EXAMEN DE FISICA I (I.I. e I.Q.) 8-9-2000

CUESTIONES

1) Una esfera de masa m_1 choca centralmente contra otra de masa m_2. Después del choque m_1 queda en reposo ¿Cuál es la relación entre las masas si el coeficiente de restitución es e? La masa m_2 esta inicialmente en reposo.

SOLUCION

Aplicando la definición de coeficiente de restitución: $e = -\dfrac{v'_2 - v'_1}{v_2 - v_1}$

y teniendo en cuenta que nos dicen que $v_2 = 0$ **y** $v'_1 = 0$**, la ecuación se reduce a**

$$e = -\frac{v'_2}{-v_1} = \frac{v'_2}{v_1} \qquad v'_2 = e\,v_1 \qquad \textbf{(1.1)}$$

Además en la colisión se tiene que conservar el momento lineal:

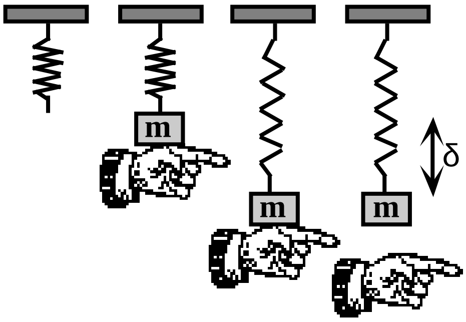
$$m_1 v_1 = m_2 v'_2 \qquad \textbf{(1.2)}$$

Sustituyendo el valor de v'_2 **de (1.1) en (1.2) :**

$$m_1 v_1 = m_2 e v_1 \qquad m_1 = e m_2 \qquad \boxed{\frac{m_1}{m_2} = e}$$

---

2) Un estudiante de física cuelga un cuerpo de un muelle y lo suelta poco a poco, sujetándolo con la mano, de forma que se alcanza un equilibrio final entre la fuerza del muelle y el peso del cuerpo con un alargamiento δ del muelle. Según sus conocimientos de física en este caso se debe de cumplir que:



$\mathbf{F}_{elástica} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}$ ➔ $K\,\delta - mg = 0$
➔ $\delta = mg / K$

Sin embargo utilizando el método de las energías y tomando el origen de energía potencial gravitatoria nulo en la posición final del cuerpo:

$mg\delta = (1/2)\,K\delta^2$ ➔ $\delta = 2mg / K$

¿Cuál de los dos razonamientos es el correcto y dónde está el fallo en el razonamiento incorrecto?

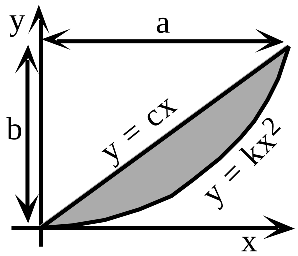
SOLUCION

El razonamiento correcto es el primero, ya que las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en el estado final son nulas y como la velocidad es cero, por la 1ª ley de Newton el cuerpo permanece en reposo.

El segundo razonamiento no es aplicable en este caso ya que no considera el trabajo realizado por la mano para que la masa descienda lentamente.
El desplazamiento calculado en este razonamiento, $\delta = 2mg / K$, que como hemos dicho anteriormente no considera el trabajo de la mano, corresponde al que desplazamiento máximo que tendría el cuerpo si lo soltamos libremente desde la posición inicial, y no se corresponde con una posición de equilibrio, ya que para $\delta = 2mg / K$ la fuerza del muelle es mayor que el peso y la masa volvería a subir.

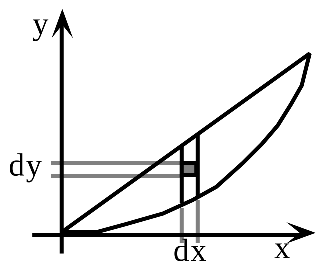
---

3) Determinar el centro de gravedad de las placa de la figura.



SOLUCION

Recordando la definición de centro de masas de una superficie homogénea $x_{CM} = \dfrac{\int x\, da}{\int da}$ y teniendo en cuenta que $da = dx\, dy$, donde este diferencial de área se integra en el área sombreada delimitada por una recta y una parábola de coeficientes c = b/a y k = b/a respectivamente, llegamos a la ecuación de partida:



$$\boxed{x_{CM}} = \frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_0^a x\,dx \int_{kx^2}^{cx} dy}{\int_0^a dx \int_{kx^2}^{cx} dy} = \frac{\int_0^a x\,dx \left[y\right]_{kx^2}^{cx}}{\int_0^a dx \left[y\right]_{kx^2}^{cx}} = \frac{\int_0^a x\,dx\,(cx - kx^2)}{\int_0^a dx(cx - kx^2)} =$$

donde primero hemos integrado dy entre la parábola (kx^2) y la recta (cx) y posteriormente integraremos la variable x entre o y a.

$$= \frac{\int_0^a (cx^2 - kx^3)\,dx}{\int_0^a (cx - kx^2)\,dx} = \frac{\left[c\frac{x^3}{3}\right]_0^a - \left[k\frac{x^4}{4}\right]_0^a}{\left[c\frac{x^2}{2}\right]_0^a - \left[k\frac{x^3}{3}\right]_0^a} = \frac{c\frac{a^3}{3} - k\frac{a^4}{4}}{c\frac{a^2}{2} - k\frac{a^3}{3}} = \frac{\frac{b}{a}\frac{a^3}{3} - \frac{b}{a^2}\frac{a^4}{4}}{\frac{b}{a}\frac{a^2}{2} - \frac{b}{a^2}\frac{a^3}{3}} =$$

$$= \frac{ba^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)}{ba\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{12}ba^2}{\frac{1}{6}ba} = \boxed{\frac{1}{2}a}$$

Procediendo de forma análoga para la coordenada y:

$$\boxed{y_{CM}} = \frac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\int_0^a dx \int_{kx^2}^{cx} y\,dy}{\int_0^a dx \int_{kx^2}^{cx} dy} = \frac{\int_0^a dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_{kx^2}^{cx}}{\int_0^a dx\,[y]_{kx^2}^{cx}} = \frac{\int_0^a dx\,\frac{(c^2x^2 - k^2x^4)}{2}}{\int_0^a dx(cx - kx^2)} =$$

$$= \frac{\left[\frac{c^2}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^a - \left[\frac{k^2}{2}\frac{x^5}{5}\right]_0^a}{\left[c\frac{x^2}{2}\right]_0^a - \left[k\frac{x^3}{3}\right]_0^a} = \frac{\frac{c^2}{2}\frac{a^3}{3} - \frac{k^2}{2}\frac{a^5}{5}}{c\frac{a^2}{2} - k\frac{a^3}{3}} = \frac{\frac{b^2}{2\cancel{a^2}}\frac{a^3}{3} - \frac{b^2}{2\cancel{a^4}}\frac{a^5}{5}}{\frac{b}{a}\frac{a^2}{2} - \frac{b}{a^2}\frac{a^3}{3}} =$$

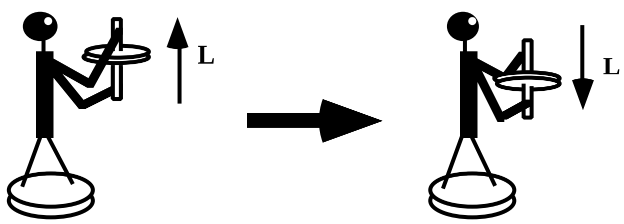
$$= \frac{b^2a\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right)}{ba\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{2}{30}b^2a}{\frac{1}{6}ba} = \frac{6}{15}b = \boxed{0.4\,b}$$

---

4) Define el momento angular y explica el teorema de conservación del mismo. Aplica dicho teorema para

a) Estudiar el caso de una partícula sometida a fuerzas centrales

b) Estudiar lo que le sucede a la persona de la fig. cuando gira bruscamente 180˚ el eje de la rueda que sostiene entre sus manos. Suponer que se encuentra en reposo sobre una placa giratoria

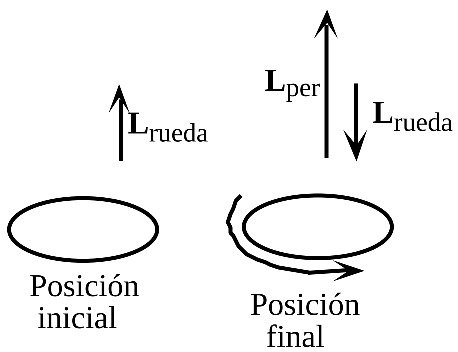


SOLUCION

El momento angular de una partícula se define como $\mathbf{L} = \mathbf{r} \quad m\mathbf{v}$. Al derivar se obtiene que la derivada del mismo es igual al momento de las fuerzas que actúan sobre la partícula: $d\mathbf{L} / dt = \mathbf{M}$ por lo que si el momento de las fuerzas es nulo, el momento angular se conserva.

En el caso de fuerzas centrales, la fuerza lleva la misma dirección que el vector posición: $\mathbf{F} \| \mathbf{r}$ y por lo tanto el momento es cero $\mathbf{M} = 0 \quad d\mathbf{L} / dt = 0 \quad \mathbf{L}$ es constante.

El segundo apartado, se trataría mas de un sistema de partículas. En todo caso, al no actuar ninguna fuerza externa, $\mathbf{M} = 0$ y el momento angular total también se conserva. Eso significa que al girar la rueda e invertir el sentido de $\mathbf{L}$, para que el momento angular total se conserve, la persona tiene que comenzar a girar adquiriendo un momento angular $\mathbf{L}_{persona} = 2\mathbf{L}_i$ dirigido hacia arriba, de forma que en la posición final, el momento angular



$\mathbf{L}_{persona} + \mathbf{L}_{rueda} = 2\mathbf{L}_i + (-\mathbf{L}_i) = \mathbf{L}_i$

sea igual al momento de la posición inicial. La persona gira en sentido antihorario.

Nota: Siguiendo el enunciado, hemos supuesto que en la posición inicial $\mathbf{L}_{rueda} = \mathbf{L}_i$ mientras que en la posición final $\mathbf{L}_{rueda} = -\mathbf{L}_i$.