

CUESTIONES

1) Demostrar que un sistema de fuerzas cuya resultante es nula ($\sum \mathbf{F} = 0$), el momento de fuerzas resultante ($\sum \mathbf{M}_p \mathbf{F}$) es independiente del punto respecto al cual se calcula.

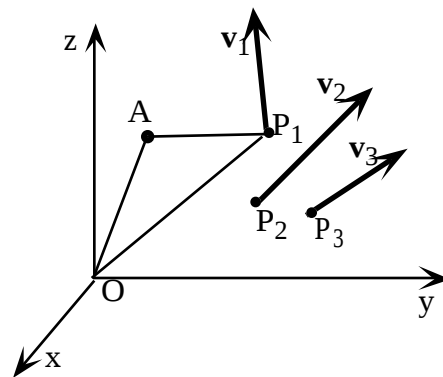
SOLUCION

Vamos a calcular el momento resultante respecto a un punto cualquiera A y lo relacionaremos con el obtenido respecto al origen.

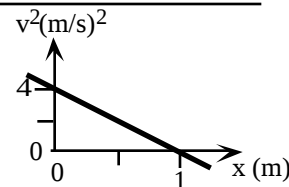
$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \sum \mathbf{AP}_i \wedge \mathbf{V}_i = \sum (\mathbf{AO} + \mathbf{OP}_i) \wedge \mathbf{V}_i = \sum (-\mathbf{OA} + \mathbf{OP}_i) \wedge \mathbf{V}_i = \\ &= \sum (-\mathbf{OA} \wedge \mathbf{V}_i) + \sum (\mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{V}_i) = -\mathbf{OA} \wedge \sum (\mathbf{V}_i) + \sum (\mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{V}_i) \\ &= -\mathbf{OA} \wedge \mathbf{R} + \sum (\mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{V}_i) = -\mathbf{OA} \wedge \mathbf{R} + \mathbf{M}_O \end{aligned}$$

Es lo que se denomina campo de momentos.

Si la resultante es nula ($\mathbf{R} = 0$) $\Rightarrow \mathbf{M}_A = \mathbf{M}_O$ lo que significa que el momento resultante es igual cuando lo calculamos respecto al origen o respecto a un punto cualquiera A, y por lo tanto es independiente del punto respecto al cual se calcula.



2) Dada la dependencia de la velocidad con la posición en un movimiento rectilíneo mostrada por la siguiente gráfica, determinar la dependencia con el tiempo de la aceleración, velocidad y posición del móvil, sabiendo que $x(0) = 0.75$ m. representa las gráficas $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$.



SOLUCION

Una de las ecuaciones conocidas de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1)$$

es decir, la velocidad al cuadrado es directamente proporcional al desplazamiento, tal como se observa en la gráfica. Para conocer la aceleración a , aplicamos dicha ecuación entre los puntos 1 ($v_1^2 = 4$, $x_1 = 0$) y 2 ($v_2^2 = 0$, $x_2 = 1$) y nos queda: $(0 - 4) = 2a(1 - 0) \Rightarrow \boxed{a = -2 \text{ m/s}^2}$

Por otra parte nos dicen que para $t = 0$, la posición es $x = 0.75$ m. Si nos fijamos en la gráfica vemos que a $x = 0.75$ le corresponde un valor de $v^2 = 1 \Rightarrow v = \pm 1$ m/s. Otra forma sería a partir de la ecuación de la recta representada en la gráfica ($v^2 = 4 - 4x$) en la cual, si damos un valor a x de 0.75, obtenemos que $v^2 = 1 \Rightarrow v = \pm 1$ m/s. Es decir la velocidad inicial puede ser positiva o negativa.

Por tanto los datos para tiempo igual a 0 son:

$$x_0 = 0.75 \text{ m}$$

$$v_0 = \pm 1 \text{ m/s}$$

Y las ecuaciones:

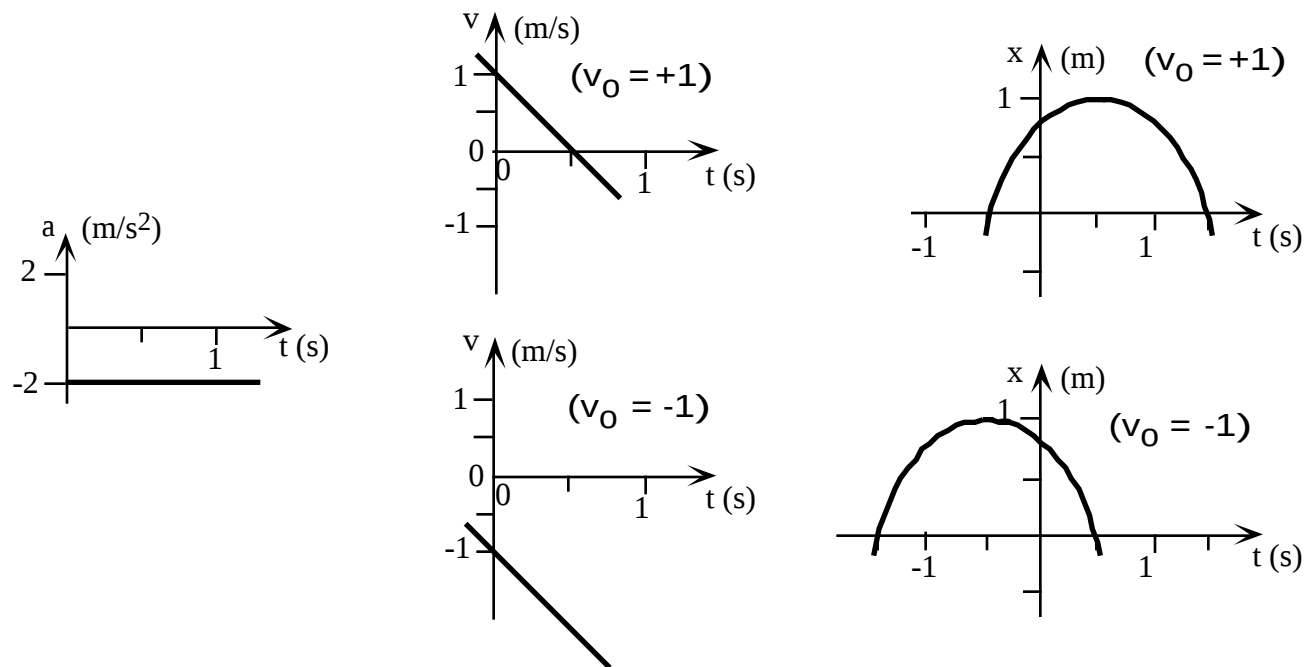
$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + (1/2)at^2$$

se escriben de la forma:

$$\boxed{\begin{aligned} v &= \pm 1 - 2t \\ x &= 0.75 \pm t - t^2 \end{aligned}}$$

Ahora simplemente tenemos que representar las gráficas de forma adecuada, donde para la aceleración solo hay una posibilidad, mientras que para la v y la x tenemos dos:



3) El muón es una partícula inestable cuya masa es unas 207 veces la masa del electrón. Estas partículas se desintegran con una vida media τ ; esto significa que si tenemos un numero de muones N en reposo en el laboratorio, cuando ha pasado un tiempo τ solo nos quedan la mitad de los muones ($N/2$). Siguiendo el mismo razonamiento, cuando ha pasado un tiempo $n\tau$ nos quedarán $(N/2)^n$. Sabemos que los muones en reposo en el laboratorio tienen una vida media de $1.5 \cdot 10^{-6}$ s, que se producen en la atmósfera a una altura de 60 Km y que tienen una velocidad cercana a la de la luz ($v = 0.999 c$) ¿Que fracción de los muones llegan a la superficie terrestre? Explica por que.

SOLUCION

La velocidad de los muones es $v = 0.999 c = 0.999 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 2.9949 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

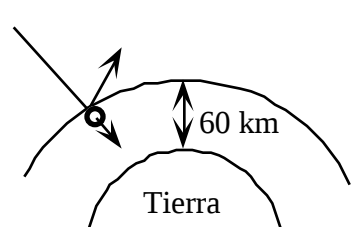
El tiempo que tardan en alcanzar la superficie terrestre es igual al espacio dividido por la velocidad:

$$t = 60 \cdot 10^3 / 2.9949 \cdot 10^8 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

Si dividimos este tiempo por la vida media ($\tau = 1.5 \cdot 10^{-6}$ s) encontramos cuantas vidas medias pasan hasta llegar a la Tierra

$$t / \tau = 2 \cdot 10^{-4} / 1.5 \cdot 10^{-6} = 133 \Rightarrow t = 133\tau$$

$$\text{si se producen } N \text{ muones, solo llegarían a la superficie } N/2^{133} = 10^{-40} N$$



Sin embargo se observa que llegan muchos mas. La explicación radica en que los muones viajan a velocidades cercanas a la de la luz, y por lo tanto para ellos el tiempo que tardan en alcanzar la Tierra (tiempo propio t') es diferente al observado por nosotros (t).

La relación es $t = \gamma t'$ con $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0.999c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.999^2}} = 22.2$

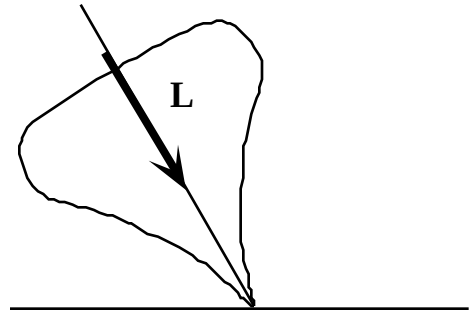
El tiempo propio es $t' = t / \gamma = 2 \cdot 10^{-4} / 22.2 = 9.09 \cdot 10^{-6}$

Si calculamos de nuevo a cuanta vidas medias corresponde este tiempo:

$$t' / \tau = 9.09 \cdot 10^{-6} / 1.5 \cdot 10^{-6} = 6 \Rightarrow t' = 6\tau$$

Si se producen N muones, solo llegarían a la superficie $N/2^6 = \boxed{(1/64) N}$

4) El trompo de la figura de masa m y momento de inercia I gira de modo que su vector momento angular L apunta a lo largo de su eje hacia el punto de apoyo. a) Analizar y discutir como se realizará el movimiento de precesión. b) Deducir el valor de la velocidad angular de precesión si suponemos que el centro de masas se encuentra a una distancia d del punto de apoyo.



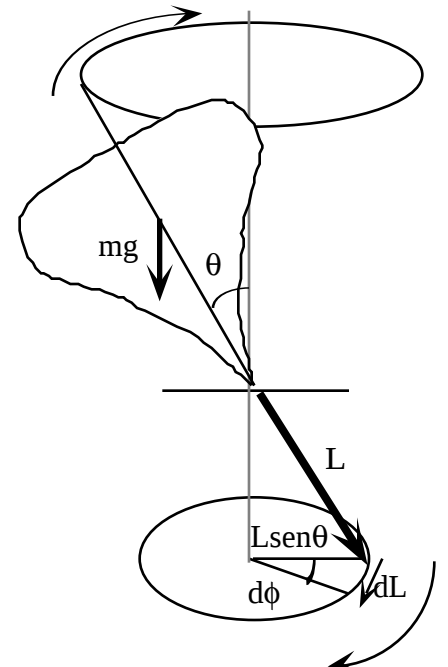
SOLUCION

El peso realiza un momento respecto al punto de apoyo que es perpendicular al plano del papel y sale de el. Ese momento produce un dL que siempre es perpendicular a L y que por lo tanto solo cambia su dirección, pero no su valor. L entonces gira entorno a la dirección vertical, realizando un movimiento que se denomina de precesión. El extremo de L realiza un movimiento circular, tal como muestra la figura. Visto el trompo desde arriba, el movimiento es en sentido horario.

Para calcular la velocidad angular de precesión Ω ($= d\phi / dt$) partimos de la ecuación que relaciona el momento de la fuerza con la derivada temporal del momento angular: (suponemos que el centro de masas está a una distancia d del punto de apoyo)

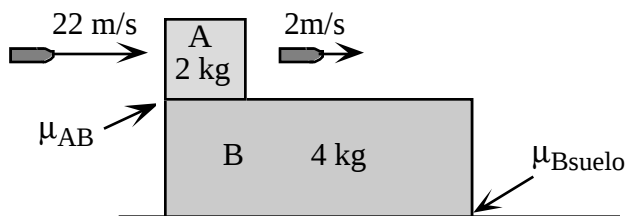
$$\begin{aligned} |\mathbf{M}| &= mgdsen\theta \\ \mathbf{M} = d\mathbf{L} / dt &\Rightarrow mgdsen\theta = Lsen\theta d\phi / dt \Rightarrow \\ |\mathbf{dL}| &= Lsen\theta d\phi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Omega = d\phi / dt = (mgdsen\theta) / (Lsen\theta) \Rightarrow \boxed{\Omega = mgd / L}$$



PROBLEMAS

1) Se tienen dos bloques como indica la figura, de masas $m_A = 2 \text{ kg}$ y $m_B = 4 \text{ kg}$ y longitudes $L_A = 0.5 \text{ m}$ y $L_B = 2 \text{ m}$. El coeficiente de rozamiento entre A y B es $\mu_{AB} = 0.06$ y entre B y el suelo $\mu_{Bsuelo} = 0.01$. Se dispara una bala de masa $m = 100 \text{ gr}$ sobre A, comprobándose que entra con una velocidad de 22 m/s y sale con 2 m/s . Suponemos que la bala atraviesa A de forma instantánea.



- Determinar la energía perdida por la bala al atravesar A, y la velocidad adquirida por el bloque.
- Estudiar los movimientos de los cuerpos A Y B, indicando con claridad las diferentes fases que se van a producir.
- Determinar la aceleración de cada cuerpo y las velocidades absolutas en cada una de las fases.
- Calcular los tiempos de cada una de las fases y representar $v(t)$ y $a(t)$.
- Determinar la posición final de A respecto de B y el espacio recorrido por el bloque B.
- ¿Cuál hubieran sido las velocidades y aceleraciones de ambos bloques en el caso de que los coeficientes de rozamiento hubieran estado invertidos ($\mu_{AB} = 0.01$ y $\mu_{Bsuelo} = 0.06$)?

SOLUCION

a) La bala al atravesar el cuerpo A solo pierde energía cinética. El incremento de energía será:

$$\overline{\Delta E_C} = E_{cf} - E_{ci} = (1/2) m_b v_f^2 - (1/2) m_b v_i^2 = (1/2) * 0.1 * 2^2 - (1/2) * 0.1 * 22^2 = 0.2 - 24.2 = \overline{-24 \text{ J}}$$

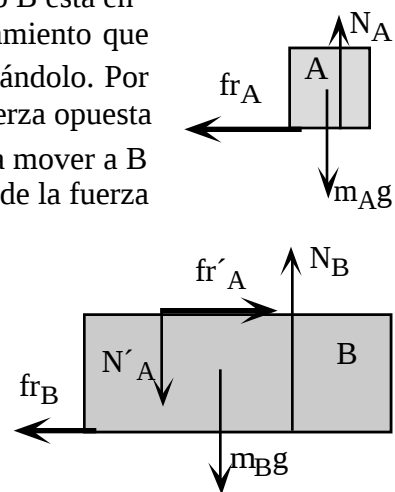
y por tanto la energía perdida es de 24 J

Para calcular la velocidad adquirida por el bloque, tenemos que aplicar el principio de conservación del momento lineal. Hay que tener en cuenta que el momento perdido por la bala es transferido al cuerpo A, que es con el que interacciona la bala, y que el cuerpo B esta con velocidad 0.

$$P_i = P_f \Rightarrow m_B v_{Bi} + m_A v_{Ai} = m_B v_{Bf} + m_A v_{Af} \Rightarrow 0.1 * 22 + 2 * 0 = 0.1 * 2 + 2 * v_{Af} \Rightarrow \boxed{v_{Af} = 1 \text{ m/s}}$$

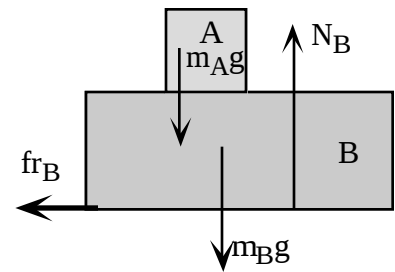
b) El cuerpo A parte con una velocidad inicial de 1 m/s mientras que el cuerpo B está en reposo. Al existir desplazamiento entre A y B, se produce una fuerza de rozamiento que será la f_r máxima $f_{rA} = \mu_{AB} N_A$. Esta fuerza de rozamiento actúa sobre A frenándolo. Por la 3ª ley de Newton las fuerzas aparecen por pares, por lo que aparecerá una fuerza opuesta f'_{rA} de igual módulo y sentido contrario que actúa sobre B. Esta última tiende a mover a B en el mismo sentido que A. El que B se llegue a mover o no, depende del valor de la fuerza de rozamiento entre B y el suelo. Si la fuerza de rozamiento máxima entre B y el suelo ($f_{rB} = \mu_{Bsuelo} N_B$) es mayor que f'_{rA} entonces B permanece quieto y el cuerpo A se desplaza sobre el B frenando hasta que se para o se cae al suelo.

En el caso de que f_{rB} sea menor que f'_{rA} , aparece una fuerza neta sobre B en la misma dirección del movimiento de A ($f'_{rA} - f_{rB}$) que lo va acelerando. Por lo tanto en este segundo caso A decelera mientras que B acelera. Llegará un momento en que ambos tengan la misma velocidad, en ese instante no existe



desplazamiento de A sobre B y por tanto ya no hay una fuerza que acelere a B. A partir de ese momento los dos cuerpos deceleran simultáneamente como si fuese uno solo hasta que se paran.

Para saber cual de estos casos se va a producir tenemos que calcular las fuerzas de rozamiento:



$$\text{Cuerpo A : } N_A = m_A g \Rightarrow \boxed{fr_A = \mu_{AB} N_A = \mu_{AB} m_A g = 0.06 \cdot 2 \cdot 10 = 1.2 \text{ N}}$$

$$\text{Cuerpo B : } N_B = m_B g + N'_A \Rightarrow \boxed{fr_B = \mu_{Bsuelo} N_B = \mu_{Bsuelo} (m_A g + m_B g) = 0.01 \cdot (2+4) \cdot 10 = 0.6 \text{ N}}$$

Como fr_B es menor que fr'_A estamos en este segundo caso y el movimiento tendrá dos fases:

1ª fase A decelera mientras que B acelera, hasta que los dos tienen la misma v.

2ª fase A en reposo respecto de B y ambos cuerpos deceleran hasta pararse.

c) Para calcular las aceleraciones de los cuerpos, aplicamos la segunda ley de Newton ($\Sigma F = ma$). Suponemos el sentido positivo hacia la derecha.

$$1^a \text{ fase: } -fr_A = m_A a_A \Rightarrow \boxed{a_A = -(fr_A / m_A) = -(1.2 / 2) = -0.6 \text{ m/s}^2} \Rightarrow \boxed{v_A = 1 - 0.6 t}$$

$$fr'_A - fr_B = m_B a_B \Rightarrow \boxed{a_B = (fr'_A - fr_B) / m_B = (1.2 - 0.6) / 4 = 0.15 \text{ m/s}^2} \Rightarrow \boxed{v_B = 0.15 t}$$

$$2^a \text{ fase: } -fr_B = (m_B + m_A) a_{AB} \Rightarrow \boxed{a_{AB} = -0.6 / (4+2) = -0.1 \text{ m/s}^2} \Rightarrow \boxed{v_{AB} = v_{ABinicial} - 0.1 t}$$

d) Para calcular el tiempo que tarda en alcanzarse la segunda fase, tenemos que igualar la velocidades:

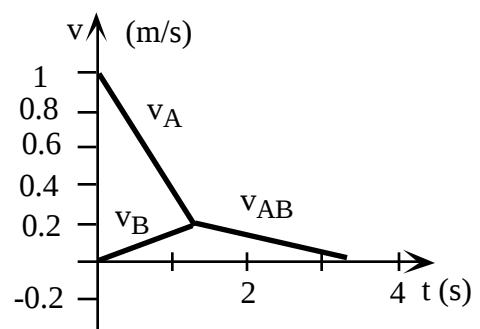
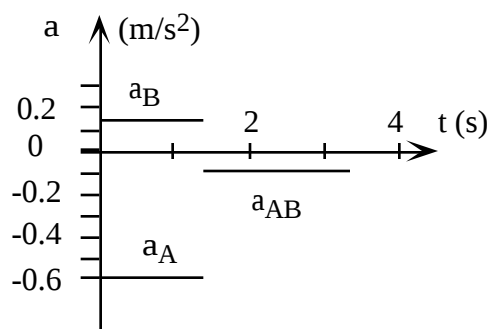
$$v_A = v_B \Rightarrow 1 - 0.6 t = 0.15 t \Rightarrow 1 = 0.75 t \Rightarrow \boxed{t = 1.3333 \text{ s}} \Rightarrow \text{para dicho tiempo, la velocidad de ambos bloques es}$$

$$\boxed{v_A = v_B = v_{ABinicial} = 0.2 \text{ m/s}}$$

Para calcular el tiempo de duración de la segunda fase utilizamos la ecuación $v_f = v_i + at$

Sabemos que la segunda fase termina cuando los cuerpos se paran ($v_f = 0$) por lo que dando valores a la ecuación anterior: $0 = 0.2 - 0.1 t \Rightarrow \boxed{t = 2 \text{ s}}$

Las gráficas son:



e) El desplazamiento absoluto del cuerpo A durante la primera fase será

$$x_{A1} = v_{Ai}t - 0.5at^2 \Rightarrow \boxed{x_{A1} = 1*1.333 - 0.5*0.6*(1.333)^2 = 0.8 \text{ m}}$$

y el del cuerpo B:

$$x_{B1} = v_{Bi}t - 0.5at^2 \Rightarrow \boxed{x_{B1} = 0*1.333 + 0.5*0.13*(1.333)^2 = 0.1333 \text{ m}}$$

y el desplazamiento relativo de A sobre B = $\boxed{x_{A1} - x_{B1} = 0.8 - 0.133 = 0.666 \text{ m}}$

Durante la segunda fase, el desplazamiento es

$$x_{AB2} = v_{ABi}t - 0.5at^2 \Rightarrow \boxed{x_{AB2} = 0.2*2 - 0.5*0.1*(2)^2 = 0.2 \text{ m}}$$

El desplazamiento total del cuerpo B es $\boxed{x_{B1} + x_{AB2} = 0.1333 + 0.2 = 0.3333 \text{ m}}$

f) Si los coeficientes de rozamiento están invertidos,

Cuerpo A : $\boxed{f_{rA} = \mu_{AB}N_A = \mu_{AB}m_Ag = 0.01*2*10 = 0.2 \text{ N}}$

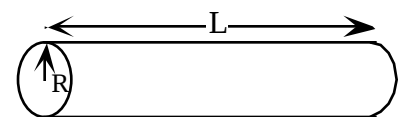
Mientras que la fuerza de rozamiento máxima en el cuerpo B es:

$$\boxed{f_{rB} = \mu_{Bsuelo}N_B = \mu_{Bsuelo}(m_Ag + m_Bg) = 0.06*(2 + 4)*10 = 3.6 \text{ N}}$$

Al ser esta fuerza mayor que la que ejerce el cuerpo A, el cuerpo B no se mueve : $\boxed{v_B = a_B = 0}$

En el cuerpo A, : $-f_{rA} = m_A a_A \Rightarrow \boxed{a_A = -(f_{rA} / m_A) = -(0.2 / 2) = -0.1 \text{ m/s}^2} \Rightarrow \boxed{v_A = 1 - 0.1 t}$

2) Dado el cilindro de la figura, y sabiendo que su densidad depende con la distancia radial al eje de simetría de la forma $\rho = cr$ donde c es una constante,
a) determinar su momento de inercia con respecto a dicho eje en función de la masa y dimensiones de la pieza.



Dicho cilindro está sujeto por un cable y se encuentra situado sobre un plano inclinado un ángulo θ tal como muestra la figura.

b) Determinar el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático para que el cilindro no deslice. ¿Cuánto vale la tensión en la cuerda?

Suponiendo que el cable se rompa:

c) ¿Cuál debe de ser el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático para que el cilindro no deslice en su recorrido?

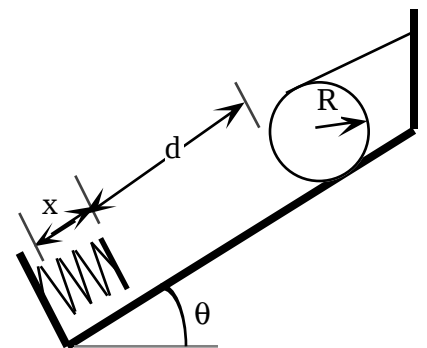
d) ¿Cuál será su aceleración?

e) ¿Cuál será la velocidad que alcance el cilindro al recorrer la distancia d ?

f) Calcular la masa del cilindro y determinar los valores numéricos de las

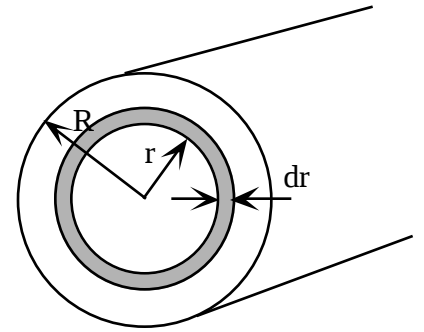
magnitudes que aparecen en los apartados anteriores para $L = 20 \text{ cm}$, $c = 10^5 \text{ kg/m}^4$, $R = 5 \text{ cm}$, $\theta = 30^\circ$, $\mu = 0.3$ y $d = 50 \text{ cm}$.

g) Si la constante del muelle es $K = 100 \text{ N/m}$, determinar su desplazamiento x hasta la posición de máxima compresión del mismo. (Suponer que entre el cilindro y el muelle no hay rozamiento)



SOLUCION

a) Teniendo en cuenta la densidad varia en función de la distancia al eje, para calcular el momento de inercia tomamos cilindros de radio r y grosor dr , cuya masa vale. $dm = \rho dV = cr * L 2\pi r dr = 2\pi Lcr^2 dr$



La masa total del cilindro será

$$\boxed{m} = \int dm = \int_0^R 2\pi Lcr^2 dr = 2\pi Lc \int_0^R r^2 dr = 2\pi Lc \left[r^3/3 \right]_0^R = \boxed{\frac{2}{3}\pi LcR^3} \quad (2.1)$$

y el momento de inercia:

$$I = \int dI = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 2\pi Lcr^2 dr = 2\pi Lc \int_0^R r^4 dr = 2\pi Lc \left[r^5/5 \right]_0^R = \frac{2}{5}\pi LcR^5 \quad (2.2)$$

Y si lo escribimos en función de la masa:

$$\boxed{I} = \frac{2}{5}\pi LcR^5 = \frac{2}{5}\pi LcR^5 \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{3}{5} \left(\frac{2}{3}\pi LcR^3 \right) R^2 = \boxed{\frac{3}{5} m R^2} \quad (2.3)$$

b) Las fuerzas que actúan sobre el cilindro son las representadas en la figura. Aplicando las condiciones de la estática:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg \cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg \cos\theta$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow T \cdot 2R - mg \sin\theta \cdot R = 0 \Rightarrow \boxed{T = mg \sin\theta / 2} \quad (2.4)$$

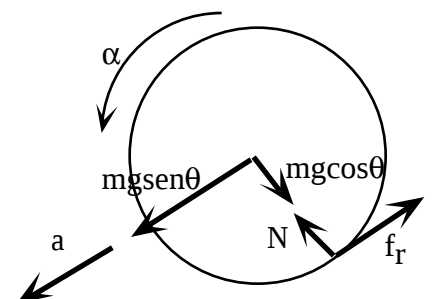
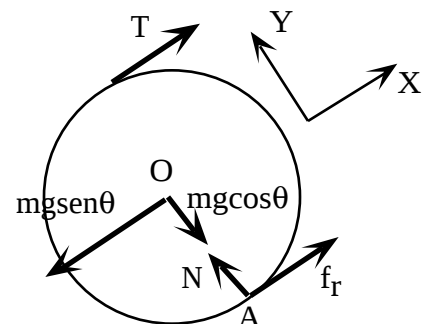
$$\sum M_O = 0 \Rightarrow T \cdot R - f_r \cdot R = 0 \Rightarrow f_r = T = mg \sin\theta / 2$$

Además sabemos que la fuerza de rozamiento siempre tiene que ser menor o igual que la fuerza de rozamiento máxima:

$$f_r \leq f_{r_{\max}} \Rightarrow mg \sin\theta / 2 \leq \mu N = \mu mg \cos\theta \Rightarrow \mu \geq (\sin\theta / 2) \cdot (1 / \cos\theta) \Rightarrow \boxed{\mu \geq \tan\theta / 2} \quad (2.5)$$

c) Al cortar la cuerda, actúan las mismas fuerzas que en caso anterior excepto T , y lógicamente el valor de N y de f_r cambia.

$$\text{Traslación: } mg \sin\theta - f_r = ma \Rightarrow a = g \sin\theta - f_r/m \quad (2.6)$$



Rotación: $fr R = I\alpha = I (a/R) = (3/5)mR^2 (a/R) \Rightarrow a = 5fr / 3m$ (2.7)

Igualando la a de las dos ecuaciones: $g \sin\alpha - fr/m = 5fr / 3m \Rightarrow$

$$g \sin\theta = fr/m + 5fr / 3m = 8fr / 3m \Rightarrow fr = (3/8) mg \sin\theta$$
 (2.8)

De nuevo la fr siempre tiene que ser menor o igual que la fr máxima:

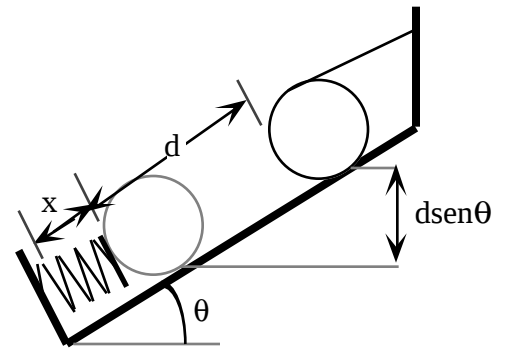
$$fr \leq fr_{\max} \Rightarrow (3/8) mg \sin\theta \leq \mu N = \mu mg \cos\theta \Rightarrow \mu \geq (3 \sin\theta / 8) * (1 / \cos\theta) \Rightarrow \boxed{\mu \geq (3/8) \tan\theta}$$
 (2.9)

d) para determinar la a, introducimos el valor de fr (2.8) en la ecuación (2.7):

$$a = 5fr / 3m = 5 (3/8) mg \sin\theta / 3m = \boxed{(5/8) g \sin\theta}$$
 (2.10)

e) El cálculo de la velocidad se puede realizar de dos formas: bien utilizando las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado con la aceleración obtenida en la ec. (2.8) o bien por energías. Nosotros utilizaremos este segundo procedimiento.

Al no haber deslizamiento, la fr no realiza ningún trabajo, y por lo tanto no hay pérdida de energía. La energía potencial gravitatoria se transforma en energía cinética de traslación + energía de rotación.



Considerando $h = 0$ en la posición en la que el cilindro toca al muelle, la posición inicial está a una altura $d \sin\theta$.

Como el cilindro parte con $v = 0$, la ecuación de conservación de la energía es:

$$mg d \sin\theta = (1/2)mv^2 + (1/2)I\omega^2 = (1/2)mv^2 + (1/2) (3/5)mR^2 (v/R)^2 = [(1/2) + (3/10)] mv^2 \Rightarrow$$

$$mg d \sin\theta = (4/5) mv^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{5}{4} g d \sin\theta}}$$
 (2.11)

f) Para calcular la masa y el resto de las variables solo tenemos que dar valores a las ecuaciones que hemos deducido anteriormente:

Ecu. (2.1) $m = (2/3) \pi L c R^3 = (2/3) * \pi * 0.2 * 10^5 * 0.05^3 = 5.236 \text{ kg}$

Ecu. (2.3) $I = (3/5) m R^2 = (3/5) * 5.236 * 0.05^2 = 7.85 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$

Ecu. (2.4) $T = mg \sin\theta / 2 = 5.236 * 9.81 * 0.5 / 2 = 12.84 \text{ N}$

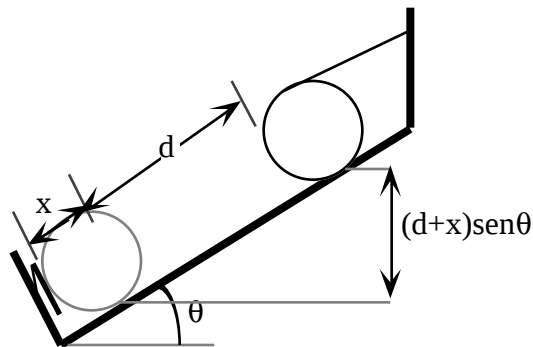
Ecu. (2.5) $\mu \geq \tan\theta / 2 = \tan 30 / 2 = 0.289$

Ecu (2.9) $\mu \geq (3/8) \tan\theta = (3/8) * \tan 30 = 0.217$

Ecu. (2.10) $a = (5/8) g \sin\theta = (5/8) * 9.81 * 0.5 = 3.07 \text{ m/s}^2$

Ecu. (2.11) $v = [(5/4) g d \sin\theta]^{1/2} = [(5/4) * 9.81 * 0.5 * 0.5]^{1/2} = 1.75 \text{ m/s}$

g) Para determinar la máxima compresión del muelle (x), aplicamos de nuevo el principio de conservación de la energía. En el estado de máxima compresión, la velocidad del cilindro es 0, por lo que toda la energía potencial gravitatoria se transforma en energía potencial elástica. Si consideramos $h = 0$ la posición del cilindro en el estado de máxima compresión del muelle, la altura de la posición inicial es $(d+x)\sin\theta$, y la ecuación de conservación de la energía se escribe:



$$mg(d+x)\sin\theta = (1/2)Kx^2 \Rightarrow (1/2)Kx^2 - mg\sin\theta x - mgd\sin\theta = 0$$

que es una ecuación de segundo grado.

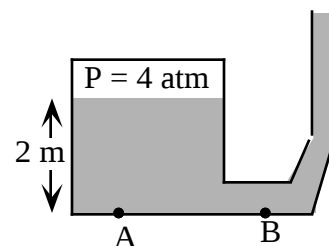
$$\text{Dando valores } (1/2)*100*x^2 - 5.23*9.81*0.5*x - 5.23*9.81*0.5*0.5 = 0$$

$$\text{Simplificando los términos } 50x^2 - 25.65x - 12.827 = 0$$

La ecuación tiene dos soluciones matemáticas $x = 0.824$ y $x = -0.311$. La solución física es la primera ($x = 0.824$) ya que la segunda corresponde a un estiramiento del muelle en lugar de una compresión, que verifica la ecuación, pero que no tiene sentido físico.

3) Un edificio es alimentado por depósito de agua como muestra la figura. El depósito se mantiene lleno de agua una altura de 2 m, y un compresor se encarga de que la presión en la parte superior del mismo sea de 4 Atmósferas.

a) ¿Cuál es la presión la parte inferior del depósito (pto. A) en Atmósferas y en Pascales.



La tubería que sale por la parte inferior del depósito es circular de radio 1.5 cm, mientras que un grifo situado en una vivienda a 20 m de altura respecto al fondo del depósito tiene un diámetro de 1cm. Cuando abrimos completamente el grifo:

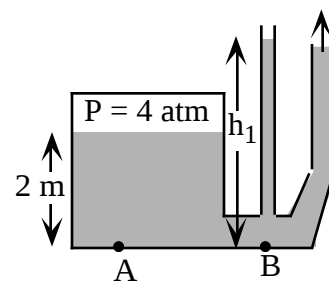
b) ¿Cuál es la velocidad de salida del agua?

c) ¿Cuánto tiempo se tardaría en llenar un cubo de 10 litros?

d) ¿Cuál es la presión en el punto B.

Si colocamos un tubo recto abierto en su parte superior encima del pto B, tal como muestra la figura,

e) ¿hasta que altura h_1 subiría el agua por el mismo? Calcularlo cuando el grifo está abierto y cuando está cerrado.



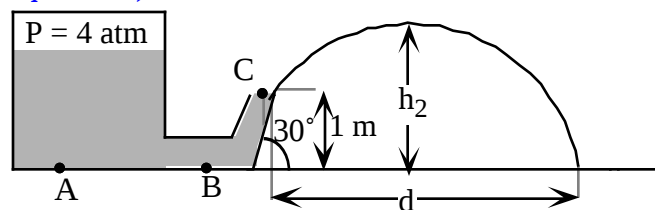
Si se rompe la tubería en el punto C (suponer el mismo radio que en B)

f) ¿Cuál es la altura h_2 alcanzada por el agua?

g) ¿A que distancia d del punto de rotura llegará el agua al suelo?

h) ¿Cuál es la fuerza de rozamiento que tiene que ejercer el suelo sobre el depósito para evitar que este deslice.

i) Podrías decir (sin necesidad de hacer ningún cálculo si has resuelto convenientemente alguno de los apartados anteriores) cual es la máxima altura a la que este sistema puede suministrar agua.

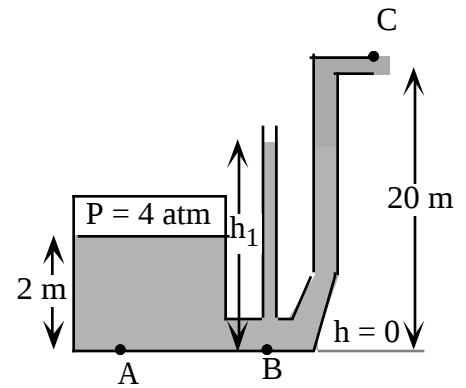


SOLUCION

a) Utilizando la ecuación fundamental de la hidrostática la presión en el punto A (P_A) es igual la presión en la superficie libre del agua P + la densidad por la gravedad por la profundidad del punto A:

$$\boxed{P_A = P + \rho gh = 4 \cdot 1.013 \cdot 10^5 + 10^3 \cdot 9.81 \cdot 2 = 4.25 \cdot 10^5 \text{ Pascales}}$$

Para pasar a atmósferas, dividimos por $1.013 \cdot 10^5 \Rightarrow \boxed{P_A = 4.194 \text{ atm}}$



b) Para calcular la velocidad de salida en el punto C, tenemos que aplicar la ecuación de Bernoulli ($P + \rho gh + (1/2) \rho v^2 = \text{cte}$) entre los puntos A y C. Tenemos que recordar que suponemos que la sección del depósito mucho mayor en A que en C, por lo que $v_A = 0$, y que en el punto donde el agua sale al exterior (C) la presión es la presión atmosférica (P_{atm})

$$P_A + \rho gh_A + (1/2) \rho v_A^2 = P_C + \rho gh_C + (1/2) \rho v_C^2 \Rightarrow$$

$$4.25 \cdot 10^5 + 0 + 0 = 1.013 \cdot 10^5 + 1000 \cdot 9.81 \cdot 20 + (1/2) \cdot 1000 \cdot v_C^2 \Rightarrow \boxed{v_C = 15.97 \text{ m/s}}$$

c) El gasto es el producto de la sección por la velocidad:

$$G = S v = \pi r^2 v = \pi \cdot (0.005)^2 \cdot 15.97 = 0.001254 \text{ m}^3/\text{s}$$

Y el volumen igual al producto del gasto por el tiempo $V = Gt$.

$$\text{Teniendo en cuenta que } 1 \text{ litro} = 10^{-3} \text{ m}^3 \Rightarrow 10 \cdot 10^{-3} = 0.001253 \cdot t \Rightarrow \boxed{t = 7.97 \text{ s}}$$

d) Para determinar la presión en el punto B, tenemos que aplicar Bernoulli entre B y A o B y C. En cualquier caso tenemos que conocer la velocidad en el punto B para lo cual hay que aplicar la ecuación de continuidad entre B y C:

$$S_B v_B = S_C v_C \Rightarrow v_B = (S_C / S_B) v_C = (\pi \cdot (0.005)^2 / \pi \cdot (0.015)^2) \cdot 15.97 = 15.975 / 9 \Rightarrow v_B = 1.774 \text{ m/s}$$

Aplicando Bernoulli entre A y B:

$$P_A + \rho gh_A + (1/2) \rho v_A^2 = P_B + \rho gh_B + (1/2) \rho v_B^2 \Rightarrow$$

$$4.25 \cdot 10^5 + 0 + 0 = P_B + 0 + (1/2) \cdot 1000 \cdot (1.774)^2 \Rightarrow \boxed{P_B = 4.23 \cdot 10^5 \text{ Pascales}}$$

e) En este tubo vertical el agua no se mueve, por lo que se puede aplicar la ecuación fundamental de la hidrostática, es decir la presión en B será la presión en la parte superior del tubo (P_{atm}) mas la debida a la columna de agua de altura h_1 : $P_B = P_{\text{atm}} + \rho gh_1 \Rightarrow h_1 = (P_B - P_{\text{atm}}) / \rho g$

Si el grifo está abierto, P_B es la calculada en el apartado anterior $\Rightarrow$

$$\overline{h_1} = (4.23 \cdot 10^5 - 1.013 \cdot 10^5) / (1000 \cdot 9.81) = \overline{32.79 \text{ m}}$$

Si el grifo está cerrado, v_B vale 0 y como B está a la misma altura que A, la presión en B es la misma que hay en A ($P_B = P_A$) $\Rightarrow$

$$\overline{h_1} = (4.25 \cdot 10^5 - 1.013 \cdot 10^5) / (1000 \cdot 9.81) = \overline{32.99 \text{ m}}$$

f) El primer paso es calcular la velocidad de salida del agua. Es un error suponer que la velocidad es la que llevaba el agua cuando el grifo estaba abierto, ya que las condiciones de la cañería han cambiado; en el primer caso el agua salía al exterior (P_{atm}) a una altura de 20 m, mientras que ahora lo hace a solo 1 m. Aplicando de nuevo Bernoulli entre el punto A y el punto de salida del agua:

$$P_A + \rho g h_A + (1/2) \rho v_A^2 = P + \rho g h + (1/2) \rho v^2 \Rightarrow$$

$$4.25 \cdot 10^5 + 0 + 0 = 1.013 \cdot 10^5 + 1000 \cdot 9.81 \cdot 1 + (1/2) \cdot 1000 \cdot v^2 \Rightarrow v = 25.06 \text{ m/s } (=v_0)$$

El agua sale con la misma inclinación respecto a la horizontal que la tubería (30°).

Al ser un movimiento uniformemente acelerado : $v_y = v_{0y} - gt$. El tiempo t_1 que tarda en alcanzar la máxima altura es aquel para el cual la velocidad vertical v_y es 0 $\Rightarrow$

$$0 = v_{0y} - g t_1 \Rightarrow t_1 = v_{0y} / g = v_0 \sin 30 / g = 25.06 \cdot 0.5 / 9.81 = 1.277 \text{ s}$$

y teniendo en cuenta la ecuación del movimiento uniformemente acelerado $y = y_0 + v_{0y} t - (1/2)gt^2$ particularizando para t_1 , obtenemos la máxima altura h_2 :

$$\Rightarrow \overline{h_2} = 1 + 25.06 \cdot 0.5 \cdot 1.277 - 0.5 \cdot 9.81 \cdot 1.277^2 = \overline{9 \text{ m}}$$

g) Para determinar el espacio horizontal recorrido por el agua, debemos saber el tiempo que esta en movimiento. Ya sabemos el tiempo que tarda en alcanzar la máxima altura t_1 , ahora podemos calcular el tiempo que tarda en llegar al suelo desde dicha altura t_2 . Partiendo de nuevo la ecuación

$$y = y_0 + v_{0y} t - (1/2)gt^2 \Rightarrow 0 = 9 + 0 - 0.5 \cdot 9.81 \cdot t_2^2 \Rightarrow t_2 = 1.355 \text{ s}$$

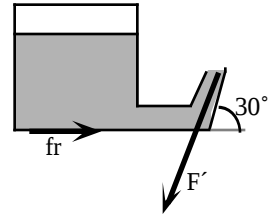
El tiempo que el agua esta viajando hasta llegar al suelo es $t_1 + t_2 = 1.277 + 1.355 = 2.632 \text{ s}$

Por lo que el espacio horizontal $\overline{d} = v_{0x} t = v_0 \cos 30 t = 25.06 \cdot \cos 30 \cdot 2.632 = \overline{57.1 \text{ m}}$

h) En el depósito, el agua está en reposo, mientras que al salir lleva una cierta velocidad. Esto significa que el deposito ejerce una cierta fuerza F sobre el agua para modificar su momento lineal, y por lo tanto el agua

ejerce la misma fuerza pero en sentido contrario $\mathbf{F}'$ sobre el deposito. Si el deposito no desliza sobre el suelo es porque este realiza una fuerza de rozamiento que compensa la componente horizontal del empuje del agua.

La fuerza ejercida sobre el agua es



$$\mathbf{F} = d\mathbf{P} / dt = dm \mathbf{v} / dt = \rho dV \mathbf{v} / dt = \rho S dl \mathbf{v} / dt = \rho S \mathbf{v} (dl / dt) = \rho S \mathbf{v} v \Rightarrow |\mathbf{F}| = \rho S v^2$$

Dando valores $|\mathbf{F}| = 1000 * \pi * (0.015)^2 * (25.06)^2 = 443.9 \text{ N}$

Por lo que $\boxed{f_r = |\mathbf{F}'| \cos 30 = |\mathbf{F}| \cos 30 = 443.9 * \cos 30 = 384.4 \text{ N}}$

i) A medida que colocamos el grifo mas alto, la velocidad de salida va disminuyendo. La máxima altura a la que el sistema puede subir el agua, es aquella en la que la velocidad de salida es 0, lo que corresponde a la máxima altura que alcanza el agua en el tubo vertical en estado estacionario, o lo que es lo mismo cuando el grifo esta cerrado. Es decir, la máxima altura es la h_1 calculada en el apartado e) cuando el grifo esta cerrado

$$\boxed{\text{Máxima altura} = 32.99 \text{ m}}$$