EXAMEN DE FISICA I (I.I.) 22-1-2015

CUESTIONES

1) Si tenemos dos sistemas de referencia, uno que rota respecto a otro con una velocidad angular $\vec{\omega}$ constante,

a) ¿Es posible distinguir cuál de los dos sistemas está rotando? Explica por qué y da un ejemplo de cómo podrías hacerlo.

b) Encuentra la relación entre las velocidades de una misma partícula, $\vec{V}$ y $\vec{V}'$, observadas en cada uno de los sistemas (recuerda que la derivada respecto del tiempo de un vector $\vec{i}$ que rota con una velocidad angular $\vec{\omega}$ es $\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}$).

SOLUCION

Si, ya que el sistema que rota no es inercial y aparecen fuerzas ficticias. Una forma de distinguirlo sería con un péndulo de Foucault, ya que en un sistema que rota, el plano de oscilación del péndulo gira respecta al sistema, mientras que en sistema que no rota, el plano permanece constante. Otra forma para distinguirlo seria usando un giróscopo.

Observador O utilizando el sistema de referencia (x, y, z): $\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\,i + \frac{dy}{dt}\,j + \frac{dz}{dt}\,k$

Observador O´ utilizando el sistema de referencia (x´, y´,z´): $\mathbf{v}' = \frac{dx'}{dt}\,i' + \frac{dy'}{dt}\,j' + \frac{dz'}{dt}\,k'$

Observador O utilizando el sistema (x´, y´,z´). Para este observador los vectores unitarios i´, j´y k´ están rotando por lo que su derivada es diferente de 0. $\mathbf{v} = \frac{dx'}{dt}\,i' + x'\frac{di'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\,j' + y'\frac{dj'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\,k' + z'\frac{dk'}{dt}$ =

$$= \frac{dx'}{dt}\,i' + \frac{dy'}{dt}\,j' + \frac{dz'}{dt}\,k' + x'\frac{di'}{dt} + y'\frac{dj'}{dt} + z'\frac{dk'}{dt}$$

*(Los tres primeros términos corresponden a **v**´)*: $\mathbf{v}' + x'(\omega \Lambda i') + y'(\omega \Lambda j') + z'(\omega \Lambda k') =$

(Las coordenadas pasan a multiplicar los vectores unitarios) $\mathbf{v}' + (\omega \Lambda x' i') + (\omega \Lambda y' j') + (\omega \Lambda z' k') =$

(Sacamos factor común a ω) $\mathbf{v}' + \omega \Lambda (x' i' + y' j' + z' k') =$

(r = r´) $\mathbf{v}' + \omega \Lambda r' = \mathbf{v}' + \omega \Lambda r$

Por lo tanto: $\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \omega \Lambda r}$

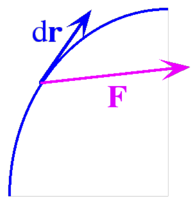
2) a) Define el trabajo desarrollado por una fuerza a lo largo de una trayectoria.

b) Calcular el trabajo efectuado por la fuerza $\mathbf{F} = 2xy\,\mathbf{i} + 3x\,\mathbf{j}$ N al recorrer su punto de aplicación el arco de curva $x= t + 1$, $y= t^3 -1$, desde el punto A (0, -2,) al B (2,0).

Nota: las posiciones x, e y están en metros cuanto t es en segundos.

SOLUCION:

a) $d\omega = \mathbf{F}\,d\mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega= \int \mathbf{F}\,d\mathbf{r}}$



b) En este caso $\quad \omega = \int_A^B (2xy\,\mathbf{i} + 3x\,\mathbf{j})\,d\mathbf{r}$

donde $x = (t + 1)$ e $y = (t^3 -1)$

por lo que el vector de posición es $\mathbf{r} = (t + 1)\,\mathbf{i} + (t^3 -1)\,\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{r} = dt\,\mathbf{i} + 3t^2\,dt\,\mathbf{j} = (\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j})\,dt$

Además, al cambiar la variable al tiempo, los limites son los tiempos para los que la partícula está en los puntos A y B. En el punto A la coordenada x es 0, por lo que $t_A + 1 = 0 \Rightarrow t_A = -1$ s.

En el punto B la coordenada x es 2, por lo que $t_B + 1 = 2 \Rightarrow t_B = 1$ s.

Sustituyendo en la formula del trabajo: $\quad \omega = \int_{-1}^{1} [2(t + 1)\,(t^3 -1)]\,\mathbf{i} + 3\,(t + 1)\,\mathbf{j}]\;(\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j})\,dt \quad \Rightarrow$

$$\omega = \int_{-1}^{1} [2(t + 1)\,(t^3 -1) + 3\,(t + 1)\,3t^2]\,dt = \int_{-1}^{1} [2t^4 + 2t^3 - 2t -2 + 9t^3 + 9t^2]\,dt =$$

$$\int_{-1}^{1} [2t^4 + 11t^3 + 9t^2 - 2t -2]\,dt = [2/5\,t^5 + 11/4\,t^4 + 9/3\,t^3 - 2/2\,t^2 -2t]_{-1}^{1} =$$

$$= [2/5 + \cancel{11/4} + 9/3 - \cancel{2/2} -2] - [- 2/5 + \cancel{11/4} - 9/3 - \cancel{2/2} +2] = 4/5 + 18/3 -4 = 14/5 = \boxed{2.8\ J}$$

3) Un bloque descansa sobre el tablero de una mesa que realiza un movimiento armónico simple de amplitud A y periodo T.

a) Si la oscilación es vertical ¿cuál es el máximo valor de A que permitirá al bloque permanecer siempre en contacto con la mesa?

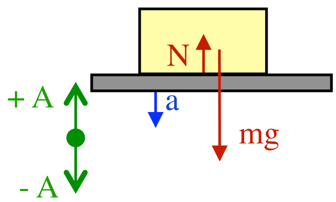
b) Si la oscilación es horizontal, y el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la mesa es μ, ¿cuál es el máximo valor de A para que el bloque no se deslice.

SOLUCION

a) En un MAS, $\quad x = A\cos\omega t$

$v = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t$

$a = -A\omega^2 \cos\omega t \quad \Rightarrow \quad a_{max} = A\omega^2$

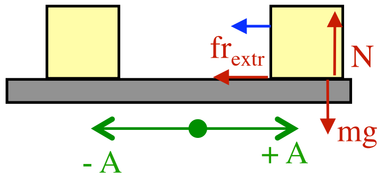


En la parte superior de la oscilación, aplicando la 2ª ley de Newton $mg – N = ma \quad \Rightarrow \quad N = m\,(g – a)$

En esa parte la $a = a_{max}$, además, si el bloque permanece en reposo:

$$N \geq 0 \;\Rightarrow\; g - a_{max} \geq 0 \;\Rightarrow\; g - A\omega^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; \boxed{A \leq g/\omega^2 = g/(2\pi/T)^2 = gT^2/(4\pi^2)}$$

b) La fuerza que produce la aceleración es la fuerza de rozamiento,



$$fr = ma = m\,(-A\omega^2 \cos\omega t)$$

Esta fuerza tiene un valor máximo en los extremos de la trayectoria:

$$fr_{extr} = m\,A\omega^2$$

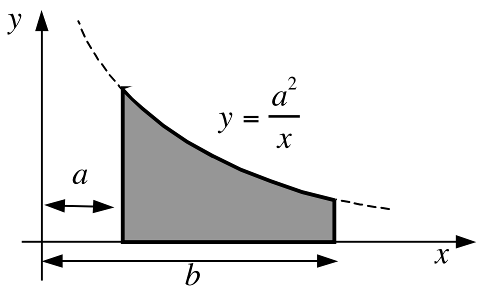
Además la fuerza de rozamiento siempre tiene que ser menor que la fuerza de rozamiento máxima ($=\mu N$):

$$fr_{extr} \leq fr_{max} \;\Rightarrow\; m\,A\omega^2 \leq \mu mg \;\Rightarrow\; \boxed{A \leq \mu g/\omega^2 = \mu g/(2\pi/T)^2 = \mu g T^2/(4\pi^2)}$$

---

4) Determinar la posición del centro de masas de la placa homogénea de la figura.

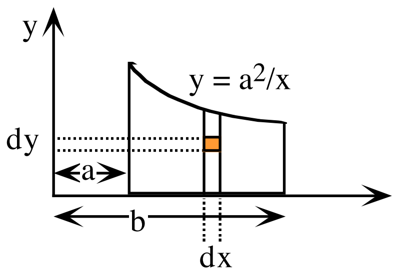
Nota: recordar que $\int dx/x = \ln x$.



SOLUCION

Recordando la definición de centro de masas de una superficie homogénea

$$x_{CM} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} \qquad e \qquad y_{CM} = \frac{\int y\,dA}{\int dA}$$



con $dA = dx\,dy$. integramos primero dy entre 0 y a^2/x y posteriormente dx entre a y b

$$\boxed{\int x\,dA} = \iint x\,dx\,dy = \int_a^b x\,dx \int_0^{a^2/x} dy = \int_a^b x\,dx\,[y]_0^{a^2/x} = \int_a^b x\,dx\,\frac{a^2}{x} = \int_a^b a^2 dx = a^2[x]_a^b = \boxed{a^2(b-a)}$$

$$\boxed{\int y\,dA} = \iint y\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_0^{a^2/x} y\,dy = \int_a^b dx\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{a^2/x} = \int_a^b dx\,\frac{a^4}{2x^2} = \int_a^b \frac{a^4}{2x^2}dx = \frac{a^4}{2}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = \boxed{\frac{a^4}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$$

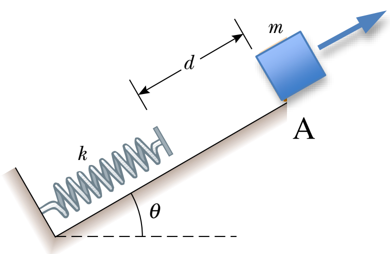
$$\boxed{\int dA} = \iint dx\,dy = \int_a^b dx \int_0^{a^2/x} dy = \int_a^b dx\,[y]_0^{a^2/x} = \int_a^b dx\,\frac{a^2}{x} = a^2[\mathrm{Ln}x]_a^b = a^2(\mathrm{Ln}b - \mathrm{Ln}a) = \boxed{a^2 \mathrm{Ln}(b/a)}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones iniciales:

$$\boxed{x_{CM}} = \frac{\int x\, dA}{\int dA} = \frac{a^2(b-a)}{a^2 Ln(b/a)} = \boxed{\frac{(b-a)}{Ln(b/a)}}$$

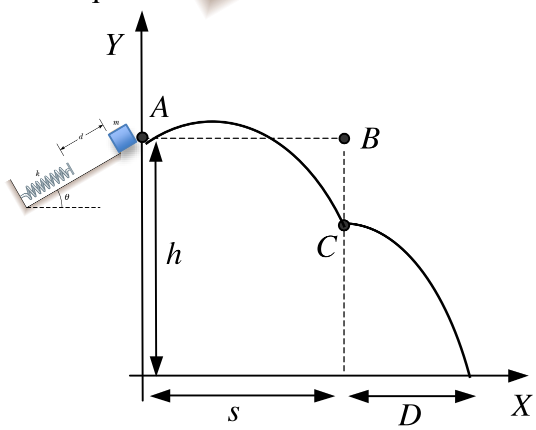
$$\boxed{y_{CM}} = \frac{\int y\, dA}{\int dA} = \frac{\frac{a^4}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{a^2 Ln(b/a)} = \frac{a^2\left(\frac{b-a}{ab}\right)}{2Ln(b/a)} = \boxed{\frac{a(b-a)}{2bLn(b/a)}}$$

PROBLEMAS



1) Se utiliza el mecanismo indicado en la figura para lanzar un proyectil de masa m = 25 g con una velocidad inicial v_0 = 35 m/s. La constante elástica del muelle es k = 100 N/m, el coeficiente de rozamiento con el plano es μ = 0.7 y el proyectil recorre una distancia d = 10 m desde que pierde contacto con el muelle hasta que abandona el plano.
Desde un punto B situado a una altura h = 10 m del suelo se deja caer una esfera de madera de masa M = 150 g en el mismo instante en que nuestro proyectil sale del punto A situado a igual nivel que B y distante de éste una distancia s = 28 m. El proyectil alcanza la esfera durante su caída quedando pegado a la misma y alcanzando ambos el suelo a cierta distancia D del pie de la vertical que pasa por B. Determinar:

a) El ángulo de tiro θ para que se produzca el choque en el punto C.
b) La comprensión del muelle necesaria para el lanzamiento.
c) El vector velocidad del conjunto después del choque.
d) El tiempo total transcurrido desde que se lanzó el proyectil hasta que los dos objetos llegaron juntos al suelo.
e) La distancia horizontal D recorrida.



SOLUCION

a) Tomemos el origen de coordenadas en el suelo en la vertical del punto A (ver figura) y pongamos a cero nuestro cronómetro en el instante en que se lanza el proyectil. Las ecuaciones para la posición de los dos cuerpos serán:

$$x_{proy.}(t) = v_0 \cos\theta\, t \qquad y_{proy.}(t) = h + v_0 \,\text{sen}\,\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$x_{esfera}(t) = s \qquad y_{esfera}(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Si en el instante t_{choque} se produce el choque entre los dos cuerpos tenemos que:

$$y_{proy.}(t_{choque}) = y_{esfera}(t_{choque}) \quad \Rightarrow \quad h + v_0 \,\text{sen}\,\theta\, t_{choque} - \frac{1}{2}gt_{choque}^2 = h - \frac{1}{2}gt_{choque}^2$$

$$\Rightarrow \quad v_0 \,\text{sen}\,\theta\, t_{choque} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 0}$$

por otro lado teniendo esto en cuenta e igualando la coordenada x:

$$x_{proy.}\left(t_{choque}\right)=x_{esfera}\left(t_{choque}\right) \quad \Rightarrow \quad v_0\, t_{choque}=s \quad \Rightarrow \quad t_{choque}=\frac{s}{v_0}=0.8 \text{ s}$$

b) El muelle va a actuar en un plano horizontal. Si tomamos como sistema a todo el conjunto la energía total del sistema se va a conservar debido a que no hay ninguna transferencia de energía entre el exterior y el sistema. Lo que ocurre es que debido a la fuerza de rozamiento la energía mecánica del sistema disminuirá en beneficio de la energía interna o térmica que aumentará. Si comparamos la situación final cuando el proyectil sale del punto A con velocidad v_0 con la situación inicial en la que partía del reposo con el muelle completamente comprimido una distancia Δl , tenemos que:

$$\Delta E_m = W_{roz.} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1}{2}m v_0^2\right]-\left[\frac{1}{2}k\left(\Delta l\right)^2\right]=-\mu\, mg\cos\theta\left(d+\Delta l\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta l = \boxed{58.5 \text{ cm}}$$

c) Las ecuaciones para las velocidades de los dos cuerpos serán:

$$v_{proy.,x}(t)=v_0 \qquad v_{proy.,y}(t)=-gt$$

$$v_{esfera,x}(t)=0 \qquad v_{esfera,y}(t)=-gt$$

Los dos cuerpos se quedan pegados en el choque con lo que aplicando la conservación del momento lineal:

$$m\vec{v}_{proy.}\left(t_{choque}\right)+M\,\vec{v}_{esfera}\left(t_{choque}\right)=\left(M+m\right)\vec{v}_{conjunto}\left(t_{choque}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{conjunto}\left(t_{choque}\right)=\frac{m\vec{v}_{proy.}\left(t_{choque}\right)+M\,\vec{v}_{esfera}\left(t_{choque}\right)}{\left(M+m\right)}=$$

$$=\left(\frac{mv_0}{M+m},-gt_{choque}\right)=\boxed{\left(5,-7.84\right) \text{ m/s}}$$

Observación: Vemos que la velocidad vertical de caída de los dos cuerpos no cambia durante el choque. Para el movimiento vertical es como si no hubiese habido un choque. El intercambio de momento lineal entre los dos cuerpos se produce en la dirección del eje X (dirección normal o de impacto) y es en esa dirección en la que cambian sus velocidades. Pensemos que si un observador se hubiese dejado caer desde la altura h al mismo tiempo que se lanza el proyectil y se deja caer la esfera, en todo momento observador, proyectil y esfera se encontrarían a la misma altura y para ese observador el movimiento de los dos objetos y el choque se desarrollaría por completo en su eje horizontal.

Por otro lado el conjunto mantendrá constante su velocidad en el eje X de 5 m/s.

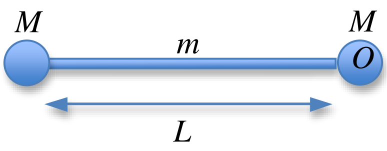
d) Vista la observación del apartado anterior, el tiempo que nos piden es el mismo que tardaría la esfera en caer desde la altura h si no hubiese habido choque:

$$0=h-\frac{1}{2}gt_{suelo}^2 \quad \Rightarrow \quad t_{suelo}=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\boxed{1.43 \text{ s}}$$

e) La distancia recorrida por el conjunto desde que se produce el choque hasta que llega al suelo será:

$$D=v_{conjunto,x}\left(t_{suelo}-t_{choque}\right)=\boxed{3.14 \text{ m}}$$

2) El sistema de la figura está formado por una varilla homogénea de masa m y longitud L y dos esferas macizas homogéneas de masa M y radio R (no despreciable) situadas en los extremos de la barra. El conjunto está suspendido de un eje perpendicular al plano de la figura y que pasa por el punto O en el centro de una de las esferas. Si el sistema se suelta desde la posición horizontal que se muestra determinar:



a) El momento de inercia del sistema respecto del eje de rotación.
b) La distancia d del centro de masas del sistema al eje de rotación.
c) La aceleración angular del sistema justo cuando se le suelta desde la posición inicial horizontal.
d) La fuerza de reacción que el eje ejerce sobre el sistema justo cuando se le suelta desde la posición inicial horizontal.
e) La velocidad y la aceleración angular del sistema cuando, una vez soltado, alcanza la posición vertical.
f) La fuerza de reacción que el eje ejerce sobre el sistema cuando éste alcanza la posición vertical.

Nota: Mom. de inercia de una esfera homogénea respecto de un diámetro: $I = \frac{2}{5}MR^2$. Mom. de inercia de una barra homogénea respecto de un eje perpendicular a ella y que pasa por su extremo: $I = \frac{1}{3}ML^2$.

SOLUCION

a) El momento de inercia total del sistema respecto del eje que pasa por O será la suma de los momentos de inercia de las dos esferas y de la barra. En algún caso habrá que aplicar el teorema de Steiner para calcular el momento de inercia correspondiente.

Esfera 1 (se encuentra sobre O): $I_{esfera1,O} = \frac{2}{5}MR^2$

Esfera 2 (se encuentra su C.M. a $L + 2R$ de O):

$$I_{esfera2,O} = I_{esfera2,C.M.} + M\left(L+2R\right)^2 = \frac{2}{5}MR^2 + M\left(L+2R\right)^2$$

Varilla (habría que aplicar Steiner dos veces):

$$I_{varilla,extremo} = I_{varilla,C.M.} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}mL^2 = I_{varilla,C.M.} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad I_{varilla,C.M.} = \frac{1}{12}mL^2$$

$$I_{varilla,O} = I_{varilla,C.M.} + m\left(\frac{L}{2}+R\right)^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}+R\right)^2$$

El momento de inercia del sistema respecto de O sería:

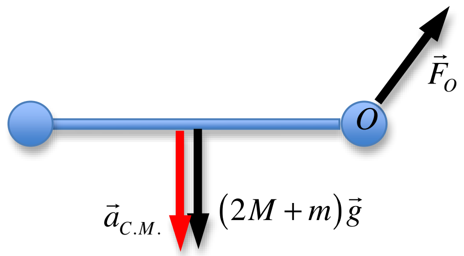
$$\boxed{I_O = I_{esfera1,O} + I_{esfera2,O} + I_{varilla,O} = \frac{4}{5}MR^2 + M\left(L+2R\right)^2 + \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}+R\right)^2}$$

b) Por simetría el C.M. del sistema se encontrará en el centro geométrico y por lo tanto a distancia $\boxed{\frac{L}{2}+R}$ del punto O.

c) Cuando se le suelta, aparte de la fuerza de reacción que se ejerce en O y que por lo tanto no ejerce ningún momento de fuerzas, tenemos el peso aplicado en el C.M. del sistema que ejercerá un momento de fuerzas que acelerará angularmente el sistema de acuerdo con la segunda ley de Newton:

$$\vec{M}_{peso} = I_O\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{M_{peso}}{I_O} = \boxed{\frac{(2M+m)g\left(\frac{L}{2}+R\right)}{I_O}}$$

d) Justo cuando lo acabamos de soltar el C.M. del sistema parte del reposo, por lo que en ese momento no hay componente normal de la aceleración, sólo componente tangencial:



$$a_t = \alpha R_{giro} = \alpha\left(\frac{L}{2}+R\right)$$

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$(2M+m)\vec{g} + \vec{F}_O = (2M+m)\vec{a}_{C.M.}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_O = (2M+m)\left[\vec{a}_{C.M.} - \vec{g}\right] = (2M+m)\left[-\alpha\left(\frac{L}{2}+R\right)\hat{j} - (-g)\hat{j}\right] =$$

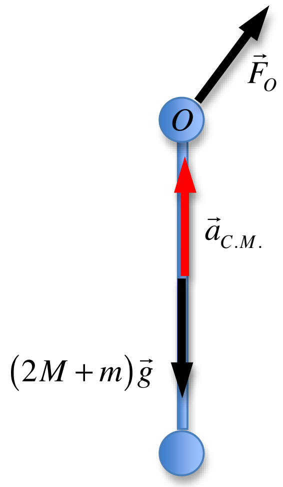
$$= (2M+m)\left[g - \alpha\left(\frac{L}{2}+R\right)\right]\hat{j} = \boxed{(2M+m)g\left[1 - \frac{(2M+m)\left(\frac{L}{2}+R\right)^2}{I_O}\right]\hat{j}}$$

e) Cuando en su movimiento de rotación alrededor de O el sistema llega a la posición vertical la velocidad angular ω que alcanza la podemos obtener aplicando la conservación de la energía. La energía potencial gravitatoria del sistema ha disminuido (el C.M. baja una altura $L/2 + R$) en beneficio de la energía cinética de rotación alrededor del eje que pasa por O (no incluimos la energía cinética de traslación porque en nuestro caso el movimiento es una rotación pura alrededor de O):

$$\Delta E_{sist.} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U_{grav.} + \Delta E_{c,rot.} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -(2M+m)g\left(\frac{L}{2}+R\right) + \frac{1}{2}I_O\omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \boxed{\left[\frac{2(2M+m)g\left(\frac{L}{2}+R\right)}{I_O}\right]^{1/2}}$$



Justo cuando pasa por la vertical ninguna fuerza produce momento de fuerzas respecto de O (ver figura) con lo que según la segunda ley de Newton para rotaciones la aceleración angular será nula:

$$0 = I_O\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \boxed{0}$$

f) Cuando pasa por la vertical no habrá componente tangencial de la aceleración ($\alpha = 0$), sólo habrá componente normal de la aceleración (orientada hacia el centro de giro O).

$$a_n = \omega^2 R_{giro} = \left[\frac{2(2M+m)g\left(\frac{L}{2}+R\right)}{I_O}\right]\left(\frac{L}{2}+R\right) = \frac{2(2M+m)g\left(\frac{L}{2}+R\right)^2}{I_O}$$

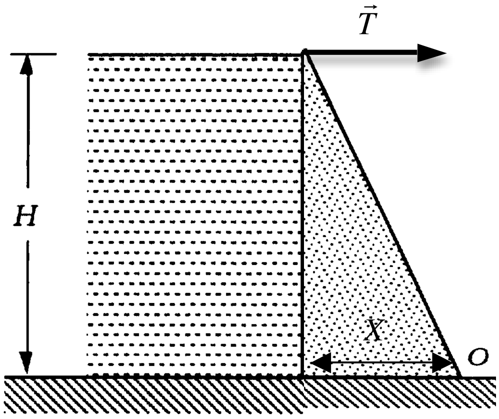
Aplicando la segunda ley de Newton tenemos que:

$$(2M+m)\vec{g} + \vec{F}_O = (2M+m)\vec{a}_{C.M.}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_O = (2M+m)\left[\vec{a}_{C.M.} - \vec{g}\right] = \boxed{(2M+m)g\left[1 + \frac{2(2M+m)\left(\frac{L}{2}+R\right)^2}{I_O}\right]\hat{j}}$$

---

3) La figura representa la sección transversal en forma de triángulo, H = 12 m, $X = 3$ m, de una presa cuya longitud perpendicular al diagrama es $L = 20$ m. El material con el que se ha construido la presa tiene una densidad ρ = 9000 kg / m^3. Determinar:



a) La presión absoluta en el fondo del embalse **(0.2)**.
b) La fuerza ejercida sobre el cristal de un reloj sumergible de 2 cm de diámetro si en su interior hay aire a presión atmosférica y el reloj se encuentra en el fondo del embalse **(0.3)**.
c) Determinar la fuerza resultante que ejerce el agua sobre la presa y el punto de aplicación de dicha fuerza. Demostrar las ecuaciones utilizadas **(0.7)**.
d) Hallar el valor del peso de la presa. **(0.2)**.
e)¿Qué tensión tendríamos que aplicar a una cuerda amarrada en el extremo superior de la presa para que esta comenzase a volcar respecto al punto O **(0.3)**.
f)¿Si no aplicamos ninguna tensión y reducimos el valor de X, cual seria el mínimo valor de x antes de que la presa volcase en torno al punto O? **(0.3)**.
Nota: el centro de masas de una placa triangular se encuentra a 1/3 de la base y a 2/3 del vértice opuesto, cualquiera que sea el lado elegido como base.

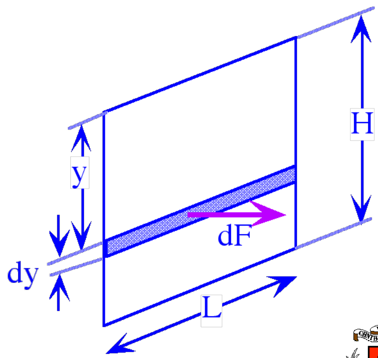
SOLUCION

a) La presión absoluta será: $P_{fondo} = P_{atm.} + \rho_{agua} g H = \boxed{2.189 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 2.161 \text{ atm.}}$

b) La fuerza ejercida sobre el cristal es debida a la diferencia de presión entre el exterior del reloj y el interior. Como dentro del reloj hay aire a presión atmosférica tenemos que:

$$F = (P_{ext.} - P_{int.})A = (P_{fondo} - P_{atm.})(\pi r^2) = (\rho_{agua} g H)(\pi r^2) = \boxed{36.95 \text{ N}}$$

c) La fuerza ejercida por el agua sobre la presa será únicamente debida a la presión ejercida por el agua (ya que la presión atmosférica también actúa por el otro lado de la presa), que a una profundidad y es $P(y) = \rho_{agua}\, g\, y$. Si consideramos una franja de la presa de altura dy y longitud L, toda ella situada a una profundidad y, la fuerza que actúa sobre la misma será:



$$dF = P(y)\, L\, dy = \rho_{agua}\, g\, L\, y\, dy$$

Para calcular la fuerza total sobre la presa debemos integrar dF entre la superficie del agua y el fondo:

$$F = \int_0^H \rho_{agua}\, g\, L\, y\, dy = \frac{1}{2}\rho_{agua}\, g\, L H^2 = \boxed{1.411 \cdot 10^7 \text{ N}}$$

El punto de aplicación de la fuerza *F* sobre la presa será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos). Calculando momentos respecto del punto *O* en el fondo:

$$M_{agua,O} = \int_0^H \rho_{agua}\, g\, L\, y(H-y)\, dy = \frac{1}{6}\rho_{agua}\, g\, L H^3 = 5.64 \cdot 10^7 \text{ Nm}$$

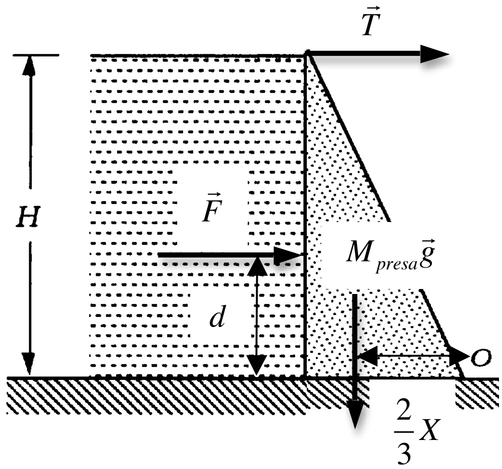
con lo que el punto de aplicación de la fuerza *F* se encontrará a una distancia *d* del fondo:

$$Fd = M_{agua,O} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{M_{agua,O}}{F} = \frac{1}{3}H = \boxed{4 \text{ m}}$$

d) La masa de la presa será: $M_{presa} = \rho_{presa} V_{presa} = \rho_{presa}\frac{1}{2}XHL = 3.24 \cdot 10^6$ Kg

Y su peso: $Peso_{presa} = M_{presa} g = \boxed{3.175 \cdot 10^7 \text{ N}}$

e) Si la presa está a punto de volcar está perdiendo el contacto con el fondo y por lo tanto no habrá fuerza normal ejercida por éste. En ese instante a punto de volcar el momento neto de las fuerzas es nulo (si aumentamos un poco más la tensión el momento de fuerzas dejaría de ser nulo y la presa volcaría). El diagrama de fuerzas es el que se muestra en la figura.



Igualando a cero el sumatorio de momentos:

$$TH + Fd - M_{presa} g\left(\frac{2}{3}X\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \boxed{5.88 \cdot 10^5 \text{ N}}$$

f) Si no aplicamos tensión y reducimos el valor de *X* (hay que tener en cuenta que el peso de la presa también habrá disminuido) igualando a cero el sumatorio de momentos tenemos que:

$$Fd - M_{presa} g\left(\frac{2}{3}X_{mín.}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad Fd - \rho_{presa}\frac{1}{2}X_{mín.} HLg\left(\frac{2}{3}X_{mín.}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad X_{mín.} = \left[\frac{3Fd}{\rho_{presa} HLg}\right]^{1/2} = \boxed{\sqrt{8} \text{ m} = 2.83 \text{ m}}$$