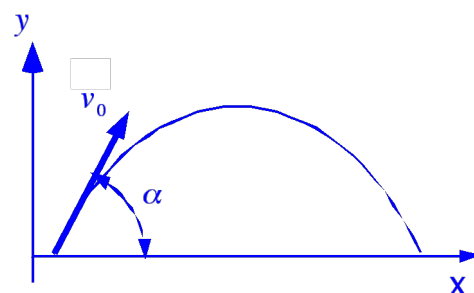


CUESTIONES

- 1) Una partícula describe el movimiento parabólico de la figura. Obtener las expresiones para la máxima altura y el alcance a lo largo del eje X. Demostrar que se obtiene el mismo alcance con el ángulo α y su complementario ($90^\circ - \alpha$).



SOLUCION:

Teniendo en cuenta que para un movimiento uniformemente acelerado

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + (1/2) \mathbf{a} t^2 \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} t \end{cases}$$

y que en este caso

$$\begin{cases} \mathbf{a} = -g \mathbf{j} \\ \mathbf{v}_0 = v_0 \cos \alpha \mathbf{i} + v_0 \sin \alpha \mathbf{j} \\ \mathbf{r} = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{v} = v_0 \cos \alpha \mathbf{i} + [v_0 \sin \alpha - gt] \mathbf{j} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{r} = v_0 \cos \alpha t \mathbf{i} + [v_0 \sin \alpha t - (1/2) gt^2] \mathbf{j} \quad (1.2)$$

a) En la altura máxima $v_y = 0 \Rightarrow [v_0 \sin \alpha - g t(y_{\max})] = 0 \Rightarrow t(y_{\max}) = v_0 \sin \alpha / g$

Y sustituyendo este valor en la componente y de $\mathbf{r}$, ecuación 1.2,

$$y_{\max} = v_0 \sin \alpha t - (1/2) gt^2 = v_0 \sin \alpha v_0 \sin \alpha / g - (1/2) g (v_0 \sin \alpha / g)^2 = (v_0 \sin \alpha)^2 / 2g$$

b) en el alcance máximo $y = 0 \Rightarrow v_0 \sin \alpha t(x_{\max}) - (1/2) gt(x_{\max})^2 = 0 \Rightarrow t(x_{\max}) = 2v_0 \sin \alpha / g$

Y sustituyendo este valor en la componente x de $\mathbf{r}$, ecuación 1.2

$$x_{\max} = v_0 \cos \alpha \cdot 2v_0 \sin \alpha / g \Rightarrow x_{\max} = 2 v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha / g = v_0^2 \sin 2\alpha / g$$

Si el ángulo es $(90 - \alpha)$ utilizamos la ecuación anterior sustituyendo α por $(90 - \alpha)$ el alcance sería:

$$x_{\max}(90 - \alpha) = v_0^2 \sin (180 - 2\alpha) / g = v_0^2 \sin 2\alpha / g = x_{\max}(\alpha)$$

donde hemos aplicado que el $\sin(\theta) = \sin(180 - \theta)$



2) : Explicar los distintos tipos de choque según el valor del coeficiente de restitución ($e = -\frac{v'_B - v'_A}{v_B - v_A}$) resaltando que magnitudes físicas permanecen constantes en cada caso. Si deseas calcular el coeficiente de restitución entre una pelota de tenis y el suelo, y solo dispones de una regla, explica como podrías hacerlo. Encuentra la ecuación que relaciona e con las magnitudes que tu puedes medir.

SOLUCION

El coeficiente de restitución tiene valores comprendidos entre 0 y 1. Cualquiera que sea el valor de e , siempre se conserva el momento lineal, por lo que el valor de e solo afecta a la energía.

Si $e = 0$ el choque es elástico y se conserva la energía mecánica. Las diferencias de velocidades entre los dos cuerpos antes y después del choque son las mismas.

Si $e < 1$ el choque es inelástico, hay pérdida de energía y las velocidades relativas entre las partículas después del choque es menor que antes del choque.

Si $e = 0$, el choque es el mas inelástico posible, es cuando mas energía mecánica se pierde y las partículas quedan "pegadas" después del choque, llevando la misma velocidad.

Suponiendo que tenemos un choque central directo y llamando V_p a la velocidad de la pelota y V_s a la velocidad del suelo:

$$e = -\frac{v'_p - v'_s}{v_p - v_s}$$

Teniendo en cuenta que el suelo tiene masa infinita, y las velocidades antes y después del choque valen 0:

$V_s = V'_s = 0$, por lo tanto:

$$e = -\frac{v'_p}{v_p}$$

Ahora tenemos que relacionar V y V' con longitudes que pueda medir la regla. Si soltamos una pelota desde una altura h con una velocidad inicial 0, la velocidad con la que llega al suelo la podemos calcular con ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado:

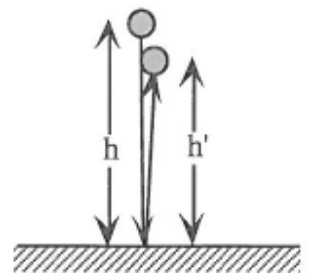
$$v_f^2 - v_i^2 = 2 a e \Rightarrow v_p^2 - 0 = 2 g h \Rightarrow v_p = \sqrt{2 g h}$$

Si la pelota sale inmediatamente después del choque, con una velocidad v'_p , la

altura hasta la que sube (h') estará relacionada con esta velocidad por la ecuación: $v'_p = \sqrt{2 g h'}$ y

tendrá el signo contrario a v_p por lo que:

$$e = -\frac{v'_p}{v_p} = -\frac{-\sqrt{2 g h'}}{\sqrt{2 g h}} = \sqrt{\frac{h'}{h}}$$

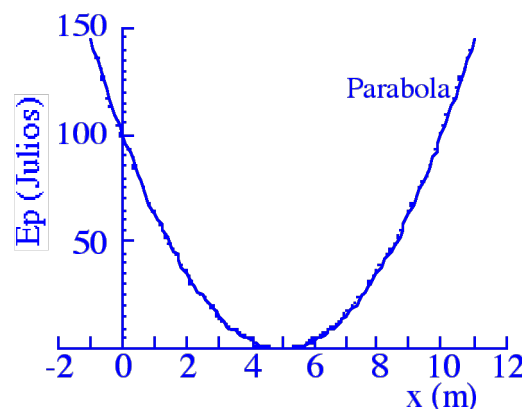


3) : La gráfica representa la energía potencial de una partícula de masa $m = 2 \text{ kg}$ que se mueve a lo largo del eje x .

a) ¿Qué tipo de movimiento realiza la partícula?

b) Si su energía potencial máxima es de 144 Julios, ¿qué velocidad tendrá la partícula en $x = 5 \text{ m}$?

c) Con la misma energía potencial, y sabiendo que para $t = 0$, $x = 5 \text{ m}$, encuentra la ecuación del movimiento $x(t)$.



SOLUCION:

a) Como el potencial es parabólico, el movimiento será un movimiento vibratorio armónico simple (MAS) centrado en una posición $x_0 = 5 \text{ m}$.

b) En $x = 5 \text{ m}$, la energía potencial vale 0, por lo que toda la energía será cinética, es decir, los 144 Julios serán de energía cinética:

$$(1/2)mv^2 = 144 \Rightarrow v = (2 \cdot 144 / 2)^{1/2} = 12 \text{ m/s}$$

c) La ecuación general de un MAS es:

$(x - x_0) = A \cos(\omega t + \varphi)$, por lo que tenemos que encontrar los valores de A , ω y φ .

Al ser un MAS, la fuerza que lo genera es del tipo $F = -k(x - x_0)$, y tiene asociada una energía potencial que sigue la ecuación: $E_p = (1/2)k(x - x_0)^2$. Para determinar la constante k utilizamos los datos de la gráfica: sabemos que en $x = 0$ $E_p = 100$, por lo que $100 = (1/2)k(0 - 5)^2$, de donde despejamos k :

$$k = 200/25 = 8 \text{ J/m}^2 \text{ (N/m)}.$$

Una vez conocida k , podemos determinar la amplitud y la frecuencia angular. Si la E_p máxima es 144 J:

$$E_{p\max} = (1/2)kA^2 \Rightarrow A = (2E_{p\max}/k)^{1/2} = 6 \text{ m}$$

La frecuencia angular es $\omega = (k/m)^{1/2} = (8/2)^{1/2} = 2 \text{ rad/s}$

Finalmente, sabemos que para $t = 0$ $x = 5 \text{ m}$, por lo que aplicando la ecuación general en esas condiciones:

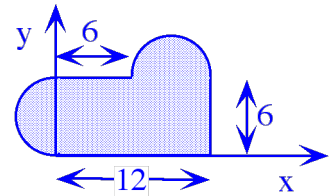
$$(5-5) = 6 \cos(2 \cdot 0 + \varphi) \Rightarrow 0 = 6 \cos(\varphi) \Rightarrow \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2 \text{ o } 3\pi/2$$

por lo que la ecuación del movimiento será:

$$x = 5 + 6 \cos(2t + \pi/2) \text{ o bien } x = 5 + 6 \cos(2t + 3\pi/2)$$



4) Determina el centro de masas de la placa homogénea de la figura.



SOLUCION

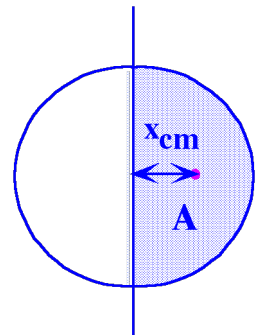
La placa se supone la suma de tres placas, una rectangular y dos semicirculares.
Por simetría, el centro de masas de la placa rectangular esta en el centro.

El centro de masas de la placa semicircular podemos determinarlo por el teorema de Pappus Guldin, que para un cuerpo de revolución dice que:

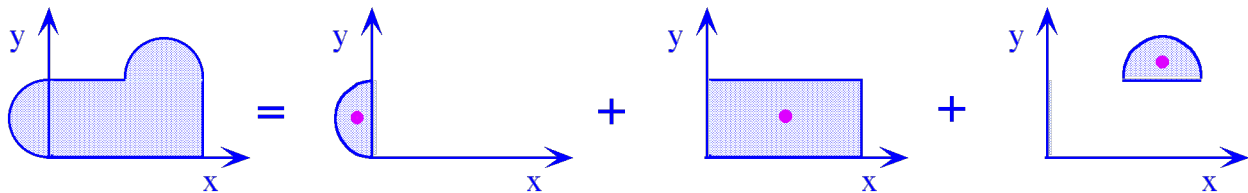
$$V = 2\pi x_{cm} A$$

Con A = área de la placa $\Rightarrow A = (1/2) \pi r^2$
y V = volumen de la esfera que genera $\Rightarrow V = (4/3) \pi r^3$

Introduciendo estos valores en la ecuación: $(4/3) \pi r^3 = 2\pi x_{cm} (1/2) \pi r^2 \Rightarrow$
 $x_{cm} = (4r/3\pi) = (4/\pi)$



Ahora descomponemos la placa en la suma de tres placas, y como son homogéneas, en lugar de utilizar masas, utilizamos áreas:



$$A_1 = (1/2) \pi 3^2 = 4.5 \pi$$

$$x_{cm1} = -4/\pi$$

$$y_{cm1} = 3$$

$$A_2 = 12 \cdot 6 = 72$$

$$x_{cm2} = 6$$

$$y_{cm2} = 3$$

$$A_3 = (1/2) \pi 3^2 = 4.5 \pi$$

$$x_{cm3} = 6 + 3 = 9$$

$$y_{cm3} = 6 + 4/\pi$$

$$x_{cm} = \frac{\sum A_i x_{cmi}}{\sum A_i} = \frac{4.5\pi \left(-\frac{4}{\pi}\right) + 72 \cdot 6 + 4.5\pi \cdot 9}{4.5\pi + 72 + 4.5\pi} = \frac{541.23}{100.27} = 5.40$$

$$y_{cm} = \frac{\sum A_i y_{cmi}}{\sum A_i} = \frac{4.5\pi \cdot 3 + 72 \cdot 3 + 4.5\pi \left(6 + \frac{4}{\pi}\right)}{4.5\pi + 72 + 4.5\pi} = \frac{361.23}{100.27} = 3.60$$

PROBLEMAS

- 1) En el sistema representado en la figura $M_1 = 2 \text{ kg}$, $M_2 = 1 \text{ kg}$, la constante del resorte vale 500 N/m y su longitud natural es $L_0 = 20 \text{ cm}$. Las masas del cable y de la polea son despreciables.

Si la polea esta bloqueada y no puede girar, determinar:

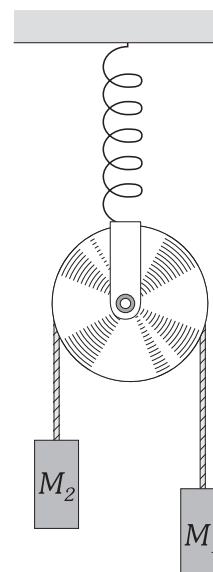
- a) La longitud L del resorte.

Si la polea esta girando y no se desplaza verticalmente determinar:

- b) Los vectores aceleración de los bloques respecto al suelo.
c) El vector aceleración relativa del bloque 1 respecto del 2.
d) La longitud L del resorte.

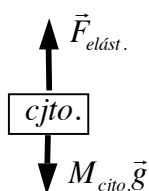
Si durante el movimiento vertical de los bloques la polea se bloquease repentinamente dejando de girar determinar:

- e) El vector aceleración inicial del movimiento vertical de la polea.
f) La amplitud del mov. armónico simple que realizará la polea.



SOLUCION

- a) Si el sistema se encuentra en equilibrio, con la polea sin girar y los cuerpos sin desplazarse, podemos considerar como sistema al conjunto bloques y polea. Dicho sistema se encuentra colgado de un muelle con lo que el diagrama de fuerzas que actúan sobre él será:



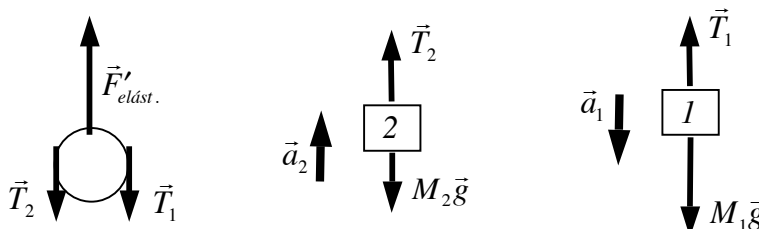
Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\vec{F}_{elást.} + M_{cjto.}\vec{g} = 0 \Rightarrow F_{elást.} = M_{cjto.}g$$

$$\Rightarrow k\Delta l = M_{cjto.}g \Rightarrow \Delta l = \frac{M_{cjto.}g}{k}$$

$$L = L_0 + \Delta l = L_0 + \frac{M_{cjto.}g}{k} = \boxed{25.88 \text{ cm}}$$

- b) Si la polea está en equilibrio de traslación (no se desplaza verticalmente) pero gira al tiempo que los bloques se desplazan, los diagramas de fuerza para cada cuerpo serán:



Teniendo en cuenta que la polea es de masa despreciable su momento de inercia es nulo con lo que aplicando la segunda ley de Newton para rotaciones deducimos que $T_1 = T_2$

$$T_1 R - T_2 R = I_{polea} \alpha = 0 \Rightarrow T_1 = T_2 = T$$

Como la cuerda es inextensible la aceleración con la que el bloque 1 baja es la misma en magnitud a la aceleración con la que el bloque 2 sube: $a_1 = a_2 = a$



Aplicando la segunda ley de Newton para traslaciones en los dos bloques:

$$\left. \begin{array}{l} M_1 g - T = M_1 a \\ T - M_2 g = M_2 a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right) g = \frac{1}{3} g \\ T = \left(\frac{2 M_1 M_2}{M_1 + M_2} \right) g \end{array} \right.$$

Tomando el eje Z positivo verticalmente hacia arriba: $\vec{a}_1 = -\frac{1}{3} g \hat{k} \quad , \quad \vec{a}_2 = \frac{1}{3} g \hat{k}$

c) El vector aceleración relativa del bloque 1 respecto del 2 viene dado por:

$$\vec{a}_{1 \text{ respecto de } 2} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = -\frac{2}{3} g \hat{k}$$

d) Si la polea está en equilibrio de traslación (no se desplaza verticalmente) aplicando la segunda ley de Newton para la traslación:

$$\begin{aligned} \vec{F}'_{elást.} + 2\vec{T} &= 0 \Rightarrow F'_{elást.} = 2T = 2 \left(\frac{2 M_1 M_2}{M_1 + M_2} \right) g \\ \Rightarrow k \Delta L' &= \left(\frac{4 M_1 M_2}{M_1 + M_2} \right) g \Rightarrow \Delta L' = \left(\frac{4 M_1 M_2}{M_1 + M_2} \right) \frac{g}{k} \end{aligned}$$

$$L' = L_0 + \Delta L' = L_0 + \left(\frac{4 M_1 M_2}{M_1 + M_2} \right) \frac{g}{k} = 25.23 \text{ cm}$$

e) Si en un momento determinado un agente externo se encarga bruscamente de bloquear la polea y de detener todo movimiento en el sistema, nos encontramos de repente en la situación del apartado a) pero con el sistema fuera de equilibrio (ya que el muelle está alargado 25.23 cm en vez de los 25.88 cm). Aplicando la segunda ley de Newton para la traslación de la polea:

$$\begin{aligned} \vec{F}'_{elást.} + M_{cjo.} \vec{g} &= M_{cjo.} \vec{a}_{cjo.} \Rightarrow \left(\frac{4 M_1 M_2}{M_1 + M_2} \right) g \hat{k} - M_{cjo.} g \hat{k} = M_{cjo.} \vec{a}_{cjo.} \\ \Rightarrow \vec{a}_{cjo.} &= \left[\frac{4 M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} - 1 \right] g \hat{k} = -\frac{1}{9} g \hat{k} \end{aligned}$$

f) La polea (junto con los bloques) va a iniciar, partiendo del reposo, un movimiento oscilatorio alrededor de la posición de equilibrio $L = 25.88 \text{ cm}$ (ver apartado a)) como parte de $L' = 25.23 \text{ cm}$ la amplitud del M.A.S. será:

$$A = L - L' = 6.5 \text{ mm}$$

Otra forma de calcularla sería utilizando la relación que se da en el M.A.S. entre la aceleración máxima (apartado anterior) y la amplitud:

$$a_{cjo.} = \omega^2 A = \left(\frac{k}{M_{cjo.}} \right) A \Rightarrow A = \frac{M_{cjo.} a_{cjo.}}{k} = \frac{1}{9} (M_1 + M_2) \frac{g}{k}$$



2) a) Calcular el momento de inercia de una barra homogénea respecto a un eje perpendicular a ella y que pasa por su extremo.

b) ¿Cuál es la mínima velocidad angular que hay que comunicar a la barra de la figura para que ésta realice una vuelta completa alrededor de dicho eje partiendo de su posición inferior?

En el caso de que se le comunique a la barra dicha velocidad angular mínima:

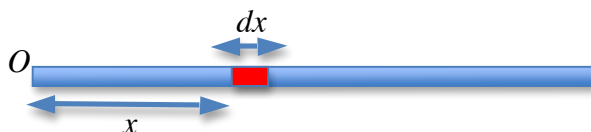
c) ¿qué fuerza de reacción aparece en el enganche O en la posición inicial mostrada en la figura?

d) Calcular de nuevo dicha fuerza de reacción cuando la barra haya realizado un cuarto de vuelta y se encuentre pasando por la posición horizontal.



SOLUCION

- a) Si colocamos la barra a lo largo del eje X con el origen en un extremo y dividimos la barra en elementos de longitud dx :



El momento de inercia respecto de un eje perpendicular a la barra y que pase por O será:

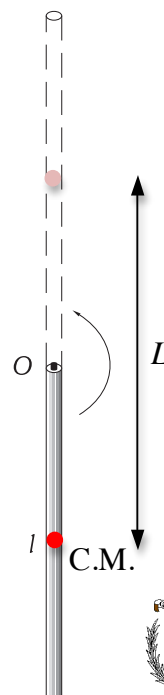
$$I_O = \int x^2 dm = \int_0^L x^2 \lambda dx = \frac{1}{3} \lambda L^3 = \frac{1}{3} (\lambda L) L^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

donde λ es la densidad lineal de masa en la barra.

- b) Cuando la barra pase por la parte superior en su recorrido circular lo puede hacer con cualquier velocidad, incluso con velocidad casi nula, ya que la barra no es una cuerda que pueda destensarse si la velocidad es baja (en el caso de la cuerda se requiere una velocidad mínima). Aplicando conservación de la energía entre la situación inferior y la superior:

$$\begin{aligned} \Delta E_{sist.} = 0 &\Rightarrow \Delta E_{pot. grav.} + \Delta E_{cinet.} = 0 \\ \Rightarrow Mg\Delta h_{C.M.} + \left(\frac{1}{2} I_O \omega_{arriba}^2 - \frac{1}{2} I_O \omega_{abajo}^2 \right) &= 0 \\ \Rightarrow MgL + \frac{1}{2} I_O (\omega_{arriba}^2 - \omega_{abajo}^2) &= 0 \\ \Rightarrow \omega_{abajo}^2 = \frac{2MgL}{I_O} + \omega_{arriba}^2 \end{aligned}$$

La velocidad mínima será cuando pase por la parte superior con una velocidad prácticamente nula:



$$\Rightarrow \omega_{\text{abajo mínima}} = \sqrt{\frac{2MgL}{I_O}} = \boxed{\sqrt{\frac{6g}{L}}}$$

Nota: Si se quiere dividir la energía cinética de la barra en parte de traslación y parte de rotación habría que tener en cuenta el momento de inercia respecto al C.M.:

$$\begin{aligned} E_{\text{cinet.}} &= E_{\text{cinet. traslac.}} + E_{\text{cinet. rotac.}} = \frac{1}{2}MV_{\text{C.M.}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{C.M.}}\omega^2 = \\ &= \frac{1}{2}M\left(\omega\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}I_{\text{C.M.}}\omega^2 = \frac{1}{2}\left[I_{\text{C.M.}} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]\omega^2 = \\ &= \frac{1}{2}I_O\omega^2 \quad (\text{aplicando el teorema de Steiner}) \end{aligned}$$

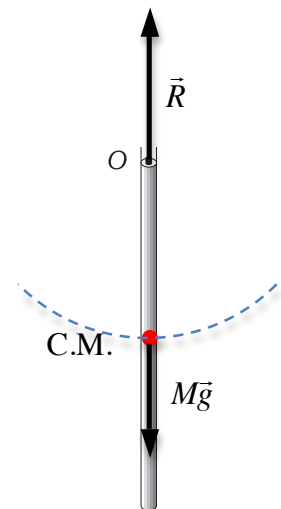
Pero como se puede ver el resultado es el mismo que utilizar sólo energía cinética de rotación alrededor del eje que pasa por O .

- c) Si calculamos momentos de fuerza respecto de O la reacción en dicho punto no contribuye y el peso tampoco si la barra se encuentra en la posición vertical inferior. En este caso:

$$\left. \begin{aligned} \sum_i \vec{M}_{i,O} &= 0 \\ \sum_i \vec{M}_{i,O} &= I_O \vec{\alpha} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{\alpha} = 0 \Rightarrow a_{\text{tangencial}} = 0$$

El C.M. de la barra sólo tendrá aceleración normal, con lo que la reacción en O será vertical y aplicando la segunda ley de Newton:

$$\begin{aligned} \vec{R} + M\vec{g} &= M\vec{a} \Rightarrow R - Mg = Ma_{\text{normal}} = M\omega_{\text{abajo mínima}}^2 \left(\frac{L}{2}\right) = 3Mg \\ \Rightarrow R &= \boxed{4Mg} \end{aligned}$$



- d) Cuando la barra haya realizado un cuarto de vuelta y se encuentre pasando por la posición horizontal aplicando de nuevo la conservación de la energía entre la situación inferior y la horizontal podemos calcular la velocidad de la barra al pasar por dicha posición:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{sist.}} &= 0 \Rightarrow \Delta E_{\text{pot. grav.}} + \Delta E_{\text{cinet.}} = 0 \\ \Rightarrow Mg\Delta h_{\text{C.M.}} + \left(\frac{1}{2}I_O\omega_{\text{horizontal}}^2 - \frac{1}{2}I_O\omega_{\text{abajo mínima}}^2 \right) &= 0 \\ \Rightarrow Mg\left(\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{2}I_O\left(\omega_{\text{horizontal}}^2 - \omega_{\text{abajo mínima}}^2 \right) &= 0 \\ \Rightarrow \omega_{\text{horizontal}} &= \sqrt{\omega_{\text{abajo mínima}}^2 - \frac{MgL}{I_O}} = \sqrt{\frac{3g}{L}} \end{aligned}$$

Si calculamos momentos de fuerza respecto de O la reacción en dicho punto no contribuye y el único momento de fuerzas es el ejercido por el peso. En este caso (cogiendo el sentido positivo de rotación antihorario, es decir el eje Z positivo hacia fuera de la figura):

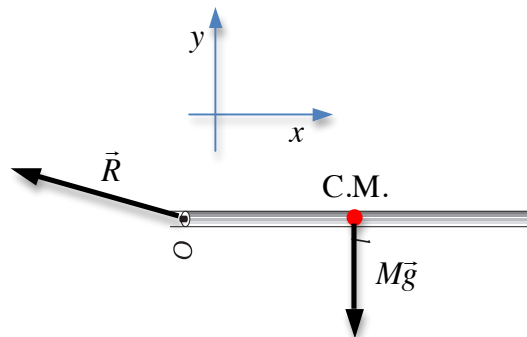


$$\left. \begin{aligned} \sum_i \vec{M}_{i,O} &= -Mg \left(\frac{L}{2} \right) \hat{k} \\ \sum_i \vec{M}_{i,O} &= I_O \vec{\alpha} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = -\frac{3g}{2L} \Rightarrow a_{tangencial} = \alpha \left(\frac{L}{2} \right) = -\frac{3}{4}g$$

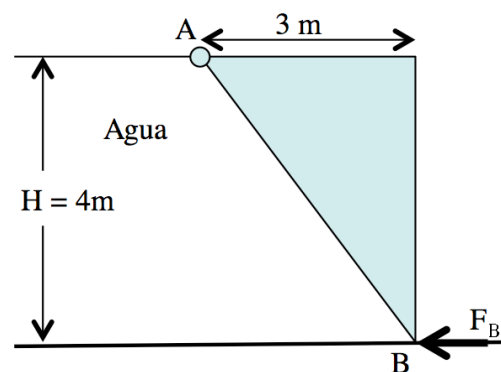
Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\vec{R} + M\vec{g} = M\vec{a}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} R_x &= -Ma_{normal} = -M\omega_{horizontal}^2 \left(\frac{L}{2} \right) = \boxed{-\frac{3}{2}Mg} \\ R_y - Mg &= Ma_{tangencial} = -\frac{3}{4}Mg \Rightarrow R_y = \boxed{\frac{1}{4}Mg} \end{aligned} \right.$$



3) El triángulo sombreado de la figura representa la sección transversal de una compuerta cuya longitud perpendicular al diagrama es $L = 6$ m. La compuerta puede girar entorno a un eje situado en el punto A. El material con el que se ha construido la compuerta tiene una densidad $\rho = 2.5 \text{ g / cm}^3$. Determinar:



- La presión absoluta en el fondo del embalse.
- La fuerza resultante que ejerce el agua sobre la compuerta.
- El punto de aplicación de dicha fuerza. Demostrar las ecuaciones utilizadas.
- La masa de la compuerta.
- La fuerza F_B tendríamos que aplicar en el punto B para que la compuerta no se abriese.

f) Si no aplicamos ninguna fuerza ($F_B = 0$) ¿cual seria el mínimo valor de la densidad de la compuerta para que esta no se abriese?

Nota: el centro de masas de una placa triangular se encuentra a $1/3$ de la base y a $2/3$ del vértice opuesto, cualquiera que sea el lado elegido como base.

SOLUCION

- a) La presión absoluta será: $P_{\text{fondo}} = P_{\text{atm.}} + \rho_{\text{agua}} g H = 1.405 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1.387 \text{ atm.}$

- b) Consideramos una franja de la compuerta de grosor dy y longitud $b = 6$ m situada a una distancia y de A y por lo tanto a una profundidad $y \cos \theta$ ($\cos \theta = 4/5$), la fuerza que actúa sobre la misma será la presión ejercida por el agua ($P = \rho_{\text{agua}} g y \cos \theta$) multiplicada por la superficie:

$$dF = P ds = P b dy = \rho_{\text{agua}} g y \cos \theta b dy$$

Para calcular la fuerza total que el agua ejerce sobre la presa debemos integrar dF entre la superficie del agua y el extremo inferior de la compuerta ($r = 5$ m)

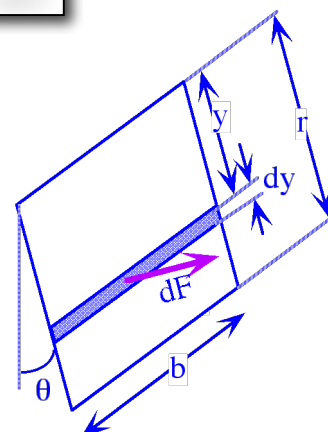
$$\begin{aligned} F &= \int_0^r dF = \int_0^r \rho_{\text{agua}} g y \cos \theta b dy = \rho_{\text{agua}} g b \cos \theta \int_0^r y dy = \\ &= \rho_{\text{agua}} g b \cos \theta \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^r = \frac{1}{2} \rho_{\text{agua}} g b \cos \theta r^2 = 588 \text{ kN} \end{aligned}$$

- c) El punto de aplicación de la fuerza F sobre la presa será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos). El momento respecto al punto A de un dF actuando sobre una franja de anchura dy a una distancia y será:

$$dM = dF y = \rho_{\text{agua}} g y \cos \theta b dy y$$

donde hemos tomado el valor de dF calculado en el apartado anterior. Para calcular el momento total integramos entre el borde superior e inferior de la presa:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^r dM = \int_0^r \rho_{\text{agua}} g y \cos \theta b dy y = \rho_{\text{agua}} g b \cos \theta \int_0^r y^2 dy = \\ &= \rho_{\text{agua}} g b \cos \theta \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^r = \frac{1}{3} \rho_{\text{agua}} g b \cos \theta r^3 \end{aligned}$$

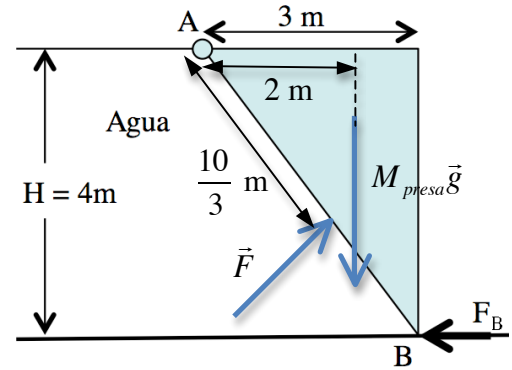


Si el punto de aplicación está a una distancia d respecto al gozne A de la presa, tiene que verificarse que

$$Fd = M \Rightarrow d = \frac{M}{F} = \frac{(1/3) \rho_{\text{agua}} g b \cos \theta r^3}{(1/2) \rho_{\text{agua}} g b \cos \theta r^2} = \frac{2}{3} r = \boxed{\frac{10}{3} \text{ m}}$$

- d) La masa de la presa será: $M_{\text{presa}} = \rho_{\text{presa}} V_{\text{presa}} = \rho_{\text{presa}} \frac{1}{2} s H b = \boxed{90 \cdot 10^3 \text{ Kg}}$
donde $s = 3\text{m}$ (ver figura).

- e) Si la presa está a punto de volcar, está perdiendo el contacto con el fondo y por lo tanto no habrá fuerza normal ejercida por éste. En ese instante a punto de volcar el momento neto de las fuerzas es nulo. El diagrama de fuerzas es el que se muestra en la figura (hay una fuerza de reacción en el gozne en A que no se muestra porque no va a aparecer en el cálculo de momentos respecto de dicho punto).



Igualando a cero el sumatorio de momentos respecto de A:

$$Fd - M_{\text{presa}} g \left(\frac{2}{3} s \right) - F_B H = 0 \Rightarrow F_B = F \frac{d}{H} - M_{\text{presa}} g \left(\frac{2s}{3H} \right) = \boxed{49 \text{ kN}}$$

- f) Si no aplicamos dicha fuerza y aumentamos la densidad de la compuerta, igualando a cero el sumatorio de momentos tenemos que:

$$Fd - M'_{\text{presa}} g \left(\frac{2}{3} s \right) = 0 \Rightarrow Fd - \left(\rho'_{\text{presa}} \frac{1}{2} s H b \right) g \left(\frac{2}{3} s \right) = 0$$

$$\Rightarrow \rho'_{\text{presa}} = \left[\frac{3Fd}{s^2 H b g} \right] = \boxed{2778 \text{ kg/m}^3 = 2.778 \text{ g/cm}^3}$$

