PROBLEMAS

---

1) Una lancha de masa m navega en un lago con velocidad v_0. En el instante $t = 0$ se desconecta el motor. Suponiendo que la fuerza de resistencia del agua al movimiento de la lancha es proporcional a la velocidad $F_r = kv$. Determinar:

a) La velocidad en función del tiempo

b) Su velocidad en función de la distancia recorrida, así como la distancia recorrida hasta su parada

c) La velocidad media de la lancha en el transcurso de tiempo en el que la velocidad disminuye desde v_0 hasta $v_0/2$.

Si viajamos en una lancha cuyo peso total, incluidos pasajeros, es de 400 kg a una velocidad $v_0 = 10$ m/s y comprobamos que para llegar al embarcadero con velocidad cero, tenemos que apagar el motor 20 m antes.

d) ¿cuanto vale k?. Utiliza las ecuaciones obtenidas en los apartados anteriores

---

SOLUCION

a) Al desconectar el motor la única fuerza que actúa es la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento: $\mathbf{f}_r = -k\mathbf{v}$. Aplicando la 2ª ley de Newton $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ y teniendo en cuenta que el movimiento se reduce a una dimensión

$$\sum F = ma \qquad -kv = m\,(dv/dt) \qquad -(k/m)\,dt = dv/v$$

Invirtiendo la igualdad e integrando aparece una constante de integración c1

$$\text{Ln } v = -\,(k/m)\,t + c$$

Imponiendo que para $t = 0$ $v = v_0$: $\text{Ln } v_0 = -\,(k/m)\,0 + c1$ $\qquad c1 = \text{Ln } v_0$

Sustituyendo este valor de c1

$$\text{Ln } v = -\,(k/m)\,t + \text{Ln } v_0 \qquad \text{Ln } v - \text{Ln } v_0 = -\,(k/m)\,t \qquad \text{Ln } (v/v_0) = -\,(k/m)\,t$$

$$v/v_0 = e^{-\,(k/m)\,t} \qquad \boxed{v = v_0\, e^{-\,(k/m)\,t}} \qquad (1.1)$$

b) Para encontrar la relación entre la velocidad y la distancia, partimos de nuevo de la 2ª ley de Newton, pero expresando la aceleración en función de dx:

$$\sum F = ma \qquad -kv = m\,(dv/dt) \qquad -kv = m\,(dv/dx)\,(dx/dt) \qquad -kv = m\,(dv/dx)\,v$$

$$-(k/m)\,dx = dv$$

Invirtiendo la igualdad e integrando aparece una constante de integración c2:

$$v = -(k/m)x + c2$$

Imponiendo que para $x = 0$ $v = v_0$: $\quad v_0 = -(k/m)0 + c2 \qquad c2 = v_0$

Sustituyendo este valor de c2

$$v = -(k/m)x + v_0 \qquad \boxed{v = v_0 - (k/m)x} \qquad (1.2)$$

cuando la barca se detiene, la velocidad final vale cero, por lo que sustituyendo este valor en v encontramos el espacio recorrido (x_{max}):

$$0 = v_0 - (k/m)\, x_{max} \qquad \boxed{x_{max} = v_0 m/k} \qquad (1.3)$$

c) Primero determinamos el tiempo T que tarda en pasar de v_0 a $(v_0/2)$ y el espacio X recorrido durante dicho intervalo.

Partiendo de la ecuación 1.1:

$$(v_0/2) = v_0\, e^{-(k/m)T} \qquad \text{Ln}\,(1/2) = -(k/m)T \qquad \boxed{T = -(m/k)\,\text{Ln}\,(1/2) = (m/k)\,\text{Ln}\,2}$$

Partiendo de la ecuación 1.2:

$$(v_0/2) = v_0 - (k/m)X \qquad (k/m)X = v_0/2 \qquad \boxed{X = m\, v_0 / 2k}$$

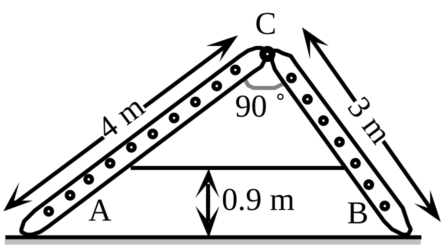
La velocidad media será el espacio dividido por el tiempo que tarda en recorrer dicho espacio:

$$\boxed{V_m} = \frac{X}{T} = \frac{m\, \cancel{V_0/2k}}{(\cancel{m/k})\,\text{Ln}\,2} = \frac{V_0}{2\text{Ln}2} = \boxed{0.7213 V_0}$$

d) Utilizando la ecuación 1.3 y despejando el valor de K:

$$\boxed{k = v_0\, m / x_{max} = 10 \cdot 400 / 20 = 200\ \text{N/(m/s)} = 200\ \text{kg/s}}$$

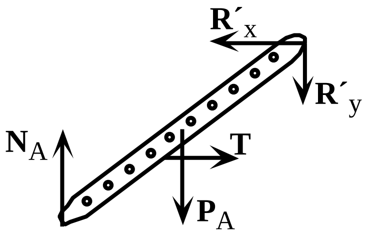
2) Dos escaleras de 4 m y 3 m de largo, tienen un gozne en al punto C y están atadas por una cuerda horizontal a 0.9 m por encima del suelo. Las escaleras pesan 600 N y 450 N respectivamente, y el centro de gravedad de cada una está en su centro. Suponga que el piso no tiene fricción.

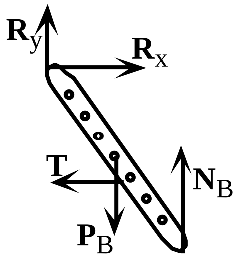


a) Representar de forma independiente las fuerzas que actúan sobre la escalera izquierda y la derecha.
b) Calcular la fuerza ejercida por el suelo sobre la base de cada escalera.
c) Determinar la tensión en la cuerda.
d) Calcular la fuerza que una escalera ejerce sobre la otra en A.
e) Si un pintor de 800 N se para en C, calcule la tensión en la cuerda.
f) Si la cuerda solo puede soportar 1000 N, explica como tendríamos que desplazar la cuerda para que el pintor pueda subirse hasta C sin romperse esta.

SOLUCION

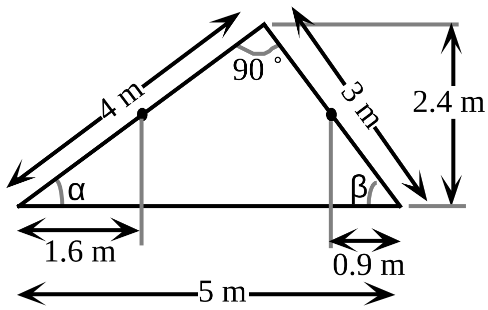
a) Las fuerzas que actúan sobre la escalera B son la reacción en el suelo $\mathbf{N}_B$, la tensión **T**, el peso $\mathbf{P}_B$ y la fuerza que ejerce la escalera A en el punto C, que en un principio tiene dos componentes, una horizontal $\mathbf{R}_x$ y otra vertical $\mathbf{R}_y$.





Sobre la escalera A, el esquema de fuerzas es similar, si bien, en lugar de $\mathbf{R}_x$ y $\mathbf{R}_y$ actúan sus reacciones $\mathbf{R}'_x$ y $\mathbf{R}'_y$.

b) Comenzaremos determinando los ángulos y distancias desconocidas que nos facilitan la resolución del problema.



Por Pitagoras, la base mide $(4^2 + 3^2)^{1/2} = 5$ m

Por el teorema del seno:

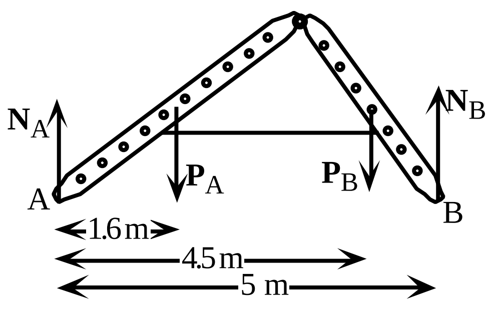
$3/\text{sen}\,\alpha = 4/\text{sen}\,\beta = 5/\text{sen}\,90$

$\alpha = 36.87^\circ$ y $\beta = 53.13^\circ$

El centro de masas de la escalera A esta a una distancia del punto de apoyo: 2cos(36.87) = 1.6 m, mientras que el de escalera B se encuentra a 1.5 cos(53.13) = 0.9 m.

Por otra parte, la proyección vertical del punto C sobre la base, se encuentra a una distancia de 3.2 m y 1.8m de ambos puntos de apoyo.

Finalmente, el punto C se encuentra a una altura de 2.4 m sobre el suelo.



b) Considerando la escalera como un todo (sin dividir en la parte A y B) las únicas fuerzas externas que actúan sobre ella son el peso y la normal (ver figura).

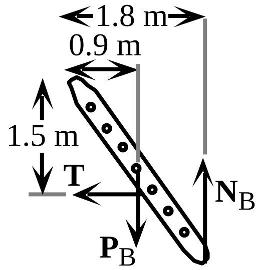
La suma de los momentos respecto al punto A tiene que ser cero:

$P_A \cdot 1.6 + P_B \cdot 4.1 = N_B \cdot 5$ $\boxed{N_B = (600 \cdot 1.6 + 450 \cdot 4.1)/5 = 561 \text{ N}}$

Teniendo en cuenta que la suma de las fuerzas verticales también tiene que ser cero:

$\sum F_y = 0$ $N_A + N_B - P_A - P_B = 0$ $\boxed{N_A = P_A + P_B - N_B = 600 + 450 - 561 = 489 \text{ N}}$

c) Para calcular la tensión tenemos que considerar únicamente una de las dos escaleras. Nosotros la calcularemos con la escalera B. Lógicamente con la escalera A se obtendría el mismo resultado. Como la escalera B está en equilibrio, la suma de momentos respecto al punto C tiene que ser cero. $\mathbf{P}_B$ y **T** tratan de girar la escalera en sentido horario mientras que $\mathbf{N}_B$ lo hace en el contrario. Por lo tanto



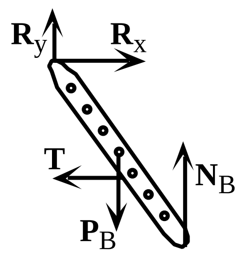
$$P_B \bullet 0.9 + T \bullet 1.5 = N_B \bullet 1.8 \qquad \boxed{T = (561 \bullet 1.8 - 450 \bullet 0.9)/1.5 = 403.2\ N}$$

d) Para determinar las reacciones en C, aplicamos el que la suma de fuerzas tiene que ser cero

$$\sum F_x = 0 \qquad R_x - T = 0 \qquad \boxed{R_x = T = 403.2\ N}$$

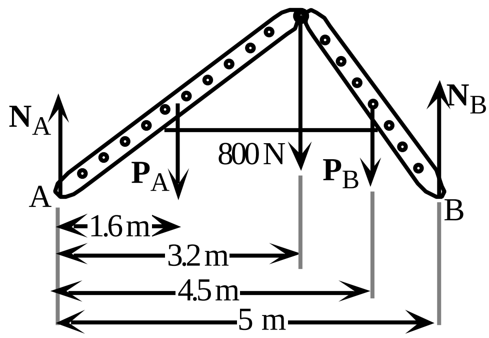
$$\sum F_y = 0 \qquad R_y + N_B - P_B = 0$$

$$\boxed{R_y = P_B - N_B = 450 - 561 = -111\ N}$$



R_y es negativa por lo que en realidad lleva sentido contrario al representado en la figura, es decir va dirigida hacia abajo. Su reacción R'_y va dirigida hacia arriba, también en sentido contrario al de la figura.

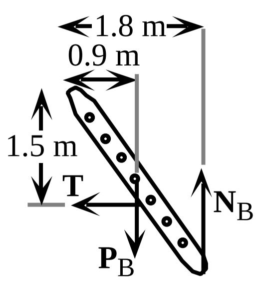
e) Al situar 800 N en el punto C, cambian tanto la tensión como las reacciones en los apoyos, y para calcular esta, hay que determinar previamente una las normales que ejerce el suelo.



Aplicando momentos respecto al punto A:

$$N_B \bullet 5 = P_B \bullet 4.5 + 800 \bullet 3.2 + P_A \bullet 1.6$$

$$\boxed{N_B = (450 \bullet 4.5 + 800 \bullet 3.2 + 600 \bullet 1.6)/5 = 1073\ N} \qquad (3.1)$$



La tensión la determinamos considerando solo la escalera B y haciendo que la suma de momentos respecto al punto C sea cero:

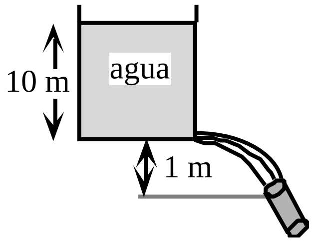
$$N_B \bullet 1.8 = P_B \bullet 0.9 + T \bullet 1.5 \qquad \boxed{T = 1017.6\ N} \qquad (3.2)$$

Podríamos haber llegado al mismo resultado utilizando la escalera A, para lo cual necesitaríamos conocer N_A. Una vez determinado N_B, para determinar N_A basta suponer que

$$\sum F_y = 0 \qquad N_A + N_B = P_A + P_B + 800 \qquad \boxed{N_A = 600 + 450 + 800 - 1073 = 777\ N}$$

f) En el apartado anterior hemos calculado que la tensión que tiene que soportar la cuerda al subirse el pintor son 1017.6 N. Si esta solo soporta 1000 N, en la posición actual se romperá. Una solución para que la cuerda aguante, es bajar la posición de la misma acercándola al suelo. Con esta medida aumentamos la distancia al punto C, que inicialmente es de 1.5 m, y como puede verse en la ecuación 3.2, si esta distancia aumenta, la T disminuye, ya que los otros términos de la ecuación no cambian. En particular N_B se calcula en la ecuación anterior, la 3.1, y se aprecia que no depende de la posición de la cuerda.

3) Un depósito cuyo nivel se mantiene constante a una altura de 10 m, tiene un orificio en la parte mas baja de su superficie lateral por la que fluye el líquido. La sección de dicho orificio es de 1 cm^2. En un plano horizontal situado 1 m por debajo del fondo del deposito se quiere colocar un tubo que recoja el chorro. Determinar:



a) La presión absoluta y manométrica en el fondo del depósito en atmósferas.
b) La distancia horizontal del tubo al depósito, e inclinación del mismo para que el líquido entre en el tubo sin rozarle.
c) La sección mínima del tubo para que el agua no se derrame.
Si dejamos que el depósito se vacíe,
d) Cuanto tiempo tardara en vaciarse hasta la mitad? Suponer que la sección del depósito es de 1 m^2.
Nota: 1 atm = 1.013 10^5 Pascales.

SOLUCION

a) la presión manométrica es $\rho gh = 10^3 \bullet 9.81 \bullet 19 = \boxed{98100 \text{ Pascales} = 0.968 \text{ atm.}}$

La presión absoluta es $1 + 0.968 = \boxed{1.968 \text{ atm}}$

b) Primero tenemos que determinar la velocidad de salida del líquido, que es:

$$v_x = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 10} = 14.01 \text{ m/s}$$
$$v_y = 0$$

a continuación calculamos el tiempo que tarda el chorro en descender 1 m:

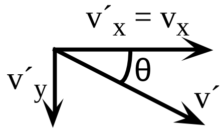
$$e = \frac{1}{2} at^2 \qquad t = \sqrt{\frac{2e}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{9.81}} = 0.4515 \text{ s}$$

la velocidad horizontal v_x permanece inalterada, por lo que en el tiempo anterior, el chorro recorre una distancia horizontal:

$$\boxed{x = v_x t = 14.01 \bullet 0.4515 = 6.324 \text{ m}}$$

La inclinación del tubo debe coincidir con el ángulo del chorro de agua, y para determinar este, debemos de calcular previamente la componente vertical de la velocidad:

$v'_y = v_y + at = 0 + 9.81 \cdot 0.4515 = 4.43$ m/s

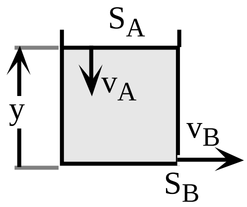


$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{4.43}{14.01} \qquad \boxed{\theta = 17.55^\circ}$$

c) La sección mínima del tubo será la sección del chorro cuando este llega al tubo. Para determinar dicha sección aplicamos la ecuación de continuidad entre la salida del recipiente, punto 1, y la entrada en el tubo, punto 2.

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \qquad \boxed{S_2 = \frac{S_1 v_1}{v_2} = \frac{1 \cdot 14.01}{\sqrt{14.01^2 \cdot 4.43^2}} = \frac{14.01}{14.69} = 0.95\ \mathrm{cm}^2}$$

d) Si el agua sale por el orificio con una velocidad v_B, la superficie del agua desciende con una velocidad v_A tal que por la ecuación de continuidad



$$S_A v_A = S_B v_B \qquad v_A = (S_B/S_A)\, v_B$$

Además $v_A = -\,dy/dt$, mientras que si suponemos que $S_A \gg S_B$ $\qquad v_B = \sqrt{2gy}$

Sustituyendo estas dos velocidades en la ecuación anterior:

$$-\frac{dy}{dt} = \frac{S_B}{S_A}\sqrt{2gy} \qquad dt = -\frac{S_A}{S_B}\frac{dy}{\sqrt{2gy}} = -\frac{S_A}{S_B\sqrt{2g}}\, y^{-1/2} dy$$

Integrando:

$$t = -\frac{S_A}{S_B\sqrt{2g}}\, 2\, y^{1/2} + C$$

Si para $t = 0$, $y = H$ $\qquad 0 = -\dfrac{S_A}{S_B\sqrt{2g}}\, 2\, H^{1/2} + C \qquad C = \dfrac{2\, S_A}{S_B\sqrt{2g}}\, H^{1/2}$

Sustituyendo el valor de C y sacando factor común:

$$t = -\sqrt{\frac{2}{g}}\,\frac{S_A}{S_B}\left(H^{1/2} - y^{1/2}\right) = \sqrt{\frac{2}{9.81}}\,\frac{10^4}{1}\left(10^{1/2} - 5^{1/2}\right)$$

Dando valores a las diferentes magnitudes

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2}{9.81}}\,\frac{10^4}{1}\left(10^{1/2} - 5^{1/2}\right) = 4182'' = 69'\ 42''}$$