CUESTIONES

1) Sabiendo que el vector $\vec{a}$ tiene de modulo 6 y dos de sus cosenos directores son $\cos\alpha = 1/2$ y $\cos\beta = 1/3$. Calcular:
   a) Las componentes del vector $\vec{a}$. **(0.4)**
   b) Las componentes de un vector $\vec{b}$ tal que $\vec{a} \wedge \vec{b} = \hat{i} - (3/2)\hat{j}$ y $\vec{a} \bullet \vec{b} = \sqrt{23}/2$. **(0.6)**

SOLUCION:

a) $a_x = |\vec{a}| \cos\alpha = 6 \bullet ½ = 3$

$a_y = |\vec{a}| \cos\beta = 6 \bullet 1/3 = 2$

$a_z = \sqrt{6^2 - 3^2 - 2^2} = \sqrt{23}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{a} = 3\,\hat{i} + 2\,\hat{j} + \sqrt{23}\,\hat{k}}$

b) El producto vectorial de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es: $\vec{a} \wedge \vec{b} = \hat{i} - (3/2)\,\hat{j}$

Además si calculamos el producto vectorial:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & \sqrt{23} \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (2\,b_z - \sqrt{23}\;b_y)\,\hat{i} + (\sqrt{23}\;b_x - 3\,b_z)\,\hat{j} + (3\,b_y - 2\,b_x)\hat{k}$$

igualando las componentes $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ de ambos productos escalares se obtienen tres ecuaciones:

$$2\,b_z - \sqrt{23}\;b_y = 1 \qquad (1)$$

$$\sqrt{23}\;b_x - 3\,b_z = 3/2 \qquad (2)$$

$$3\,b_y - 2\,b_x = 0 \qquad (3)$$

Si resolvemos este sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas llegamos a una indeterminación, es decir hay infinitos vectores $\vec{b}$ que cumplen la condición del producto vectorial. Por este motivo necesitamos una cuarta ecuación, que es la del producto escalar:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \sqrt{23}/2 = (3\,\hat{i} + 2\,\hat{j} + \sqrt{23}\,\hat{k}) \bullet (b_x\,\hat{i} + b_y\,\hat{j} + b_z\,\hat{k}) \Rightarrow$$

$$3\,b_x + 2\,b_y + \sqrt{23}\;b_z = \sqrt{23}/2 \qquad (4)$$

De la ecuación (3) obtenemos que $b_x = 3/2\,b_y$, sustituyendo este valor en la ecuación (4) nos queda

$$3 \bullet 3/2\,b_y + 2\,b_y + \sqrt{23}\;b_z = \sqrt{23}/2 \Rightarrow 13/2\,b_y + \sqrt{23}\;b_z = \sqrt{23}/2$$

Si despejamos b_y: $b_y = \sqrt{23}/13 - (2\sqrt{23}/13)\,b_z$

e introducimos este valor en la ecuación (1): $2\,b_z - \sqrt{23}\;[\sqrt{23}/13 - (2\sqrt{23}/13)\,b_z] = 1 \Rightarrow$

$2\,b_z - 23/13 + 46/13\,b_z = 1 \Rightarrow 26/13\,b_z + 46/13\,b_z = 1 + 23/13 \Rightarrow 72/13\,b_z = 36/13 \Rightarrow \boxed{b_z = 1/2}$

Sustituyendo este valor de b_z en la ecuación (1): $2\,½ - \sqrt{23}\,b_y = 1 \Rightarrow \sqrt{23}\,b_y = 0 \Rightarrow \boxed{b_y = 0}$

Introduciendo este valor de b_y en la ecuación (3) se obtiene directamente que $\boxed{b_x = 0}$

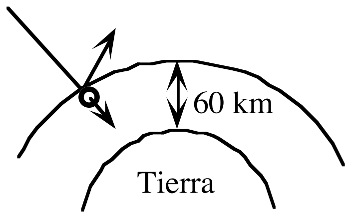
---

2) El muón es una partícula inestable cuya masa es unas 207 veces la masa del electrón. Estas partículas se desintegran con una vida media τ; esto significa que si tenemos un numero de muones N en reposo en el laboratorio, cuando ha pasado un tiempo τ solo nos quedan la mitad de los muones (N/2). Siguiendo el mismo razonamiento, cuando ha pasado un tiempo $n\tau$ nos quedaran $(N/2^n)$. Sabemos que los muones en reposo en el laboratorio tienen una vida media de $1.5\ 10^{-6}$ s, que se producen en la atmósfera a una altura de 60 Km y que tienen una velocidad cercana a la de la luz (v = 0.999 c) ¿Que fracción de los muones llegan a la superficie terrestre? Explica por que. (1)

SOLUCION

La velocidad de los muones es $v = 0.999\ c = 0.999{*}3\ 10^8$ m/s $= 2.9949\ 10^8$ m/s

El tiempo que tardan en alcanzar la superficie terrestre es igual al espacio dividido por la velocidad:



$$\boxed{t = 60{\bullet}10^3 / 2.9949\ 10^8 = 2\ 10^{-4}\ \text{s}}$$

Si dividimos este tiempo por la vida media ($\tau = 1.5\ 10^{-6}$ s) encontramos cuantas vidas medias pasan hasta llegar a la Tierra

$$t / \tau = 2\ 10^{-4} / 1.5\ 10^{-6} = 133 \Rightarrow \boxed{t = 133\tau}$$

si se producen N muones, solo llegarían a la superficie $N/2^{133} = 10^{-40} N$

Sin embargo se observa que llegan muchos mas. La explicación radica en que los muones viajan a velocidades cercanas a la de la luz, y por lo tanto para ellos el tiempo que tardan en alcanzar la Tierra (tiempo propio t´) es diferente al observado por nosotros (t).

La relación es $t = \gamma t'$ con $\boxed{\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)}} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{(0.999c)^2}{c^2}\right)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 0.999^2}} = 22.2}$

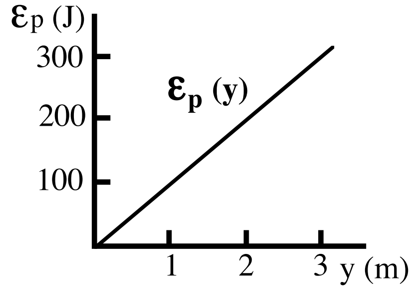
El tiempo propio es $\boxed{t' = t / \gamma = 2\ 10^{-4} / 22.2 = 9.09\ 10^{-6}\ \text{s}}$

Si calculamos de nuevo a cuanta vidas medias corresponde este tiempo:

$$t' / \tau = 9.09\ 10^{-6} / 1.5\ 10^{-6} = 6 \Rightarrow \boxed{t' = 6\tau}$$

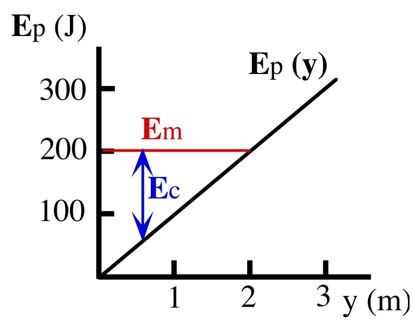
Si se producen N muones, solo llegarían a la superficie $N/2^6 = \boxed{(1/64)\ N}$

3) La gráfica muestra la energía potencial gravitatoria para un objeto de masa m cercano a la superficie de un planeta; y = 0 corresponde al nivel del suelo. Suponer que la energía mecánica del sistema es de 0.2 kJ, **a partir de la gráfica** determinar



a) La altura máxima que alcanza el objeto. (0.2)
b) La energía cinética del objeto cuando la energía cinética es igual a la potencial. (0.2)
c) La posición del objeto cuando la Ɛc = Ɛp. (0.2)
d) La fuerza sobre el objeto en cualquier posición. (0.2)
e) La aceleración de la gravedad del planeta si la masa del objeto es m = 10.2 kg. (0.2).

SOLUCION



La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial (Em = Ec + Ep) y es la máxima energía que puede tener el objeto. La energía mecánica es 0.2 kJ = 200J.

a) En la posición de máxima altura, el objeto estará en reposo y la energía cinética será cero; por lo que toda la energía mecánica es energía potencial. Esa situación se corresponde a una posición $\boxed{y = 2\text{m}}$

b) Como Ec + Ep = Em = 200 J, si la energía cinética es igual a la energía potencial ⇒

$$\boxed{\text{Ec} = \text{Ep} = 100\ \text{J}}$$

c) En la gráfica se observa que esta situación se alcanza en $\boxed{y = 1\text{m}}$

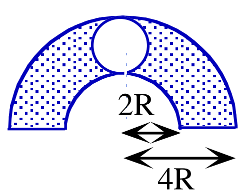
d) La fuerza es $\mathbf{F} = -\nabla \text{Ep} = \left(\frac{\partial \text{E}_\text{P}}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial \text{E}_\text{P}}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial \text{E}_\text{P}}{\partial z}\,\mathbf{k}\right)$

En este caso como la Ep no depende ni de x ni de z, Fx = Fz = 0, y únicamente tiene componente y. La fuerza es la pendiente de la curva Ep(y), y como es una recta, la pendiente es la misma y la fuerza no depende de la posición:

$$\boxed{\text{Fy} = -\text{dEp/dy} = -\ (200 - 0)\ /\ (2 - 0) = -\ 100\ \text{N}}$$

e) Aplicando la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{F}/m = -100\,\mathbf{j}/10.2 \Rightarrow \boxed{\mathbf{a} = -9.8\,\mathbf{j}\ \text{m/s}^2}$

4) Calcular la posición del centro de masas de la placa homogénea de la figura. (1)



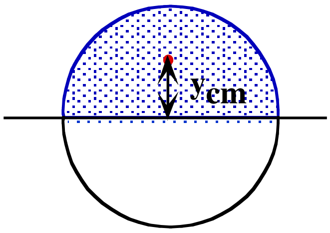
SOLUCION

La placa se puede suponer como una placa semicircular de radio 4R a la que le hemos restado una placa semicircular concéntrica de radio 2R y una placa circular de radio R.

Por simetría, el centro de masas de la placa circular esta en el centro.

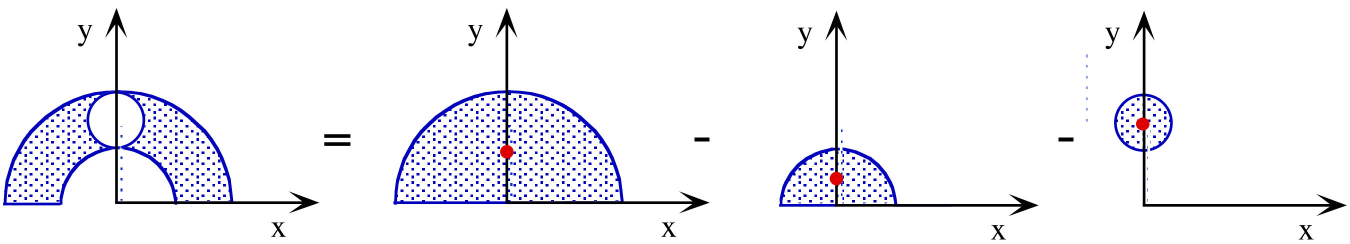
El centro de masas de una placa semicircular de radio R podemos determinarlo por el teorema de Pappus Guldin, que para un cuerpo de revolución dice que el volumen de un cuerpo de revolución (V) es igual al área generatriz (A) multiplicada por la distancia recorrida por el centro de masas del área cuando se engendra el volumen: $V = 2\pi\, y_{CM}\, A$

Aplicándolo a una placa semicircular de radio R:,



$$A = 1/2\,(\pi R^2) \quad y \quad V = 4/3\,\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_G} = \frac{V}{2\pi A} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi \frac{1}{2}\pi R^2} = \boxed{\frac{4R}{3\pi}}$$

Ahora descomponemos la placa en la suma de tres placas, y como son homogéneas, en lugar de utilizar masas, utilizamos áreas:



$A_1 = (1/2)\,\pi(4R)^2 = 8\,\pi R^2$ $\quad$ $A_2 = (1/2)\,\pi(2R)^2 = 2\,\pi R^2$ $\quad$ $A_3 = \pi R^2$

$x_{cm1} = 0$ $\quad$ $x_{cm2} = 0$ $\quad$ $x_{cm3} = 0$

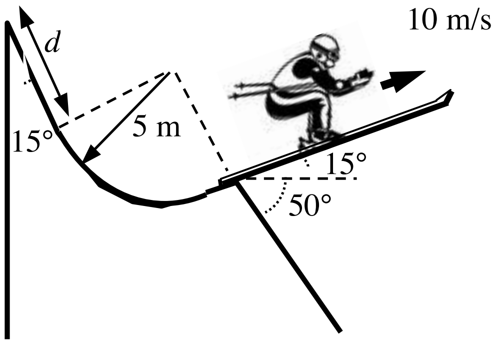
$y_{cm1} = 4\,(4R)/3\pi = 16R/3\pi$ $\quad$ $y_{cm2} = 4\,(2R)/3\pi = 8R/3\pi$ $\quad$ $y_{cm3} = 3R$

$$\boxed{x_{cm}} = \frac{\sum A_i\, x_{cmi}}{\sum A_i} = \frac{8\pi R^2 \bullet 0 \;-\; 2\pi R^2 \bullet 0 \;-\; \pi R^2 \bullet 0}{8\pi R^2 - 2\pi R^2 - \pi R^2} = \frac{0}{5\pi R^2}\boxed{= 0}$$

$$\boxed{y_{cm}} = \frac{\sum A_i\, y_{cmi}}{\sum A_i} = \frac{8\pi R^2 \bullet 16R/3\pi \;-\; 2\pi R^2 \bullet 8R/3\pi \;-\; \pi R^2 \bullet 3R}{8\pi R^2 - 2\pi R^2 - \pi R^2} = \boxed{1.777\ R}$$

PROBLEMAS

1. Un esquiador de 80 kg de masa deja una rampa de salto con una velocidad de 10 m/s formando 15° con la horizontal (ver figura). La inclinación del costado de la montaña es de 50° y la resistencia del aire es despreciable. Halle:



a) La distancia a la que cae el esquiador a lo largo del costado de la montaña. **(0.5)**

b) Las componentes de la velocidad justamente en el instante en el que cae. **(0.5)**

Si la rampa de descenso posee un rozamiento despreciable y consta de un tramo recto de longitud *d* y una inclinación de 15º con la vertical seguido de un cuarto de circunferencia de radio 5 m determinar:

c) la longitud de descenso *d* que permite al esquiador salir con la velocidad indicada de 10 m/s. **(0.5)**

d) Repetir el apartado anterior si cuando se realiza el salto está presente un viento horizontal hacia la izquierda que ejerce sobre el esquiador una fuerza horizontal de 200 N. **(0.5)**

Nota: Si no se sabe hacer los apartados a) y b) con una pista inclinada 50º y se resuelven con una pista horizontal las puntuaciones de dichos apartados serán de **(0.2) + (0.2).**

SOLUCION

a) Si ponemos el origen de coordenadas en la posición en la que el esquiador sale de la rampa, en ese momento ponemos a cero el cronómetro, y orientamos los ejes *X* e *Y* hacia la derecha y hacia arriba, las ecuaciones del movimiento parabólico del esquiador serán ($\theta = 15$º):

$$x(t) = v_0 \cos\theta \, t \qquad v_x(t) = v_0 \cos\theta$$

$$y(t) = v_0 \,\mathrm{sen}\theta \, t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad v_y(t) = v_0 \,\mathrm{sen}\theta - g t$$

Por otro lado cuando el esquiador entre en contacto con el suelo de la ladera tenemos que ($\beta = 50$º):

$$\left.\begin{array}{ll} x_{suelo} = v_0 \cos\theta \, t_{suelo} & \dfrac{y_{suelo}}{x_{suelo}} = -\mathrm{tg}\beta \\ y_{suelo} = v_0 \,\mathrm{sen}\theta \, t - \dfrac{1}{2} g t_{suelo}^2 & \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} t_{suelo} = 2.877 \text{ s} \\ x_{suelo} = 27.79 \text{ m} \\ y_{suelo} = -33.12 \text{ m} \end{array}\right.$$

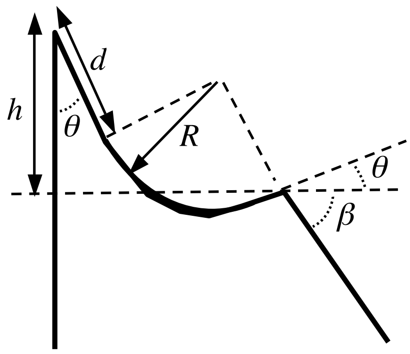
La distancia recorrida a lo largo de la montaña será: $d = \sqrt{x_{suelo}^2 + y_{suelo}^2} = \boxed{43.24 \text{ m}}$

b) La velocidad cuando el esquiador entre en contacto con el suelo de la ladera será:

$$v_x(t_{suelo}) = v_0 \cos\theta = \boxed{9.659 \text{ m/s}}$$

$$v_y(t_{suelo}) = v_0 \,\mathrm{sen}\theta - g t_{suelo} = \boxed{-25.61 \text{ m/s}}$$

c) De la figura se obtiene que:



$$h = (d+R)\cos\theta - R\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Aplicando la conservación de la energía entre la posición inicial y final:

$$\Delta E_{sist.} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_{\substack{pot.\\grav.}} + \Delta E_{cinet.} = 0$$

$$\Rightarrow \quad Mg\Delta y + \left(\frac{1}{2}Mv^2 - 0\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -Mgh + \frac{1}{2}Mv^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -Mg\left[(d+R)\cos\theta - R\,\mathrm{sen}\,\theta\right] + \frac{1}{2}Mv^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad d = \left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{g\cos\theta} + R\tan\theta\right) - R = \boxed{1.622 \text{ m}}$$

d) Ahora tenemos que tener en cuenta que el viento realiza un trabajo sobre el sistema variando la energía de éste:

$$\Delta E_{sist.} = W_{viento} = \vec{F}_{viento}\Delta\vec{r} = F_{viento,x}\Delta x = \left(-F_{viento}\right)\left[(d+R)\mathrm{sen}\,\theta + R\cos\theta\right]$$

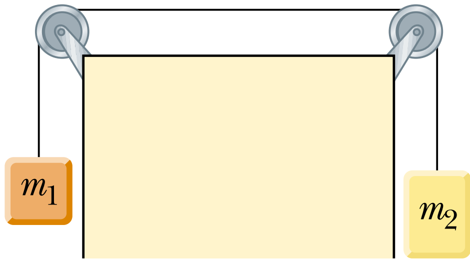
$$\Rightarrow \quad \Delta E_{\substack{pot.\\grav.}} + \Delta E_{cinet.} = -F_{viento}\left[(d+R)\mathrm{sen}\,\theta + R\cos\theta\right]$$

$$\Rightarrow \quad -Mg\left[(d+R)\cos\theta - R\,\mathrm{sen}\,\theta\right] + \frac{1}{2}Mv^2 = -F_{viento}\left[(d+R)\mathrm{sen}\,\theta + R\cos\theta\right]$$

$$\Rightarrow \quad d = \left[\frac{1}{2}\frac{v^2}{g} + R\,\mathrm{sen}\,\theta + \left(\frac{F_{viento}}{Mg}\right)R\cos\theta\right]\left[\cos\theta - \left(\frac{F_{viento}}{Mg}\right)\mathrm{sen}\,\theta\right]^{-1} - R = \boxed{3.477 \text{ m}}$$

Como es de esperar el resultado es mayor que el del apartado anterior.

2. Dos bloques de masas m_1 y m_2 están conectados entre sí por una cuerda ligera que pasa sobre dos poleas idénticas sin fricción, cada una de las cuales tiene un momento de inercia I y radio R (ver figura).



a) Encuentre la aceleración en cada bloque y las tensiones en la cuerda en función de m_1, m_2, I y R. **(1)**

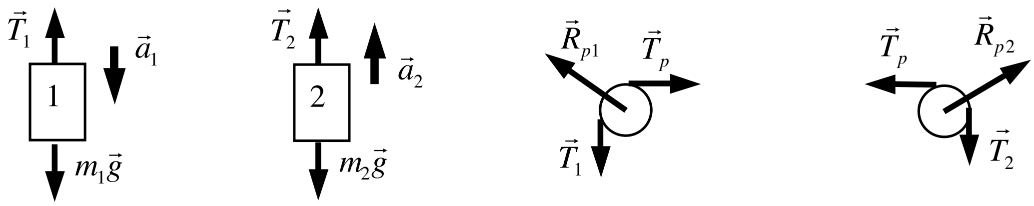
b) A partir de la expresión obtenida para la aceleración discuta si se corresponde con el sentido común que indica que el sistema se aceleraría hacia el bloque más pesado. **(0.2)**

c) ¿Qué pasaría si las poleas no tuviesen masa? Discútalo y halle de nuevo aceleraciones y tensiones. **(0.5)**

d) Calcular numéricamente los valores de las tensiones y de las aceleraciones de los apartados a) y c) para m_1= 3 kg, m_2 = 1 kg, $I = 2{\cdot}10^{-3}$ kg m^2 y R = 5 cm verificando que los valores obtenidos son coherentes. **(0.3)**

SOLUCION

a) Vamos a tomar el sentido positivo del movimiento unidimensional del bloque 1 hacia abajo. Para el bloque 2 tomamos el sentido positivo de movimiento hacia arriba. Dado que la cuerda que los une tiene longitud fija las aceleraciones de los dos cuerpos son iguales $a_1 = a_2 = a$. Para las poleas tomamos el sentido positivo de giro antihorario. En la periferia de las poleas la aceleración tangencial también será a con lo que su aceleración angular será: $\alpha = \dfrac{a}{R}$, donde R es el radio de la polea. Teniendo en cuenta que la tensión de la cuerda que tira de los cuerpos 1 y 2 es diferente para cada uno de ellos debido a que las poleas poseen momento de inercia (no son poleas ideales sin masa) y dibujando el diagrama de fuerzas para los dos bloques y para las poleas y aplicando la segunda ley de Newton para traslación y rotación respectivamente:



$$m_1 g - T_1 = m_1 a \qquad T_2 - m_2 g = m_2 a \qquad T_1 R - T_p R = I\left(\frac{a}{R}\right) \qquad T_p R - T_2 R = I\left(\frac{a}{R}\right)$$

Tenemos cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas cuya solución es:

$$T_1 = \left(\frac{m_2 + \frac{I}{R^2}}{m_1 + m_2 + 2\frac{I}{R^2}}\right) 2 m_1 g \qquad a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + 2\frac{I}{R^2}}\right) g$$

$$T_2 = \left(\frac{m_1 + \frac{I}{R^2}}{m_1 + m_2 + 2\frac{I}{R^2}}\right) 2 m_2 g \qquad T_p = \left(\frac{2 m_1 m_2 + (m_1 + m_2)\frac{I}{R^2}}{m_1 + m_2 + 2\frac{I}{R^2}}\right) g$$

b) Si la aceleración es positiva de la expresión del resultado se deduce que m_1 es mayor que m_2 lo que está de acuerdo con nuestra elección del sentido positivo con el bloque 1 bajando y el 2 subiendo.

c) Si las poleas no tuviesen masa basta con hacer $I = 0$ en los resultados anteriores. Sólo tendríamos una tensión a lo largo de la cuerda y su valor, junto con la aceleración, sería:

$$\boxed{a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) g \qquad T = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) g}$$

d) Sustituyendo los valores numéricos tenemos para el apartado a):

$$\boxed{\begin{array}{ll} T_1 = 18.9 \text{ N} & a = 3.5 \text{ m/s}^2 \\ T_2 = 13.3 \text{ N} & T_p = 16.1 \text{ N} \end{array}}$$

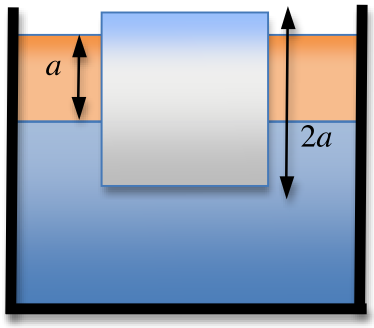
Los valores numéricos verifican: que T_1 es menor que el peso del bloque 1, con lo cual este bloque acelera hacia abajo, que T_2 es mayor que el peso del bloque 2, con lo cual este bloque acelera hacia arriba, que la aceleración es inferior a la de la gravedad (lógico ya que no caen libremente sino que hay una cuerda uniendo los bloques y tirando de ellos) y que la diferencia $T_1 - T_p$ es igual a la diferencia $T_p - T_2$, ya que las dos poleas son iguales y se aceleran por igual.

Y para el apartado c):

$$\boxed{a = 4.9 \text{ m/s}^2 \qquad T = 14.7 \text{ N}}$$

Los valores numéricos verifican: que T es menor que el peso del bloque 1, con lo cual este bloque acelera hacia abajo, que T es mayor que el peso del bloque 2, con lo cual este bloque acelera hacia arriba, que la aceleración es inferior a la de la gravedad.

3. Tenemos un tanque con agua en su parte inferior y una capa de aceite de grosor a en su parte superior (ver figura). Si dejamos flotando en dicho tanque un bloque cúbico de hielo de lado $2a$.
   a) Determinar la longitud de hielo que sobresale por encima de la superficie. **(0.8)**
   Si estando en equilibrio desplazamos ligeramente (una pequeña distancia x) el bloque de hielo hacia abajo y soltamos:
   b) demostrar que la fuerza neta sobre el bloque obedece a la ley de Hooke (es de tipo elástico) y que por lo tanto el movimiento posterior del bloque será armónico simple. **(0.4)**
   c) Calcular el periodo de las pequeñas oscilaciones del bloque de hielo. **(0.8)**
   Datos: densidad del hielo 0.92 g/cm^3, densidad del aceite 0.95 g/cm^3.



SOLUCION

a) Si llamamos s a la longitud de hielo que sobresale por encima de la superficie tenemos que por equilibrio electrostático:

$$M_{hielo}g = E_{\substack{líquido\\desalojado}} = E_{aceite} + E_{agua} \quad \Rightarrow \quad \rho_{hielo}(2a)^3 g = \rho_{aceite}(2a)^2 a\, g + \rho_{agua}(2a)^2 (a-s) g$$

$$\Rightarrow \quad \rho_{hielo}(2a) = \rho_{aceite}a + \rho_{agua}(a-s) \quad \Rightarrow \quad s = \frac{(\rho_{aceite} + \rho_{agua} - 2\rho_{hielo})a}{\rho_{agua}} = \boxed{s = 0.11a}$$

b) Si se aparta el bloque del equilibrio desplazándole una pequeña distancia x hacia abajo el empuje va a aumentar. Si llamamos E al empuje anterior que equilibraba al peso y E' al empuje en esta nueva situación, tenemos que la fuerza neta sobre el bloque será ascendente y de valor:

$$F_{neta} = E'_{\substack{líquido\\desalojado}} - M_{hielo}g = \left(E_{\substack{líquido\\desalojado}} + \rho_{agua}(2a)^2 xg\right) - M_{hielo}g = \left[\rho_{agua}(2a)^2 g\right]x$$

La fuerza neta tiene sentido contrario al desplazamiento y es proporcional a éste, es por lo tanto una fuerza de tipo elástica o que obedece a la ley de Hooke, con lo que el movimiento que el bloque va a realizar será un movimiento armónico simple.

c) El periodo de las oscilaciones será:

$$F_{neta} = \left[\rho_{agua}(2a)^2 g\right]x = k_{elástica}x \qquad \omega = \sqrt{\frac{k_{elástica}}{M_{hielo}}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{M_{hielo}}{k_{elástica}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_{hielo}(2a)^3}{\rho_{agua}(2a)^2 g}} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{\rho_{hielo}(2a)}{\rho_{agua}g}}}$$