representada en la gráfica ($v^2 = 4 - 4x$) en la cual, si damos un valor a x de 0.75, obtenemos que $v^2 = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ $v = \pm 1$ m/s. Es decir la velocidad inicial puede ser positiva o negativa.

Por tanto los datos para tiempo igual a 0 son:

$$x_0 = 0.75\ m$$
$$v_0 = \pm 1\ m/s$$

Y las ecuaciones: $v = v_0 + at$, $x = x_0 + v_0 t + (1/2)at^2$ se escriben de la forma: $\boxed{v = \pm 1 - 2t \quad x = 0.75 \pm t - t^2}$

b) Ahora simplemente tenemos que representar las gráficas de forma adecuada, donde para la aceleración solo hay una posibilidad, mientras que para la v y la x tenemos dos:



2) a) Explicar los distintos tipos de choque según el valor del coeficiente de restitución, resaltando que magnitudes físicas permanecen constantes en cada caso **(0.4)**.
Una bola de arcilla se lanza contra una pared de ladrillo. La arcilla se detiene y se queda pegada en la pared.
b) ¿De que tipo de choque se trata? **(0.1).**
c) ¿Se conserva la energía mecánica? **(0.2).**
d) ¿Se conserva el momento lineal? **(0.3).**
Contestar razonadamente a cada una de las preguntas.

SOLUCION:

a) El coeficiente de restitución tiene valores comprendidos entre 0 y 1. Cualquiera que sea el valor de e, siempre se conserva el momento lineal, por lo que el valor de e solo afecta a la energía.

Si **e = 1** el choque es elástico y se conserva la energía mecánica. Las diferencias de velocidades entres los dos cuerpos antes y después del choque son las mismas.

Si **e<1** el choque es inelástico, hay perdida de energía y las velocidades relativas entres las partículas después del choque es menor que antes del choque.

Si **e = 0**, el choque es el mas inelástico posible, es cuando mas energía mecánica se pierde y las partículas quedan "pegadas" después del choque, llevando la misma velocidad.

b) Como la bola queda pegada a la pared, la velocidad de bola (v'_b) y pared (v'_p) es la misma después del choque, por lo que se trata de un **choque inelástico con e = 0** (recordemos que $e = -\dfrac{v'_b - v'_p}{v_b - v_p}$).

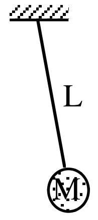
c) No se conserva la energía mecánica, ya que la energía cinética que lleva la bola se pierde una vez que choca con la pared. Esto es debido a que se supone que la velocidad de la pared es cero.

d) El momento lineal **si** se conserva, ya que como comentamos en el primer apartado, en un choque el momento lineal siempre se conserva.
Aparentemente es contradictorio: primero la bola tiene velocidad y momento y después de chocar pasan ambos a valer cero. Sin embargo, hay que tener en cuenta, que aunque la velocidad después del choque se supone cero, la masa del conjunto bola-pared es infinita comparada con la de la bola, y aunque la velocidad es "prácticamente" cero, al tener una masa cuasi infinita, el producto cero*infinito equivalen al momento del conjunto antes del choque.

3) Construimos un péndulo suspendiendo una masa M de un hilo de longitud L y masa despreciable.

a) Demostrar el tipo de movimiento que realiza para pequeños ángulos **(0.5)**.

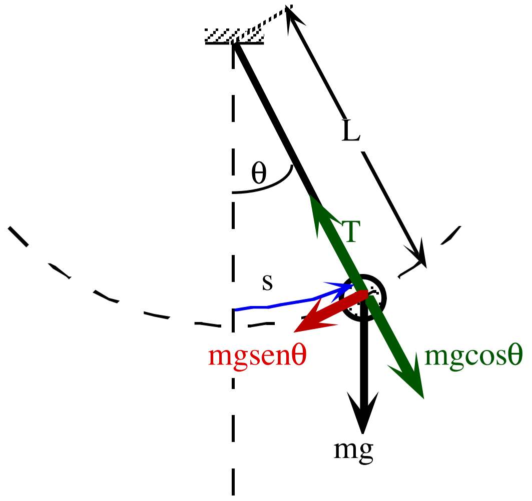
b) Encontrar su período **(0.5)**.



SOLUCION:

a) Al desplazar la masa de su posición de equilibrio, la componente tangencial del peso, origina una aceleración tangencial. Si aplicamos la 2º ley de Newton:

$$F_T = m\,a_T = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2} = mL\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \Rightarrow$$



$$-\,mg\,sen\theta = mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

El signo (-) de la fuerza se introduce ya que cuando el ángulo θ es (+) la fuerza es (-). La fuerza se opone al aumento del ángulo

Si $\theta < 10°$ $sen\theta = \theta$ $\Rightarrow$ La ecuación anterior se transforma en

$$-\,g\theta = L\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0}$$

Es una ecuación diferencial de 2º grado cuya solución es $\boxed{\theta = \theta_0 \cos\left(\sqrt{g/L}\;t + \alpha\right)}$

Por lo que realizara un movimiento periódico armónico simple de amplitud θ_0, fase inicial α y frecuencia angular $\omega = \sqrt{g/L}$ $\Rightarrow$

b) teniendo en cuenta la relación entre el período y la frecuencia angular $T = 2\pi/\omega$ $\Rightarrow$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{L/g}}$$

4. a) Enunciar los teoremas de Pappus-Guldin **(0.4)**.

b) ¿Se puede calcular el centro de masas de un cono con dichos teoremas? Discutirlo **(0.2)**.

c) Aplicar uno de los teoremas a un caso concreto **(0.4)**.

SOLUCION:

a) los teoremas de Pappus-Guldin permiten calcular centros de masas de curvas y superficies planas.

a1) El área de una superficie de revolución (A) es igual a la longitud de la curva generatriz (L) multiplicada por la distancia recorrida por el centro de masas de la curva cuando se engendra la superficie. Nota: la curva no puede cortar al eje de giro.

$$\boxed{A = 2\pi\, y_G\, L}$$

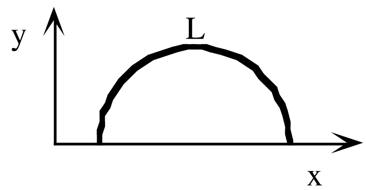
a2) El volumen de un cuerpo de revolución (V) es igual al área generatriz (A) multiplicada por la distancia recorrida por el centro de masas del área cuando se engendra el volumen.
Nota: el área no puede cortar al eje de giro.

$$\boxed{V = 2\pi\, y_G\, A}$$

b) no se puede calcular el centro de masas de un cono, ya que estos teoremas solo permiten calcular centros de masas de líneas y superficies planos, no de volúmenes.

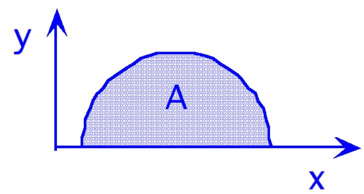
c)
Ejemplo_1: alambre semicircular (al girar genera la supergicie de una esfera).

$$L = 1/2\,(2\pi R) = \pi R \quad y \quad A = 4\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_G} = \frac{A}{2\pi L} = \frac{4\pi R^2}{2\pi\pi R} = \boxed{\frac{2R}{\pi}}$$



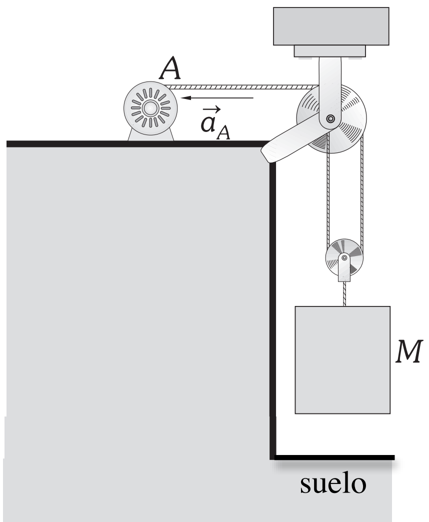
Ejemplo_2: Placa semicircular (al girar genera una esfera).

$$A = 1/2\,(\pi R^2) \quad y \quad V = 4/3\,\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_G} = \frac{V}{2\pi A} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi \frac{1}{2}\pi R^2} = \boxed{\frac{4R}{3\pi}}$$



PROBLEMAS

1) El rendimiento del motor de la figura es del 90% y eleva a un cuerpo de 100 kg mediante el juego de poleas indicado en la figura. Si el cuerpo *M* se encontraba inicialmente en reposo sobre el suelo, si durante todo el ascenso el cable es recogido por el motor con una aceleración a_A = 10 cm/s^2 (aceleración del punto A del cable) y en un determinado instante la velocidad del cable en A es v_A= 1 m/s, determinar en dicho instante **(todas las respuestas tienen que venir razonadas, demostradas o apoyadas en algún tipo de cálculo matemático para ser consideradas válidas)**:



a) la velocidad del bloque *M*,

b) la tensión en la cuerda que tira del bloque *M*,

c) la tensión de la cuerda del motor,

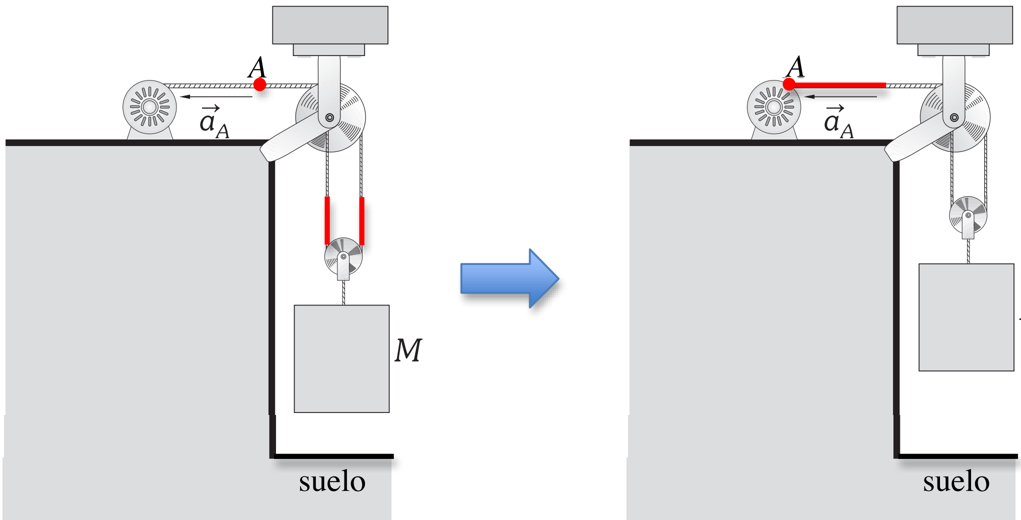
d) la potencia suministrada al motor para su funcionamiento.

e) Calcular también la potencia media que se le suministra al motor durante todo el ascenso del bloque *M* desde el instante inicial en el que partió hasta el instante considerado en los apartados anteriores.

Las masas de las poleas y del cable se consideran despreciables. Tómese g =9.8 m/s^2.

SOLUCION

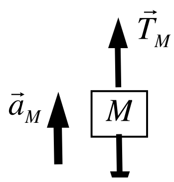
a) El hecho de que el punto *A* está unido a un punto fijo (eje de la polea grande) por una cuerda de longitud determinada impone una relación entre el movimiento de dicho punto y del cuerpo *M*. Cuando el punto *A* se desplaza una cierta distancia hacia la izquierda el cuerpo *M* asciende una distancia mitad (ver figura). Si los desplazamientos de *M* son siempre la mitad de los desplazamientos de *A*, derivando obtenemos que la relación entre velocidades es similar, y volviendo a derivar obtenemos que la relación entre aceleraciones es similar:



$$\boxed{v_M = \frac{1}{2} v_A = 0.5 \text{ m/s} \qquad a_M = \frac{1}{2} a_A = 5 \text{ cm/s}^2}$$

b) Aplicando la segunda ley de Newton para el cuerpo *M*:

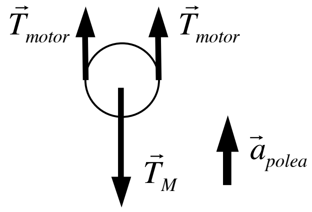
$$T_M - Mg = Ma_M \quad \Rightarrow \quad T_M = M\left(g + a_M\right) = \boxed{985 \text{ N}}$$



c) Dado que las masas de las poleas y las cuerdas son despreciables la tensión es la misma en todos los puntos de una misma cuerda (basta con aplicar la segunda ley de Newton para rotaciones a cada polea, y tener en cuenta que su momento de inercia es nulo, para demostrar que la tensión en la cuerda a ambos lados de la polea es la misma). Aplicando la segunda ley de Newton para la traslación de la polea móvil:

$$2T_{motor} - T_M = m_{polea} a_{polea} = 0$$

$$\Rightarrow \quad T_{motor} = \frac{1}{2} T_M = \boxed{492.5 \text{ N}}$$



d) La potencia aprovechada para levantar el cuerpo *M* en el instante indicado en el enunciado será:

$$P_{\substack{útil\\motor}} = T_{motor} v_A = T_M v_M = 492.5 \text{ W}$$

Dado que el rendimiento es $\eta = 90\%$, la potencia que habrá que suministrar al motor para que realice su tarea será:

$$P_{\substack{suministrada\\al\,motor}} = \frac{P_{\substack{útil\\motor}}}{\eta} = \boxed{547.2 \text{ W}}$$

e) Para calcular la potencia media aprovechada para levantar el cuerpo *M* desde que parte del reposo hasta que alcanza la velocidad v_M y una altura h podemos calcular el trabajo que realiza sobre el sistema bloque+Tierra durante todo el proceso y dividirlo por el tiempo empleado Δt:

$$\left.\begin{array}{l} v_M = a_M \Delta t \\ h = \dfrac{1}{2} a_M (\Delta t)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \Delta t = 10 \text{ s} \ , \quad h = 2.5 \text{ m}$$

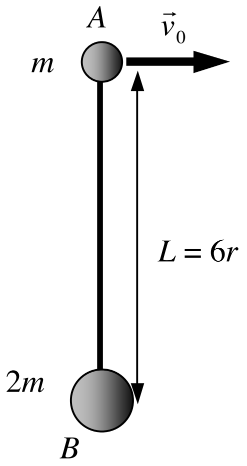
$$W_{motor} = \Delta E_{sistema} = \frac{1}{2} M v_M^2 + Mgh = 2462.5 \text{ J}$$

$$P_{\substack{media\,útil\\motor}} = \frac{W_{motor}}{\Delta t} = 246.25 \text{ W} = \frac{1}{2} P_{\substack{útil\\motor}}$$

$$P_{\substack{media\\suministrada\\al\,motor}} = \frac{P_{\substack{media\,útil\\motor}}}{\eta} = \boxed{273.6 \text{ W}} = \frac{1}{2} P_{\substack{suministrada\\al\,motor}}$$

Las potencias medias resultan ser la mitad de las potencias instantáneas finales ya que las tensiones son constantes a lo largo de todo el proceso y a que en un movimiento uniformemente acelerado en el que se parte del reposo la velocidad media es la mitad de la velocidad final. Aplicando el cálculo del apartado d) a las velocidades medias se obtiene este resultado.

2) Dos esferas pequeñas A y B de masa m y $2m$, y radio r y $2r$ respectivamente, están unidas por medio de una barra rígida de masa despreciable de forma que sus centros están separados una distancia $L = 6r$ (ver figura). Las dos esferas descansan sobre una superficie horizontal sin rozamiento cuando repentinamente se le proporciona a A la velocidad $\vec{v}_0 = v_0\,\hat{i}$ **.** Determínense para todo el sistema, en función de m, r y v_0:



a) la distancia del centro de masas al centro de la esfera pequeña.

b) su momento de inercia respecto de un eje perpendicular a la figura y que pase por el centro de masas,

c) la velocidad de traslación del centro de masas,

d) el momento angular respecto de su centro de masas,

e) la velocidad angular de rotación,

f) las velocidades de A y B después de que la barra AB haya girado 90°,

g) las velocidades de A y B después de que la barra AB haya girado 180°.

Nota: Momento de inercia de una esfera respecto de un eje que pasa por su C.M.: $I = \dfrac{2}{5}MR^2$

SOLUCION

a) Si colocamos el origen de coordenadas en la esfera pequeña A y orientamos el eje X horizontalmente hacia la derecha, el eje Y verticalmente hacia arriba y el eje Z perpendicular al plano de la figura y hacia fuera de ésta tenemos que:

$$\vec{r}_{C.M.} = \frac{m\vec{r}_A + 2m\vec{r}_B}{m+2m} = \frac{m\cdot(0,0,0) + 2m\cdot(0,-6r,0)}{m+2m} = (0,-4r,0)$$

con lo que la distancia de la esfera A al centro de masas del sistema será: $d = \left|\vec{r}_{C.M.}\right| = \boxed{4r}$

b) Teniendo en cuenta la distancia de cada esfera al centro de masas del sistema y aplicando el teorema de Steiner podemos calcular su momento de inercia respecto de un eje que pase por el centro de masas del sistema. Sumando luego los dos momentos de inercia tendremos el momento de inercia que nos piden.

$$I_{C.M.} = I_A + I_B = \left[\frac{2}{5}mr^2 + m(4r)^2\right] + \left[\frac{2}{5}(2m)(2r)^2 + (2m)(2r)^2\right] = \boxed{\frac{138}{5}mr^2}$$

c) Para la velocidad del C.M. del sistema:

$$\vec{v}_{C.M.} = \frac{m\vec{v}_A + 2m\vec{v}_B}{m+2m} = \frac{m\vec{v}_0 + 2m\cdot 0}{m+2m} = \boxed{\frac{1}{3}\vec{v}_0}$$

Otra forma de llegar al mismo resultado:

$$\left.\begin{aligned} \vec{P}_{sist.} &= m\vec{v}_A + 2m\vec{v}_B \\ \vec{P}_{sist.} &= M_{sist.}\vec{v}_{C.M.} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \vec{v}_{C.M.} = \frac{1}{3}\vec{v}_0$$

Al estar el sistema aislado (no hay fuerzas externas a lo largo de la superficie horizontal de la mesa) su momento lineal permanece constante, y por lo tanto también la velocidad de su centro de masas.

d) Si indicamos con primas las magnitudes referidas o medidas respecto al centro de masas del sistema, el momento angular del sistema respecto a su centro de masas será:

$$\vec{L}'_{sist.} = \vec{L}'_A + \vec{L}'_B = \vec{r}'_A \times \vec{p}'_A + \vec{r}'_B \times \vec{p}'_B =$$
$$= \left(\vec{r}_A - \vec{r}_{C.M.}\right) \times m\left(\vec{v}_A - \vec{v}_{C.M.}\right) + \left(\vec{r}_B - \vec{r}_{C.M.}\right) \times 2m\left(\vec{v}_B - \vec{v}_{C.M.}\right) =$$
$$= \left(4r\hat{j}\right) \times m\left(\frac{2}{3}v_0\hat{i}\right) + \left(-2r\hat{j}\right) \times 2m\left(-\frac{1}{3}v_0\hat{i}\right) = \boxed{4mv_0 r\left(-\hat{k}\right)}$$

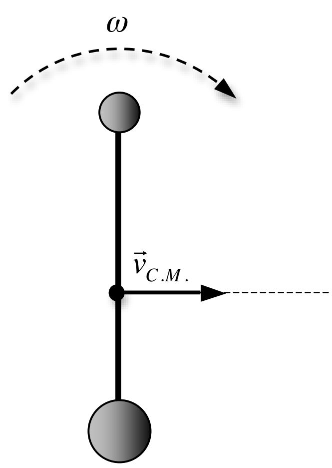
Otra forma de llegar al mismo resultado sería calcular el momento angular respecto del origen de coordenadas y relacionarlo con el momento angular respecto al centro de masas:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{L}_{\substack{sist.\\ resp.\\ origen}} = \vec{r}_A \times \vec{p}_A + \vec{r}_B \times \vec{p}_B = 0 \\ \\ \vec{L}_{\substack{sist.\\ resp.\\ origen}} = \vec{L}'_{sist.} + \vec{r}_{C.M.} \times \vec{P}_{sist.} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \vec{L}'_{sist.} = -\vec{r}_{C.M.} \times \vec{P}_{sist.} = -\left(-4r\hat{j}\right) \times (3m)\left(\frac{1}{3}v_0\hat{i}\right) = 4mv_0 r\left(-\hat{k}\right)$$

Al estar el sistema aislado su momento angular permanece constante, y por lo tanto también la velocidad angular de rotación que calcularemos en el siguiente apartado.

e) La velocidad angular de rotación alrededor del eje que pasa por el centro de masas del sistema vendrá dada por:

$$\vec{L}'_{sist.} = I_{C.M.}\vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} = \frac{\vec{L}'_{sist.}}{I_{C.M.}} = \boxed{\frac{10}{69}\frac{v_0}{r}\left(-\hat{k}\right)}$$



f) El movimiento del sistema es la combinación de una traslación con la velocidad del centro de masas junto con una rotación alrededor de un eje que pasa por su centro de masas y con velocidad angular la obtenida en el apartado anterior:

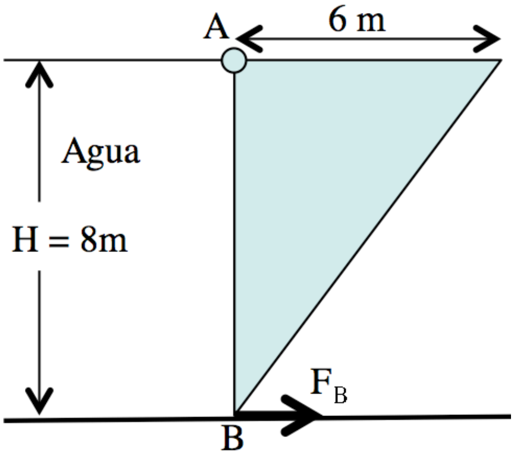
Cuando la barra haya girado 90º tenemos:

$$\vec{v}_{A,90^\circ} = \vec{v}_{C.M.} - (4r)\omega\hat{j} = \frac{1}{3}v_0\hat{i} - (4r)\left(\frac{10}{69}\frac{v_0}{r}\right)\hat{j} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{40}{69}\right)v_0$$
$$\vec{v}_{B,90^\circ} = \vec{v}_{C.M.} + (2r)\omega\hat{j} = \frac{1}{3}v_0\hat{i} + (2r)\left(\frac{10}{69}\frac{v_0}{r}\right)\hat{j} = \left(\frac{1}{3}, \frac{20}{69}\right)v_0$$

g) Cuando la barra haya girado 180º tenemos:

$$\vec{v}_{A,180^\circ} = \vec{v}_{C.M.} - (4r)\omega\hat{i} = \frac{1}{3}v_0\hat{i} - (4r)\left(\frac{10}{69}\frac{v_0}{r}\right)\hat{i} = \left(-\frac{17}{69}, 0\right)v_0$$
$$\vec{v}_{B,180^\circ} = \vec{v}_{C.M.} + (2r)\omega\hat{i} = \frac{1}{3}v_0\hat{i} + (2r)\left(\frac{10}{69}\frac{v_0}{r}\right)\hat{i} = \left(\frac{43}{69}, 0\right)v_0$$

3) El triangulo sombreado de la figura representa la sección transversal de una compuerta cuya longitud perpendicular al diagrama es $L = 4$ m. La compuerta puede girar entorno a un eje situado en el punto A. El material con el que se ha construido la compuerta tiene una densidad $\rho = 4 \text{ g} / \text{cm}^3$. Determinar:



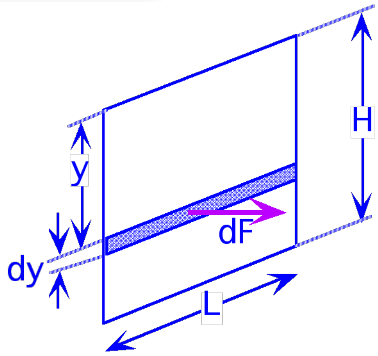
a) La presión absoluta en el fondo del embalse.
b) La fuerza resultante que ejerce el agua sobre la compuerta.
c) El punto de aplicación de dicha fuerza. Demostrar las ecuaciones utilizadas.
d) La masa de la compuerta.
e) La fuerza $\mathbf{F}_B$ tendríamos que aplicar en el punto B para que la compuerta no se abriese.
f) Si no aplicamos ninguna fuerza ($\mathbf{F}_B = 0$) ¿cual seria el valor de la densidad de la compuerta para que esta no se abriese?

Nota: el centro de masas de una placa triangular se encuentra a 1/3 de la base y a 2/3 del vértice opuesto, cualquiera que sea el lado elegido como base.

SOLUCION

a) La presión absoluta será: $P_{fondo} = P_{atm.} + \rho_{agua} g H = \boxed{1.797 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1.774 \text{ atm.}}$

b) La fuerza ejercida por el agua sobre la presa será únicamente debida a la presión ejercida por el agua (ya que la presión atmosférica también actúa por el otro lado de la presa) que a una profundidad y es $P(y) = \rho_{agua}\, g\, y$. Si consideramos una franja de la presa de altura dy y longitud L, toda ella situada a una profundidad y, la fuerza que actúa sobre la misma será:



$$dF = P(y)\, L\, dy = \rho_{agua}\, g\, L\, y\, dy$$

Para calcular la fuerza total sobre la presa debemos integrar dF entre la superficie del agua y el fondo:

$$F = \int_0^H \rho_{agua}\, g\, L\, y\, dy = \frac{1}{2} \rho_{agua}\, g\, L\, H^2 = \boxed{1.2544 \cdot 10^6 \text{ N}}$$

c) El punto de aplicación de la fuerza F sobre la presa será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos). El momento respecto al punto A de un dF actuando sobre una franja de anchura dy a una profundidad y será:

$$dM_A = dF \cdot y = \rho_{agua}\, g\, L\, y^2\, dy$$

donde hemos tomado el valor de dF del apartado anterior. Para calcular el momento total integramos entre la superficie del agua y el fondo:

$$M_A = \int_0^H \rho_{agua}\, g\, L\, y^2\, dy = \frac{1}{3} \rho_{agua}\, g\, L\, H^3$$

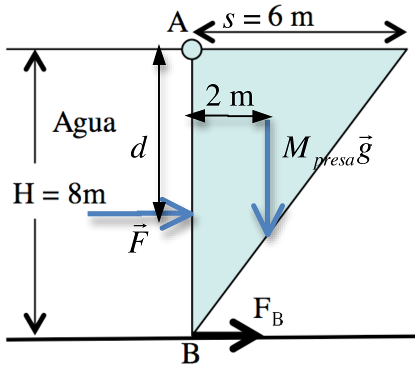
Si el punto de aplicación está a una distancia d respecto al gozne A de la presa, tiene que verificarse que

$$Fd = M_A \quad \Rightarrow \quad d = \frac{M_A}{F} = \frac{(1/3)\rho_{agua} g L H^3}{(1/2)\rho_{agua} g L H^2} = \frac{2}{3} H = \boxed{\frac{16}{3}\ \text{m}}$$

d) La masa de la presa será: $M_{presa} = \rho_{presa} V_{presa} = \rho_{presa} \frac{1}{2} s H L = \boxed{384 \cdot 10^3\ \text{kg}}$

donde $s = 6$ m (ver figura).

e) El diagrama de fuerzas es el que se muestra en la figura (hay una fuerza de reacción en el gozne en A que no se muestra porque no va a aparecer en el cálculo de momentos respecto de dicho punto). Imponiendo que el momento total de fuerzas respecto de A sea nulo:



$$Fd - M_{presa} g \left(\frac{1}{3} s \right) + F_B H = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_B = M_{presa} g \left(\frac{s}{3H} \right) - F \frac{d}{H} = \boxed{1.045 \cdot 10^5\ \text{N}}$$

f) Si no aplicamos dicha fuerza y aumentamos la densidad de la compuerta, igualando a cero el sumatorio de momentos tenemos que:

$$Fd - M'_{presa} g \left(\frac{1}{3} s \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad Fd - \left(\rho'_{presa} \frac{1}{2} s H L \right) g \left(\frac{1}{3} s \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \rho'_{presa} = \left[\frac{6Fd}{s^2 H L g} \right] = \boxed{3556\ \text{kg/m}^3 = 3.556\ \text{g/cm}^3}$$