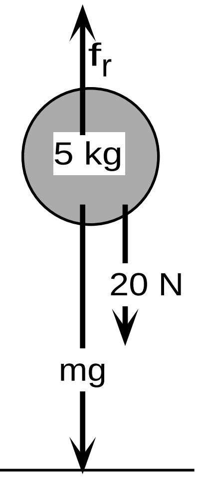
EXAMEN DE FISICA I (I.I. e I.Q.) 9-2-2001

PROBLEMAS



1) Un cuerpo de masa m = 5 kg, cae en un fluido partiendo del reposo. El cuerpo esta sometido además del peso a una fuerza constante de 20 N dirigida hacia abajo y a una fuerza de rozamiento proporcional a su velocidad $\mathbf{f}_r = -5\mathbf{v}$, siendo **v** la velocidad en m/s.

a) Calcular la aceleración inicial a_0 y la aceleración cuando la velocidad es de 3 m/s.

b) Hallar la velocidad límite y la velocidad cuando la aceleración es de 0.1 a_0.

c) Determinar velocidad y aceleración del cuerpo 2 segundos después de iniciado el movimiento.

d) Determinar la posición del cuerpo 2 segundos después de iniciado el movimiento.

e) Determinar el tiempo necesario para alcanzar el 90% de la velocidad límite.

f) Construir una gráfica de v en función del tiempo hasta un tiempo de 3 segundos.

SOLUCION

a) Aplicamos la 2º ley de Newton $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Como todas las fuerzas actúan en una dirección, quitaremos el carácter vectorial, y trabajaremos con magnitudes escalares.

Inicialmente, $v_0 = 0 \Rightarrow f_r = 0 \Rightarrow mg + 20 = ma_0 \Rightarrow a_0 = \dfrac{5\ 9.81 + 20}{5} \Rightarrow \boxed{a_0 = 13.81 \ \text{m/s}^2}$

Cuando v = 3 m/s, la 2º ley de Newton será: $mg + 20 - 5\ 3 = ma \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{5\ 9.81 + 20 - 5\ 3}{5} = 10.81 \ \text{m/s}^2}$

b) Cuando llegamos a la velocidad límite, la $a = 0 \Rightarrow mg + 20 - 5\,v_l = m\ 0 \Rightarrow \boxed{v_l = \dfrac{5\ 9.81 + 20}{5} = 13.81 \ \text{m/s}}$

Si $a = 0.1\ a_0 \Rightarrow a = 0.1\ 13.81 = 1.381 \ \text{m/s}^2$

La velocidad para esta acelaración será la que verifique la ecuación: $mg + 20 - 5\,v = m\ 1.381 \Rightarrow$

$$v = \frac{m\,(g - 1.381) + 20}{5} = \frac{5\,(9.81 - 1.381) + 20}{5} \Rightarrow \boxed{v = 12.43 \ \text{m/s}}$$

c) Determinando primero la velocidad será fácil calcular la aceleración. Para calcular la velocidad, planteamos de nuevo la 2º ley de Newton, con el objeto de relacionar el tiempo y la velocidad:

$$mg + F - Kv = ma = m\,\frac{dv}{dt}, \quad \text{con } F = 20 \text{ N y } K = 5 \text{ Ns/m}$$

Agrupando los términos relacionados con la velocidad a un lado y el dt al otro :

$$\frac{dv}{mg + F - Kv} = \frac{dt}{m} \quad \text{multiplicando por } -K \Rightarrow \frac{dv}{-\dfrac{mg + F}{K} + v} = -\frac{K}{m}\,dt$$

teniendo en cuenta que $\dfrac{mg + F}{K}$ es la velocidad límite v_l.

$$\frac{dv}{v - v_l} = -\frac{K}{m}\,dt \;\Rightarrow \text{ integrando } \int \frac{dv}{v - v_l} = \int -\frac{K}{m}\,dt \;\Rightarrow\; \ln(v - v_l) = -\frac{K}{m}\,t + C1$$

donde aparece una constante de integración C1. Para determinar el valor de C1, suponemos que el origen de tiempos coincide con el inicio del movimiento, es decir que para v = 0, t = 0 $\Rightarrow \ln(0 - v_l) = -\frac{K}{m}\,0 + C1 \;\Rightarrow$ $C1 = \ln(-v_l)$. Sustituyendo este valor de C1

$$\ln(v - v_l) = -\frac{K}{m}\,t + \ln(-v_l) \;\Rightarrow\; \ln\left(\frac{v - v_l}{-v_l}\right) = -\frac{K}{m}\,t \;\Rightarrow\; \ln\left(1 - \frac{v}{v_l}\right) = -\frac{K}{m}\,t \;\Rightarrow$$

$$1 - \frac{v}{v_l} = e^{-\frac{K}{m}t} \;\Rightarrow\; \boxed{v = v_l\,(1 - e^{-\frac{K}{m}t})} \;\Rightarrow \text{para } t = 2\text{ s} \quad v = 13.81(1 - e^{-2}) = 11.94 \text{ m/s}$$

El calculo de la aceleración se puede realizar a partir de la 2ª ley de Newton tal como lo hicimos en el apartado a), o bien derivando la expresión de la velocidad:

$$a = \frac{dv}{dt} = v_l\,\frac{K}{m}\,e^{-\frac{K}{m}t}$$. Teniendo en cuenta que (K/m) = 1 y t = 2, $\boxed{a = 13.81\,e^{-2} = 1.87 \text{ m/s}^2}$

d) Partiendo de la ecuación de la velocidad que hemos deducido en el apartado anterior, relacionamos la posición y el tiempo, para lo cual sustituimos v por dy/dt:

$$\frac{dy}{dt} = v_l\left(1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right) \;\Rightarrow\; dy = v_l\left(1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right)dt, \quad \text{e integrando}$$

$$y = \int v_l\left(1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right)dt + C2 \;\Rightarrow\; y = v_l\left(t - \frac{1}{-\frac{K}{m}}\,e^{-\frac{K}{m}t}\right) + C2$$

Para determinar el valor de la constante de integración C2, suponemos que para t = 0, y = 0 $\Rightarrow$

$$0 = v_l\left(0 - \frac{1}{-\frac{K}{m}}\,e^{0}\right) + C2 \;\Rightarrow\; C2 = -\frac{v_l}{K/m}$$ y sustituyendo este valor en la ecuación anterior:

$$y = v_l\left(t + \frac{1}{K/m}\,e^{-\frac{K}{m}t}\right) - \frac{v_l}{K/m} = v_l\left(t + \frac{m}{K}\left(e^{-\frac{K}{m}t} - 1\right)\right) \;\Rightarrow$$

Teniendo en cuenta que m/K = 1 y sustituyendo el valor de t = 2 s

$$\boxed{y = 13.81(2 + 1\,(e^{-2} - 1)) \;=\; 13.81\,(2 - 0.8647) \;=\; 15.68\text{ m}}$$

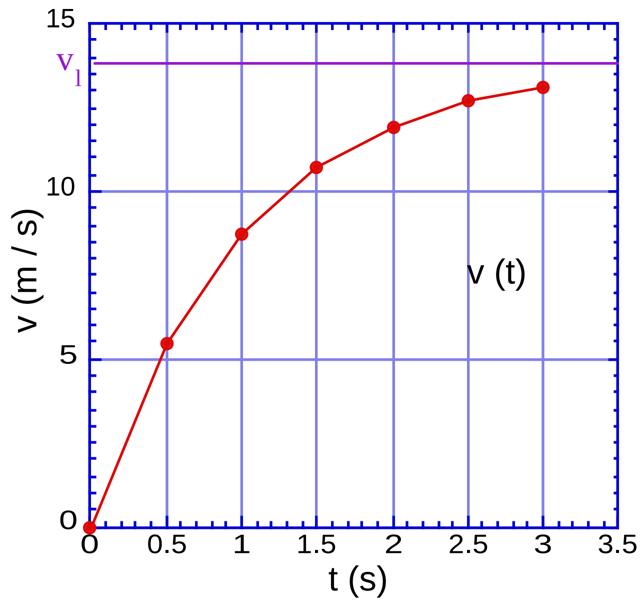
e) Partimos de la ecuación de v(t) deducida en el apartado c): $v = v_l(1 - e^{-(K/m)t})$ y sustituimos v por $(90/100)\,v_l = 0.9\,v_l \;\Rightarrow$

$$0.9\,v_l = v_l(1 - e^{-(K/m)t}) \;\Rightarrow\; 0.9 = (1 - e^{-(K/m)t}) \;\Rightarrow\; e^{-(K/m)t} = 0.1 \Rightarrow\; -(K/m)t = \mathrm{Ln}(0.1) \;\Rightarrow$$

$$t = -(m/K)\mathrm{Ln}(0.1) = -(5/5)\mathrm{Ln}(0.1) \;\Rightarrow\; \boxed{t = 2.30\text{ s}}$$

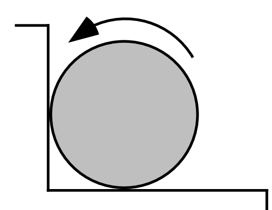
f) Partiendo de nuevo de la ecuación de v(t) construimos una tabla de velocidades para intervalos de tiempo de 0.5 s, y a partir de la misma, la tabla:

t (s)	V (m/s)
0	0
0.5	5.43
1	8.73
1.5	10.73
2	11.94
2.5	12.68
3	13.12



---

2) Disponemos de una esfera inhomogénea de radio R, masa M y densidad volúmica $\rho(r) = cr$, donde c es una constante y r es la distancia radial al centro de la esfera.



a) Determinar la masa de la esfera en función de R y c.

b) Calcular el momento de inercia, respecto de un eje que pase por su centro, (expresar el resultado en función de M y R)

Recordar que $\int (y^2+z^2)\,dm + \int (x^2+z^2)\,dm + \int (x^2+y^2)\,dm = 2\int (x^2+y^2+z^2)\,dm$

Si a dicha esfera se la hace girar con una velocidad ω_0 y después se la coloca en una esquina (ver figura), sabiendo que el coeficiente de rozamiento con la pared y con el suelo es μ, calcular, expresándolo de la forma mas simple posible:

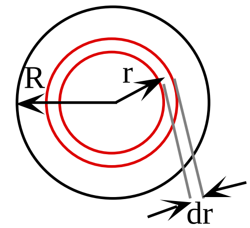
c) El valor de todas las fuerzas que actúan sobre la esfera.

d) La aceleración angular de la esfera.

e) El número de vueltas que da antes de detenerse.

f) Calcular la masa y momento de inercia de la esfera así los valores numéricos de las magnitudes que aparecen en los apartados anteriores para R = 30 cm, $c = (10^4/\pi)$ kg/m^4, $\mu = 2$ y $\omega_0 = 40$ rad/s.

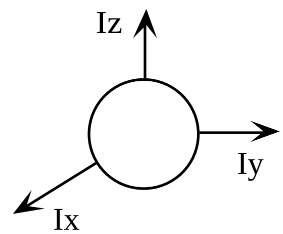
SOLUCION



a) Como la densidad depende de la distancia al centro de la esfera (simetría esférica) tomamos un dm encerrado en una corteza esférica de radio r y espesor dr, ya que en dicho volumen la densidad será la misma:

$$dV = 4\pi r^2\, dr \quad \Rightarrow \quad dm = \rho\, 4\pi r^2\, dr = cr\, 4\pi r^2\, dr = 4\pi c r^3\, dr$$

Integrando: $m = \int_0^R 4\pi\, c\, r^3 dr = 4\pi\, c \left[\dfrac{r^4}{4}\right]_0^R \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = \pi c R^4}$



b) La densidad no es constante, y por lo tanto no podemos considerar la esfera como una suma de discos, ya que no sabemos cuanto vale el I de cada disco (dentro de cada disco la densidad va variando). Como la densidad depende de la distancia al centro, al igual que para la masa, las regiones en las que la densidad es constante son cortezas esféricas, por lo que tendremos que relacionar el momento de inercia con una integral de dm situadas en cortezas.

Por simetría, Ix = Iy = Iz = I. Además, $I_x = \int(y^2+z^2)dm$, $I_y = \int(x^2+z^2)dm$ e $I_z = \int(x^2+y^2)dm$.

Aplicando la relación: $\int(y^2+z^2)dm + \int(x^2+z^2)dm + \int(x^2+y^2)dm = 2\int(x^2+y^2+z^2)dm = 2\int r^2\, dm$

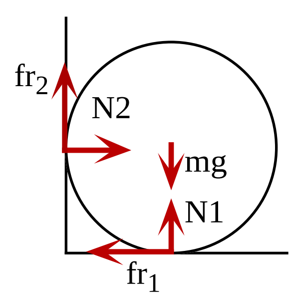
Vemos que $3I = 2\int r^2\, dm \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = (2/3) \int r^2\, dm}$

Esta es la relación que estabamos buscando.

Tomamos un dm igual que para el cálculo de la masa, por lo que el momento de inercia será:

$$I = (2/3) \int r^2\, dm = (2/3)\int_0^R r^2\, 4\pi\, c\, r^3 dr = (2/3)\int_0^R 4\pi\, c\, r^5 dr = (2/3) 4\pi\, c\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^R = (4/9)\pi\, cR^6 \Rightarrow$$

$$I = (4/9)\, \pi c R^4\, R^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = (4/9)\, m\, R^2}$$



c) En la figura se muestran las fuerzas que actúan sobre la esfera. Como el centro de masas no se desplaza, la suma de todas esas fuerzas tiene que ser 0 ($\sum \mathbf{F} = 0$) $\Rightarrow$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_2 - fr_1 = 0$ (1)

$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 + fr_2 - mg = 0$ (2)

Además, como hay deslizamiento, actúa la fuerza de rozamiento máxima $\mu N \Rightarrow$

$fr_1 = \mu N_1$, $fr_2 = \mu N_2$. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones anteriores:

$(1) \Rightarrow \quad N_2 - \mu N_1 = 0$

$(2) \Rightarrow \quad N_1 + \mu N_2 - mg = 0$

De la primera ecuación despejamos el valor de N_2: $N_2 = \mu N_1$ y lo introducimos en la segunda $\Rightarrow$

$$N_1 + \mu\, \mu N_1 - mg = 0 \;\Rightarrow\; N_1 (1 + \mu^2) = mg \;\Rightarrow\; \boxed{N_1 = mg / (1 + \mu^2)}$$

Y sustituyendo este valor en N_2, fr_1 y fr_2 $\Rightarrow$

$$\boxed{N_2 = mg\,\mu / (1 + \mu^2)}$$
$$\boxed{fr_1 = mg\,\mu / (1 + \mu^2)}$$
$$\boxed{fr_2 = mg\,\mu^2 / (1 + \mu^2)}$$

d) para determinar la aceleración angular de la esfera tenemos que aplicar la ecuación de la dinámica de rotación $\sum \mathbf{M} = I\alpha$.

Si el I está calculado respecto a un eje que pase por el centro de la esfera, los momentos de las fuerzas también los calcularemos respecto al centro de la esfera. Las únicas fuerzas que ejercen momento son fr_1 y fr_2, y originan un momento opuesto a ω. Si tomamos el sentido de ω (+), el de los momentos será (-) $\Rightarrow$

$$-fr_1 R - fr_2 R = I\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = -\frac{(fr_1 + fr_2)\, R}{I} = -\frac{\left(\dfrac{mg\mu}{1+\mu^2} + \dfrac{mg\mu^2}{1+\mu^2}\right) R}{(4/9)\, mR^2} = -\frac{mg\left(\mu + \mu^2\right) R}{(1+\mu^2)\,(4/9)\, mR^2} \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha = -\frac{9g\left(\mu + \mu^2\right)}{4\,(1+\mu^2)\, R}}$$

e) La determinación del numero de vueltas, se realiza a partir del principio de conservación de la energía (E), cuando actúa una fuerza no conservativa. Inicialmente, la Ec de traslación es 0 y la Ep gravitatoria también la podemos considerar 0; la única E del sistema es la Ec de rotación (Ecr).

$$Ecr_i + W_{nocon.} = Ecr_f \quad (3)$$

El $W_{nocon.}$ es negativo ya que la fr es opuesta al desplazamiento (D) $\Rightarrow$ $W_{nocon.} = -fr\, D$

Además, la esfera termina parándose $\Rightarrow$ $Ecr_f = 0$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (3):

$$Ecr_i = fr\, D \quad \Rightarrow \quad (1/2) I\omega^2 = (fr_1 + fr_2)\, 2\pi R N$$

Siendo N el número de vueltas que da hasta detenerse. Despejando N:

$$\boxed{N = \frac{(1/2)\, I\, \omega^2}{2\,\pi\, R(fr_1 + fr_2)} = \frac{(1/2)\,(4/9)\, mR^2\, \omega^2}{2\,\pi\, R\, \dfrac{mg}{1+\mu^2}(\mu + \mu^2)} = \frac{R\omega^2(1+\mu^2)}{9\,\pi\, g\,(\mu + \mu^2)}}$$

f) $m = \pi c R^4 = \pi(10^4/\pi)0.3^4 \Rightarrow \boxed{m = 81 \text{ kg}}$

$I = (4/9)\, m\, R^2 = (4/9)\, 81\; 0.3^2 \Rightarrow \boxed{I = 3.24 \text{ kgm}^2}$

$N_1 = mg\, /\, (1+\mu^2) = 81\; 9.81 / (1+2^2) \Rightarrow \boxed{N_1 = 158.92 \text{ N}}$

$N_2 = mg\,\mu\, /\, (1+\mu^2) = 81\; 9.81\; 2 / (1+2^2) \Rightarrow \boxed{N_2 = 317.84 \text{ N}}$

$fr_1 = mg\,\mu\, /\, (1+\mu^2) = 81\; 9.81\; 2 / (1+2^2) \Rightarrow \boxed{fr_1 = 317.84 \text{ N}}$

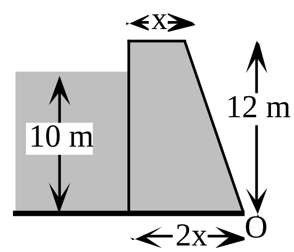
$fr_2 = mg\,\mu^2\, /\, (1+\mu^2) = 81\; 9.81\; 2^2 / (1+2^2) \Rightarrow \boxed{fr_2 = 635.69 \text{ N}}$

$$\alpha = -\frac{9g\left(\mu + \mu^2\right)}{4\,(1+\mu^2)\,R} = -\frac{9\; 9.81\left(2 + 2^2\right)}{4\,(1+2^2)\; 0.3} \Rightarrow \boxed{\alpha = -88.29 \text{ rad/s}^2}$$

$$N = \frac{R\omega^2(1+\mu^2)}{9\,\pi\, g\,(\mu + \mu^2)} = \frac{0.3\; 40^2(1 + 2^2)}{9\,\pi\, 9.81\,(2 + 2^2)} \Rightarrow \boxed{N = 1.44 \text{ vueltas}}$$

---

3) La figura representa la sección transversal de una presa cuya longitud perpendicular al diagrama es de 30 m. la profundidad del agua situada detrás de la presa es de 10 m, el material con el que se ha construido la presa tiene una densidad $\rho = 3000$ kg / m^3. Determinar:



a) La presión absoluta en el fondo del embalse.

b) La fuerza ejercida sobre el cristal de un reloj sumergible de 3 cm de diámetro si en su interior hay aire a presión atmosférica y el reloj se encuentra en el fondo del embalse.

c) Determinar la fuerza resultante que ejerce el agua sobre la presa y el punto de aplicación de dicha fuerza.

d) Hallar el valor de x si el peso de la presa es 10 veces mayor que la fuerza horizontal ejercida por el agua sobre ella.

e)¿Puede volcar la presa alrededor del borde que pasa por O?

f)¿Como influye en las respuestas anteriores el tamaño del embalse situado detrás de la presa?

Nota: el centro de masas de una placa triangular se encuentra a 1/3 de la base y a 2/3 del vértice opuesto, cualquiera que sea el lado elegido como base.

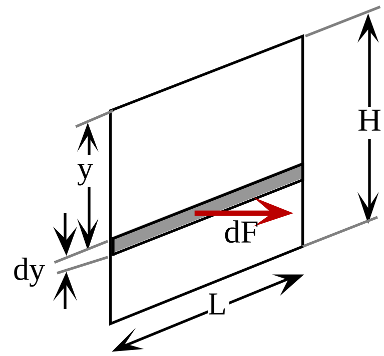
SOLUCION

a) La presión absoluta es la suma de la presión atmosférica (Patm) mas la debida al agua:

$$P = P_{atm} + \rho g H = 1.013\; 10^5 + 10^3\; 9.81\; 10 = 1.013\; 10^5 + 0.981\; 10^5 \Rightarrow \boxed{P = 1.944\; 10^5 \text{ Pascales}}$$

b) Como el reloj en su interior esta a Patm, la fuerza neta que actúa sobre el cristal es la debida a la presión del agua: $F = (P_{ext} - P_{int})\, Area = \rho g H\, Area = 10^3\; 9.81\; 10\; \pi\; (0.015)^2 \Rightarrow \boxed{F = 69.34 \text{ N}}$

c) Como Patm actúa en ambos lados de la presa, la fuerza absoluta sobre la misma será únicamente debida a la presión ejercida por el agua, que a una profundidad y es P= ρgy. Si consideramos una franja de la presa de altura dy y longitud L, toda ella situada a una profundidad y, la fuerza que actúa sobre la misma será:



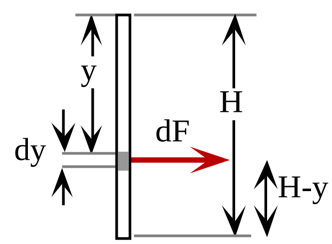
$$dF = Pds = PLdy = \rho gy\, Ldy$$

Para calcular la fuerza total sobre la presa debemos integrar dF entre la superficie del agua y el extremo inferior de la presa:

$$F = \int_0^H \rho\, g\, y\, L\, dy = \rho\, g\, L \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^H = \boxed{(1/2)\, \rho\, g\, L\, H^2} \Rightarrow \boxed{F = (1/2)\, 10^3\, 9.81\, 30\, 10^2 = 14.715\, 10^6\ \mathrm{N}}$$

El punto de aplicación de la fuerza F sobre la presa será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos)

El momento <u>respecto a un punto del fondo</u> de un dF actuando sobre una franja a una profundidad y será:



$$dM= dF(H-y)= \rho gy\, Ldy\, (H-y)$$

donde hemos tomado el valor de dF calculado en el apartado anterior. Para calcular el momento total, integramos entre el borde superior e inferior de la presa:

$$M = \int_0^H \rho\, gyL\, (H - y)\, dy = \rho\, gL \int_0^H (Hy - y^2)\, dy = \rho\, gL \left(H \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^H - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^H \right) = \rho\, gL \left(\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3} \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{M = (1/6)\, \rho gLH^3}$$

Si el punto de aplicación esta a una altura d respecto a la parte inferior de la presa, tiene que verificarse que

$$Fd = M \Rightarrow$$

$$d = \frac{M}{F} = \frac{(1/6)\, \rho\, g\, L\, H^3}{(1/2)\, \rho\, g\, L\, H^2} \Rightarrow \boxed{d = (1/3)\, H = 3.3333\ \mathrm{m}}$$

Nota: en los apartados anteriores H es la altura del agua; la de la presa la llamaremos h.

d) El peso de la presa es mg, con la masa igual al volumen por la densidad ($m = V\rho$), el volumen la sección por la longitud ($V = S\ L$)   y la Sección la de un rectángulo + la de un triángulo:

$$S = xh + (1/2)\ xh\ = (3/2)\ xh.$$

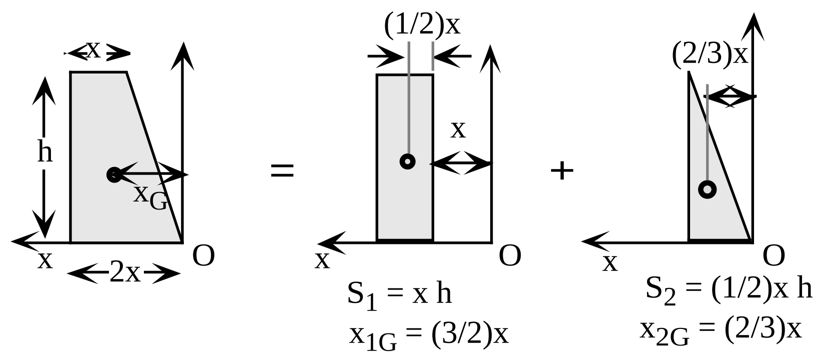
Sustituyendo todos estos valores: $m = (3/2)\ xhL\rho$,   y planteando la igualdad $mg = 10F \Rightarrow$

$(3/2)\ xh\ L\rho g\ =\ 10\ F\ \Rightarrow\ x = 10\ F\ /\ [(3/2)\ h\ L\ \rho\ \ g] =\ 10\ 14.715\ 10^6\ /\ [(3/2)\ 12\ 30\ 3000\ 9.81]\ \ \Rightarrow$

$$\boxed{x = 9.259\ \text{m}}$$

e) Para calcular si la presa puede volcar por el borde que pasa por O, debemos de conocer primero el punto de aplicación del peso de la presa. El momento del peso respecto a O solo depende de la coordenada x_G, asi que solo necesitaremos conocer dicha coordenada.

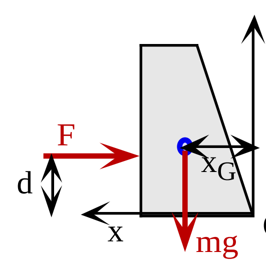
El procedimiento más sencillo consiste en dividir la presa en dos partes, una de sección rectangular y otra de sección triangular, cuyas componentes x de los centros de masas son conocidas: (podemos utilizar las secciones o las masas totales)



$$x_G = \frac{\sum m_i\, x_{Gi}}{\sum m_i} = \frac{(3/2)\ x\ xh\ L\rho\ +\ (2/3)\ x\ (1/2)\ xhL\rho}{xh\ L\rho\ +\ (1/2)\ xhL\rho} = \frac{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right)x}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{11}{6}x}{\frac{3}{2}} = \left(\frac{11}{9}\right)x \ \Rightarrow$$

$$\boxed{x_G\ = 11.317\ \text{m}}$$

En la figura se representan las dos fuerzas que actúan sobre la presa. La del agua origina un momento respecto a O que trata de volcarla (momento -), mientras que el momento del peso, la estabiliza (momento +). Si la suma de los momentos es positiva, la presa estará estable.



$\sum M\ =\ mg\, x_G - F\ d\ =\ 10F\ 11.317 - F\ 3.333\ = 109.8\ F\ \ \Rightarrow \boxed{M \geq 0}\ \ \ \Rightarrow$ $\boxed{\text{la presa estará estable}}$

d) El tamaño del embalse situado detrás de la presa $\boxed{\text{no influye}}$ en ninguno de los apartados anteriores. Solo influye la altura del agua.