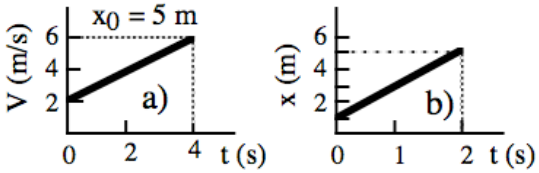
CUESTIONES

1) Dos partículas describen los movimientos unidimensionales representados en las figuras. Determinar en cada caso las características del movimiento representando para cada una de ellas x(t), v(t) y a(t).



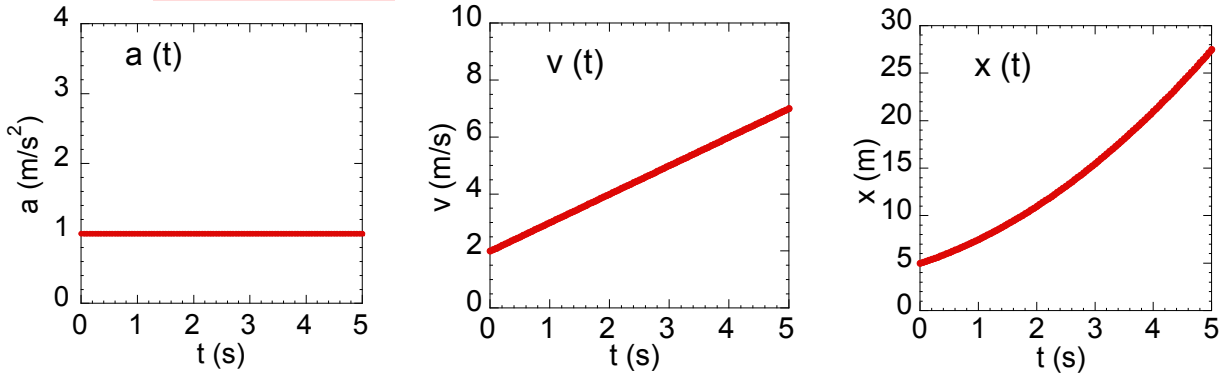
SOLUCION:

a) La velocidad aumenta linealmente, por lo que es un movimiento uniformemente acelerado:

$a = \Delta v/\Delta t = 4/4 = 1\ m/s^2$

$v_0 = 2\ m/s \Rightarrow v = 2 + 1t$

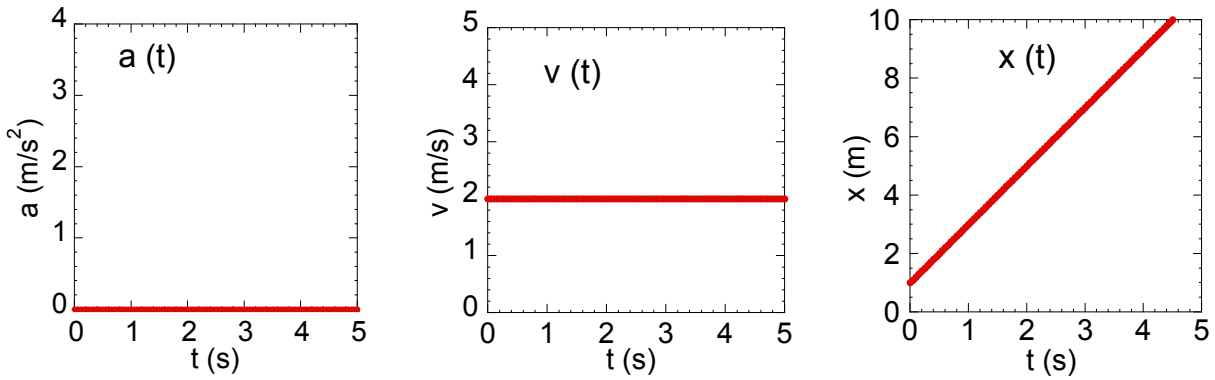
$x_0 = 5\ m \Rightarrow x = 5 + 2t + ½\ t^2$



b) La posición aumenta linealmente, por lo que la velocidad es constante y la a = 0 (es un movimiento uniforme):

$v = \Delta x/\Delta t = 4/2 = 2\ m/s$

$x_0 = 1\ m \Rightarrow x = 1 + 2t$



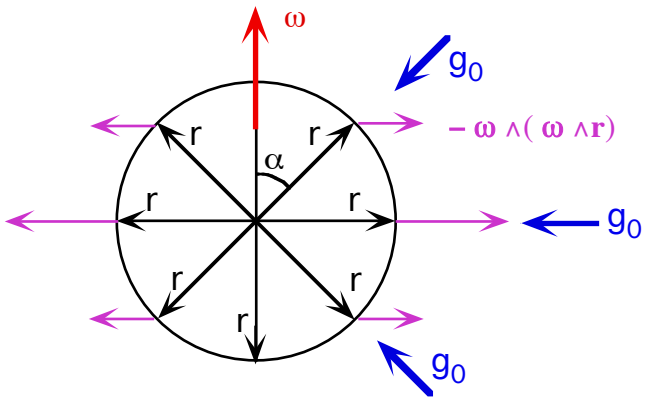
2) Recordando que en la Tierra: $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - 2\,(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}\,') - \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r})$,

a) Representa y explica como es la aceleración centrífuga; en que puntos de la superficie es máxima y mínima.

b) Cuanto valen las componentes radial y transversal? En que punto de la superficie serán máximas y mínimas estas componentes. ¿Qué diferencias hay entre el hemisferio norte y el hemisferio sur?

SOLUCION

a) Al realizar el producto vectorial $-\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r})$, vemos que la aceleración centrífuga se aleja perpendicular al eje de giro de la Tierra, y que su modulo vale:



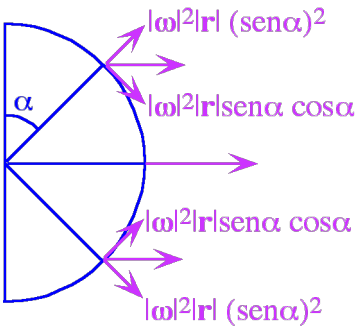
$$|\mathbf{a}_{cen}| = |\boldsymbol{\omega}|\,|\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}|\,\text{sen}\,90 = |\boldsymbol{\omega}|\,|\boldsymbol{\omega}|\,|\mathbf{r}|\,\text{sen}\alpha = |\boldsymbol{\omega}|^2|\mathbf{r}|\,\text{sen}\alpha$$

siendo α el ángulo que forma el vector de posición con el eje de giro (el complementario de la latitud).
Por lo tanto su módulo es máximo en el ecuador y cero en los polos

b) Proyectamos $-\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r})$, sobre la dirección radial y transversal.

La componente radial vale: $|\boldsymbol{\omega}|^2|\mathbf{r}|\,(\text{sen}\alpha)^2$

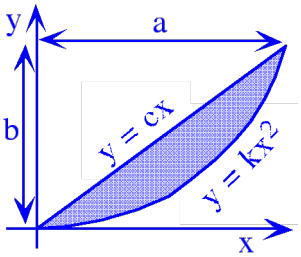
y la componente transversal: $|\boldsymbol{\omega}|^2|\mathbf{r}|\,\text{sen}\alpha\,\cos\alpha$



Por lo que la componente radial es máxima en el ecuador y nula en los polos.
La componente transversal es nula tanto en el ecuador como en los polos, siendo máxima para $\alpha = 45°$

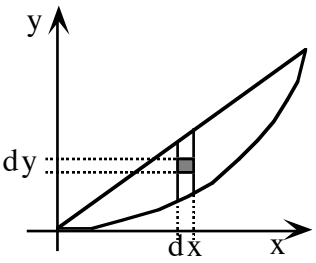
La única diferencia entre el Hemisferio Norte y Sur, es que en el Norte la componente transversal va dirigida hacia el sur, mientras que en el Hemisferio Sur va dirigida hacia el norte.

3) Determinar el centro de gravedad de las placa de la figura en función de a y de b.



SOLUCION

Recordando la definición de centro de masas de una superficie homogénea $x_{CM} = \dfrac{\int x\,da}{\int da}$ y teniendo en cuenta que $da = dx\,dy$, donde este diferencial de área se integra en el área sombreada delimitada por una recta y una parábola de coeficientes $c = b/a$ y $k = b/a$ respectivamente, llegamos a la ecuación de partida:



$$\boxed{x_{CM}} = \frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_0^a x\,dx \int_{kx^2}^{cx} dy}{\int_0^a dx \int_{kx^2}^{cx} dy} = \frac{\int_0^a x\,dx\left[y\right]_{kx^2}^{cx}}{\int_0^a dx\left[y\right]_{kx^2}^{cx}} = \frac{\int_0^a x\,dx\,(cx - kx^2)}{\int_0^a dx(cx - kx^2)} =$$

donde primero hemos integrado dy entre la parábola (kx^2) y la recta (cx) y posteriormente integraremos la variable x entre o y a.

$$= \frac{\int_0^a (cx^2 - kx^3)\,dx}{\int_0^a (cx - kx^2)\,dx} = \frac{\left[c\frac{x^3}{3}\right]_0^a - \left[k\frac{x^4}{4}\right]_0^a}{\left[c\frac{x^2}{2}\right]_0^a - \left[k\frac{x^3}{3}\right]_0^a} = \frac{c\frac{a^3}{3} - k\frac{a^4}{4}}{c\frac{a^2}{2} - k\frac{a^3}{3}} = \frac{\frac{b}{a}\frac{a^3}{3} - \frac{b}{a^2}\frac{a^4}{4}}{\frac{b}{a}\frac{a^2}{2} - \frac{b}{a^2}\frac{a^3}{3}} =$$

$$= \frac{ba^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}{ba\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{12}ba^2}{\frac{1}{6}ba} = \boxed{\frac{1}{2}a}$$

Procediendo de forma análoga para la coordenada y:

$$\boxed{y_{CM}} = \frac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_0^a dx \int_{kx^2}^{cx} y\,dy}{\int_0^a dx \int_{kx^2}^{cx} dy} = \frac{\int_0^a dx\left[\frac{y^2}{2}\right]_{kx^2}^{cx}}{\int_0^a dx\left[y\right]_{kx^2}^{cx}} = \frac{\int_0^a dx\,\frac{(c^2x^2 - k^2x^4)}{2}}{\int_0^a dx(cx - kx^2)} =$$

$$= \frac{\left[\frac{c^2}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^a - \left[\frac{k^2}{2}\frac{x^5}{5}\right]_0^a}{\left[c\frac{x^2}{2}\right]_0^a - \left[k\frac{x^3}{3}\right]_0^a} = \frac{\frac{c^2}{2}\frac{a^3}{3} - \frac{k^2}{2}\frac{a^5}{5}}{c\frac{a^2}{2} - k\frac{a^3}{3}} = \frac{\frac{b^2/a^2}{2}\frac{a^3}{3} - \frac{b^2/a4}{2}\frac{a^5}{5}}{\frac{b}{a}\frac{a^2}{2} - \frac{b}{a^2}\frac{a^3}{3}} =$$

$$= \frac{b^2a\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right)}{ba\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{2}{30}b^2a}{\frac{1}{6}ba} = \frac{6}{15}b = \boxed{0.4\,b}$$

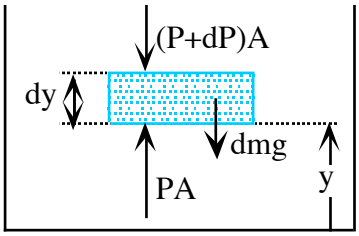
4) Explicar y deducir la Ecuación Fundamental de la Estática de Fluidos a partir de las leyes de Newton.

SOLUCION

Si tenemos un fluido que está en reposo, las fuerzas que se ejercen sobre un elemento cualquiera de dicho fluido, deben de ser cero. Consideramos un elemento imaginario en forma de disco, con sus dos caras paralelas de superficie A perpendiculares a la dirección vertical, y un grosor dy. Sobre este elemento actúa la fuerza de la gravedad, como no se mueve, tiene que haber una fuerza que compense al peso. Esta fuerza solo puede estar originada por las diferencias de presión entre la parte inferior y superior del disco.

El peso del disco es: $dmg = \rho dVg = \rho Adyg$

Si suponemos que a una altura y la presión es P y a una altura y+dy la presión es P+dP, las fuerzas que se ejercen sobre el disco son las mostradas en la figura.



Como $\sum Fy = 0 \Rightarrow PA - (P + dP)A - \rho Adyg = 0 \Rightarrow dP = -\rho g\, dy = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\frac{dp}{dy} = -\rho g}$

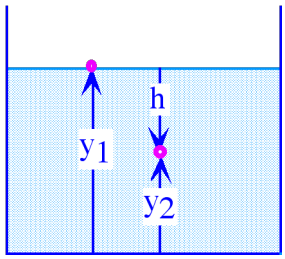
Esta es la ecuación fundamental de la hidrostática en su forma diferencial. El signo – indica que la presión disminuye al aumentar y o lo que es lo mismo, al aumentar la altura. Para calcular variaciones de presión dentro del fluido, tenemos que integrar entre dos puntos. Si consideramos el punto 1 (y_1) en la superficie libre y el punto 2 (y_2) a una profundidad h, la relación entre las presiones será:

$$dP = -\rho g\, dy = 0 \Rightarrow \int_1^2 dP = -\int_1^2 \rho g\, dy \Rightarrow P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \Rightarrow$$

$$P_2 = P_1 - \rho g(y_2 - y_1)$$

Si definimos la profundidad h como $h = -\Delta y = -(y_2 - y_1)$ la ecuación anterior se transforma en

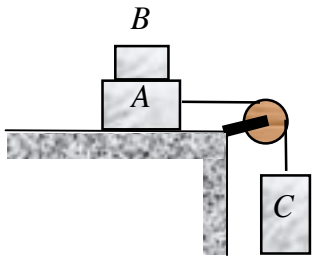
$$\boxed{P_2 = P_1 + \rho gh}$$



PROBLEMAS

---

1) El bloque B de masa m_B descansa sobre el A, de masa m_A, que a su vez está sobre una superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento cinético entre A y la superficie horizontal es μ_c y el coeficiente de rozamiento estático entre A y B es μ_e. Un hilo atado a A pasa por una polea, sin masa ni rozamiento, con el bloque C colgado en el otro extremo. a) ¿Cuál es la aceleración máxima del sistema que hace que A y B se muevan juntos cuando el sistema se libera desde el reposo? b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda en dicho caso? c) ¿Qué valor de masa m_C debe tener C para producir esta aceleración? Expresar los resultados en función de m_A, m_B, μ_c y μ_e.



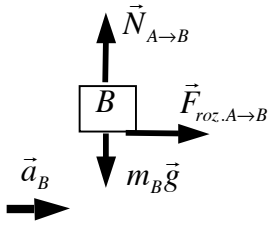
SOLUCION

a) Cada bloque va a realizar un movimiento rectilíneo. Debemos tomar un sentido positivo de movimiento para cada uno de ellos (como cuando uno tomaba un sistema de referencia para los movimientos unidimensionales). Al final el signo del resultado nos informará del sentido de movimiento. Vamos a tomar en nuestro caso el sentido positivo de movimiento hacia la derecha para A y para B y hacia abajo para el bloque C.

Dibujando el diagrama de fuerzas para el cuerpo B:

$$\vec{F}_{roz.A\to B} = m_B\vec{a}_B$$

$$\Rightarrow \quad a_{B,máx} = \frac{F_{roz.A\to B,máx}}{m_B} = \frac{\mu_e N_{A\to B}}{m_B} = \frac{\mu_e m_B g}{m_B} = \boxed{\mu_e g}$$

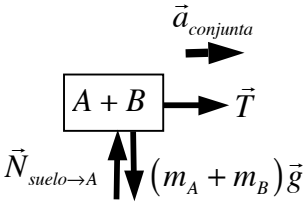


Ésta es la máxima aceleración de B y por lo tanto la máxima aceleración conjunta que pueden tener A y B, y la máxima aceleración descendente para el bloque C.

b) Dibujando el diagrama de fuerzas para el conjunto A y B:

$$\vec{T} = (m_A + m_B)\vec{a}_{conjunta}$$

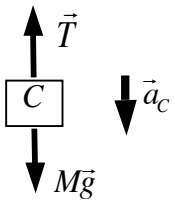
$$\Rightarrow \quad T_{máx} = (m_A + m_B)\underset{máxima}{a_{conjunta}} = \boxed{\mu_e (m_A + m_B) g}$$



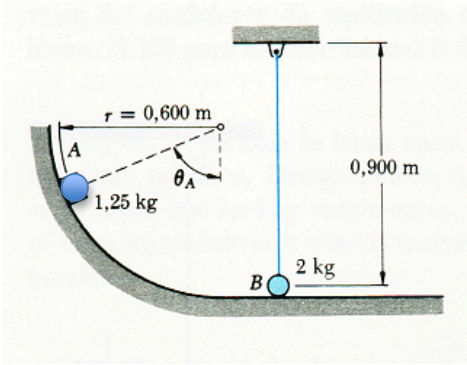
c) Dibujando el diagrama de fuerzas para el cuerpo C:

$$m_C\vec{g} + \vec{T} = m_C\vec{a}_C \quad \Rightarrow \quad m_C g - T = m_C a_C$$

$$\Rightarrow \quad m_C = \frac{T}{g - a_C} \quad \Rightarrow \quad m_{C\,máx} = \frac{T_{máx}}{g - a_{C,máx}} = \boxed{\left(\frac{\mu_e}{1-\mu_e}\right)(m_A + m_B)}$$



2) Se deja en libertad una esfera *A* de radio 4 cm cuando $\theta_A = 90°$ (ver figura) y rueda sin deslizar por la rampa circular (coeficiente de rozamiento $\mu = 0.5$) hasta chocar con la bola *B*. Sabiendo que el coeficiente de restitución en el choque es $e = 0.90$, calcular: a) la velocidad de *A* justo antes del choque, b) las velocidades de *A* y *B* inmediatamente después del choque, c) la máxima tensión que soporta el hilo que sostiene a *B*, d) la altura máxima a la que se eleva *B*, e) la energía perdida en el choque.
Nota: Momento de inercia de una esfera respecto de un eje que pasa por su C.M.: $I = \frac{2}{5}MR^2$



SOLUCION

a) Teniendo en cuenta que en rodadura el rozamiento es estático y no realiza trabajo podemos aplicar la conservación de la energía para el cuerpo *A* desde que se suelta hasta justo antes de chocar con la bola *B* (tomamos el nivel de referencia nulo para la energía potencial gravitatoria en el suelo). Su velocidad de impacto con *B* será:

$$m_A g r = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}I_A\omega_A^2 = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}m_A R_A^2\right)\left(\frac{v_A}{R_A}\right)^2 = \frac{7}{10}m_A v_A^2$$

$$\Rightarrow \quad v_A = \sqrt{\frac{10}{7}gr} = \boxed{2.898 \text{ m/s}}$$

b) Aplicando en el choque la conservación del momento lineal para el eje horizontal *X* y la ecuación del coeficiente de restitución:

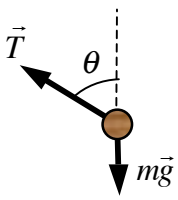
$$\left.\begin{aligned} m_A v_{A,x} &= m_A v'_{A,x} + m_B v'_{B,x} \\ e &= \frac{v'_{B,x} - v'_{A,x}}{v_{A,x}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} v'_{A,x} &= \left(\frac{m_A - e\,m_B}{m_A + m_B}\right)v_{A,x} = \boxed{-0.4905 \text{ m/s}} \\ v'_{B,x} &= (1+e)\left(\frac{m_A}{m_A + m_B}\right)v_{A,x} = \boxed{2.118 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

c) Dibujando el diagrama de fuerzas para *B* para un ángulo θ cualquiera y planteando la segunda ley de Newton para las componentes normales se obtiene el valor de la tensión de la cuerda en función del ángulo y teniendo en cuenta que la velocidad de *B* es máxima justamente abajo:

$$T - m_B g\cos\theta = m_B a_n = m_B\frac{v_B(\theta)^2}{L}$$

$$\Rightarrow \quad T = m_B\left[\frac{v_B(\theta)^2}{L} + g\cos\theta\right]$$

$$\Rightarrow \quad T_{máx.} \overset{(\theta=0)}{=} m_B\left[\frac{v'^2_B}{L} + g\right] = \boxed{29.57 \text{ N}}$$



d) Aplicando la conservación de la energía para *B* entre justo después del choque y la posición final de máxima altura:

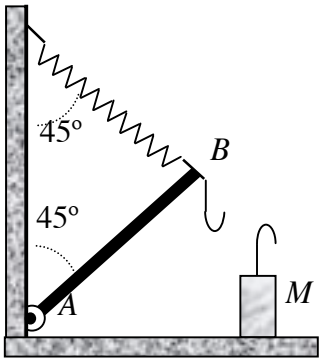
$$\frac{1}{2}m_B v'^2_B = m_B g h_B = \quad \Rightarrow \quad h_B = \frac{v'^2_B}{2g} = \boxed{0.2289 \text{ m}}$$

e) La variación de energía en el choque será:

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2}m_A v'^2_A + \frac{1}{2}m_B v'^2_B\right) - \left(\frac{1}{2}m_A v^2_A\right) = \boxed{-0.6138 \text{ J}}$$

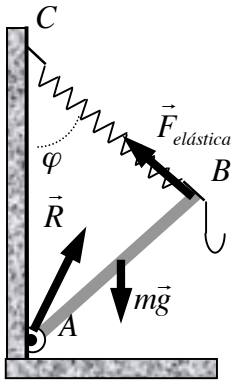
---

3) En el sistema de la figura la barra homogénea AB tiene una longitud de 100 cm y una masa de 6 kg. En el equilibrio los ángulos en A y en C son de 45°. Si la constante elástica del resorte es K = 400 N/m, calcular su longitud natural. Calcular el valor de la masa M que, colgada en el punto B, haga que el nuevo equilibrio se alcance cuando el ángulo en A sea de 60º.



SOLUCION

En la situación de equilibrio indicada en la figura al tener un triángulo rectángulo isósceles la longitud l del muelle será la misma que la longitud L de la barra, $l = L = 100$ cm, y la distancia entre A y el enganche del muelle a la pared será $\overline{AC} = \sqrt{2}\,L = 141.4$ cm. Si imponemos que el momento de fuerzas total respecto de A sea nulo podemos calcular la longitud natural del muelle:

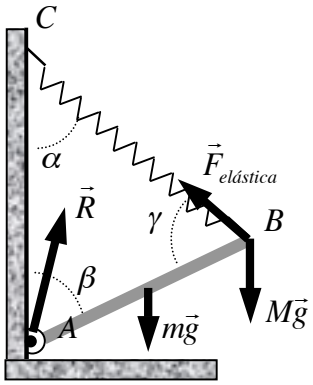


$$F_{elástica}L - mg\left(\frac{L}{2}\right)\text{sen}\,\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad k\,\Delta l = \frac{1}{2}mg\,\text{sen}\,\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \Delta l = \frac{mg}{2k}\text{sen}\,\varphi = 5.20 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad l_0 = l - \Delta l = \boxed{94.80 \text{ cm}}$$

¡Error! Marcador no definido.

Si ahora colgamos del extremo la masa M el nuevo diagrama de fuerzas será el representado en la figura. Con los datos del enunciado vamos a calcular los demás ángulos.



El ángulo α lo podemos poner en función de β, que es conocido, razonando sobre el triángulo:

$$\left.\begin{array}{l} l\,\text{sen}\,\alpha = L\,\text{sen}\,\beta \\ l\cos\alpha = \sqrt{2}\,L - L\cos\beta \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\beta}{\sqrt{2} - \cos\beta} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 43.45^\circ$$

El ángulo γ será: $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 76.55^\circ$

Aplicando el teorema de los senos para los ángulos α y β podemos calcular la nueva longitud del muelle y su alargamiento:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{l}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{L} \quad \Rightarrow \quad l=\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}L=125.93\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \Delta l=l-l_0=31.13\,\text{cm}$$

Replanteamos el equilibrio volviendo a calcular momentos respecto de *A*:

$$F_{elástica}L\operatorname{sen}\gamma-mg\left(\frac{L}{2}\right)\operatorname{sen}\beta-MgL\operatorname{sen}\beta=0$$

$$\Rightarrow \quad M=\frac{F_{elástica}\operatorname{sen}\gamma}{g\operatorname{sen}\beta}-\frac{1}{2}m=\frac{k\Delta l\operatorname{sen}\gamma}{g\operatorname{sen}\beta}-\frac{1}{2}m=\boxed{11.27\ \text{kg}}$$