EXAMEN DE FISICA I (I.I. e I.Q.) 8-9-2001

CUESTIONES

1) Explica que son el tiempo propio y la longitud propia. ¿Cuándo se utilizan estos conceptos?. Pon un ejemplo sencillo de aplicación donde intervenga el tiempo propio, y otro donde intervenga la longitud propia.

SOLUCION

Para un observador, el tiempo es propio, cuando transcurre entre dos sucesos que ocurren en la misma posición.

Para un observador, la longitud es propia cuando las posiciones inicial y final entre las cuales estamos calculando la longitud, permanecen en reposo. (Si es la longitud de un cuerpo, este está en reposo para el observador).

Estos conceptos se utilizan cuando el observador y/o los objetos se mueven a velocidades cercanas a la de la luz c, y por lo tanto las transformaciones de Galileo dejan de ser validas y hay que utilizar las transformaciones de Lorentz. En estos casos (v/c) se aproxima a 1 el parámetro $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\left(v/c\right)^2\right)}}$ es mayor que 1: $\gamma > 1$

Si una nave espacial se mueve cerca de la Tierra a velocidades cercanas a la de la luz, la longitud de la nave vista desde la Tierra, L, es mucho menor que la longitud medida por un pasajero de la nave, L´ (longitud propia). Se produce un fenómeno conocido como contracción de longitudes. $L < L'$ ($L' = \gamma L$).

En la misma nave, el tiempo transcurrido para un pasajero T´(tiempo propio) es mucho menor que el tiempo transcurrido en la Tierra, T , lo que se conoce como dilatación del tiempo, $T > T'$ ($T = \gamma T'$)..

2) El vector de posición de un cuerpo de 2 kg de masa es $\mathbf{r} = (3t - 6)\,\mathbf{i} - 4t^3\,\mathbf{j}$. Hallar:

a) El momento lineal y angular que lleva la partícula respecto al origen.

b) La fuerza y el momento de la fuerza respecto al origen que actúan sobre la partícula.

SOLUCION

a) Primero calculamos la velocidad: $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = 3\,\mathbf{i} - 12t^2\,\mathbf{j}$ m/s

El momento lineal es: $\mathbf{P} = m\mathbf{v} = 2\,[3t\,\mathbf{i} - 12t^2\,\mathbf{j}] = \boxed{6\,\mathbf{i} - 24t^2\,\mathbf{j} \text{ kgm/s}}$

El momento angular es $\mathbf{L} = |\mathbf{r} \wedge \mathbf{P}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3t-6 & -4t^3 & 0 \\ 6 & -24t^2 & 0 \end{vmatrix} = [(3t-6)(-24t^2) - (6)(-4t^3)]\,\mathbf{k} \Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{L} = (-48t^3 + 144t^2\,\mathbf{k}) \text{ kgm}^2/\text{s}}$$

b) La fuerza podemos determinarla calculando la aceleración o a partir del momento lineal:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = dP/dt = d(6\,\mathbf{i} - 24t^2\,\mathbf{j})/dt \Rightarrow \boxed{\mathbf{F} = -48t\,\mathbf{j} \text{ kgm/s}^2}$$

En cuanto al momento, $\mathbf{M} = |\mathbf{r} \wedge \mathbf{F}| = d\mathbf{L}/dt = d(-48t^3 + 144t^2\ \mathbf{k})/dt \Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{M} = (-144\ t^2 + 288t)\ \mathbf{k} \quad kgm^2/s^2}$$

3) ¿Que condición tienen que cumplir las fuerzas que dan lugar a movimientos vibratorios armónicos simples (MAS)?. A partir de dicha fuerza, deduce la ecuación de la trayectoria de una partícula de masa m sometida a una fuerza de ese tipo.

SOLUCION

Las fuerzas tienen que ser directamente proporcionales a la separación de la posición de equilibrio x, y tales que traten de oponerse a que la partícula se aleje de esa posición, es decir del tipo : $F = -Kx$

Por la 2ª ley de Newton, $F = ma$. Si además $F = -Kx$, $\Rightarrow$ $ma = -kx \Rightarrow m(d^2x/dt^2) = -kx \Rightarrow$

$$(d^2x/dt^2) + (k/m)x = 0$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo grado, cuya solución es una función sinusoidal del tipo:

$$\boxed{x = A \cos[\sqrt{(K/m)}t + \alpha]}$$

Por lo tanto la partícula describirá un MAS de frecuencia angular $\omega = [\sqrt{(K/m)}$

4) Demostrar que en un choque central elástico ($e = 1$) de dos partículas se conserva la energía cinética del sistema.

SOLUCION

Por la conservación del momento: $m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \Rightarrow \boxed{m_A (v_A - v'_A)} = \boxed{m_B (v'_B - v_B)}$

Si $e = 1 \Rightarrow (v_B - v_A) = -(v'_B - v'_A) \Rightarrow \boxed{v_A + v'_A} = \boxed{v_B + v'_B}$

El producto de los términos de la izquierda de las ecuaciones anteriores, tiene que ser igual al producto de los términos de la derecha.:

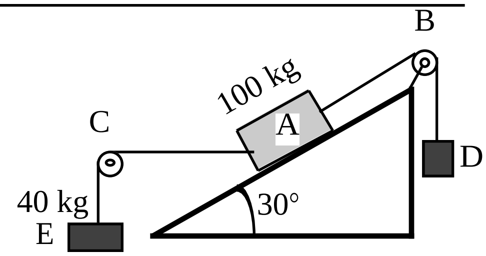
$$m_A (v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = m_B (v'_B - v_B)(v_B + v'_B) \Rightarrow m_A v_A^2 - m_A v'^2_A = m_B v'^2_B - m_B v_B^2$$

Multiplicando los dos miembros de esta última ecuación por (1/2) y despejando los términos iniciales a la izquierda y los finales a la derecha de la ecuación se transforma en :

$$\boxed{(1/2)\, m_A v_A^2 + (1/2)\, m_B v_B^2 = (1/2)\, m_A v'^2_A + (1/2)\, m_B v'^2_B}$$

que es la ecuación de conservación de la energía cinética.

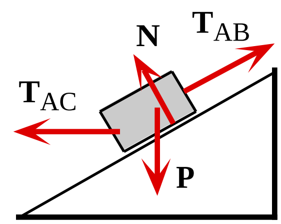
PROBLEMAS



1) El sistema de la figura se encuentra en equilibrio. La cuerda AC es horizontal y la cuerda AB es paralela al plano. Si el plano y las poleas son lisas:
a) Representar las fuerzas que actúan sobre el cuerpo A.
b) Determinar el valor de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo A.
c) determinar la masa del cuerpo D.

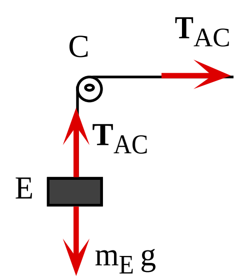
A continuación supongamos que el plano y las poleas son rugosas, siendo el coeficiente de rozamiento entre el plano y el cuerpo A de $\mu = 0.1$, el radio de la polea B R = 0.1 m y momento de inercia de la polea B I = 0.5 kgm^2. Si cortamos la cuerda horizontal AC:
d) ¿Asciende, desciende o se queda en reposo el cuerpo A?
En caso de que se mueva determinar:
e) Las aceleraciones lineal del bloque y angular de la polea.
f) Las tensiones de la cuerda ABD.

SOLUCION



a) Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo A son :
- El peso P
- La normal N
- Las tensiones de las dos cuerdas T_{AB} y T_{AC}

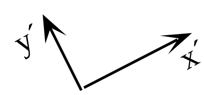
b) El peso es conocido : $P = m_A g = 100\ 9.81 \Rightarrow \boxed{P = 981\ N}$



Como el cuerpo E está en reposo, la cuerda que lo sostiene esta sometida a una tensión igual al peso del cuerpo E, y debida a que en las poleas no hay fricción, la tensión es la misma a lo largo de toda la cuerda por lo que:

$$T_{AC} = m_E g = 40\ \ 9.81 \quad \Rightarrow \boxed{T_{AC} = 392.4\ N}$$

Como el cuerpo A está en reposo, para determinar el valor de las fuerzas que actúan sobre el mismo tenemos que aplicar las leyes de la estática. Únicamente nos quedan dos incógnitas, que son la normal (N) y la tensión de la cuerda T_{AB}, por lo que con plantear dos ecuaciones es suficiente ($\sum Fx = 0$ y $\sum Fy$). Además, como una de las incógnitas (T_{AB}) es paralela al plano y la otra (N) es perpendicular al mismo, será mas sencillo utilizar un sistema de ejes ox´y´ tal que el eje x´sea paralelo al plano.

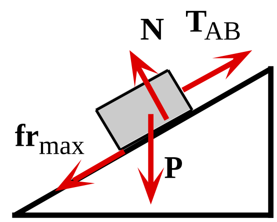


$$\sum Fx´ = 0 \Rightarrow T_{AB} - P\ sen30 - T_{AC}\cos 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{AB} = P\ sen\ 30 + T_{AC}\cos 30 \Rightarrow \boxed{T_{AB} = 830.33\ N}$$

$$\sum Fy´ = 0 \Rightarrow N + T_{AC}\ sen30 - P\cos 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P\cos 30 - T_{AC}\ sen30 \Rightarrow \boxed{N = 653.37\ N}$$

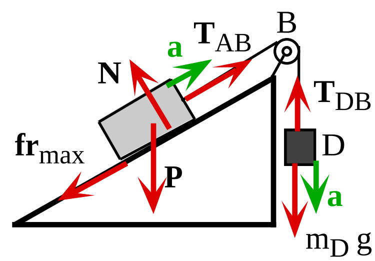
c) El cuerpo D está en reposo, por lo que la tensión de la cuerda tiene que ser igual al peso. Además como las poleas no tienen fricción, la tensión a lo largo de toda la cuerda es la misma $\Rightarrow$

$$T_{AB} = m_D g \quad \Rightarrow \quad m_D = 830.33 / 9.81 \quad \Rightarrow \boxed{m_D = 84.64\ kg}$$



d) Al cuerpo A tenderá a subir o a bajar, dependiendo si la tensión de la cuerda AB es mayor o menor respectivamente que la componente tangencial del peso. En el momento de cortar la cuerda, T_{AB} = 830.33 N y la componente tangencial del peso es P sen30 = 981 (1/2) = 490.5 $\Rightarrow$ el cuerpo tiende a subir $\Rightarrow$ aparece una fuerza de rozamiento dirigida hacia abajo que se opone al movimiento.
Ahora, para saber si consigue subir o la fuerza de rozamiento se lo impide y el cuerpo se queda quieto, tenemos que saber si la tensión es mayor que la componente tangencial del peso mas la fuerza de rozamiento máxima (fr_{max}). Si es mayor, el cuerpo sube; si es menor, actúa una fuerza de rozamiento menor que la máxima y de un valor tal que el cuerpo queda en equilibrio.

$$fr_{max} = \mu \text{ mgcos } 30 = 0.1\ 100\ 9.81 \cos 30 = 84.95 \text{ N}$$

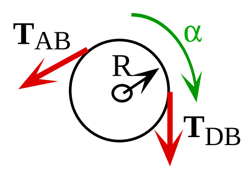


Por lo tanto, inicialmente T_{AB} (= 830.33) $\geq$ Psen30 (490.5) + fr_{max} (84.95), por lo que el bloque A ascenderá por el plano inclinado.

e) Tenemos 3 incógnitas: las 2 tensiones de la cuerda una a cada lado de la polea (al haber fricción entre la polea y la cuerda son diferentes) y la aceleración de los cuerpos A y D (al estar unidos con una cuerda es la misma a = α R). Planteamos 3 ecuaciones, una para el cuerpo A ($\sum$F = ma), otra para el cuerpo D A ($\sum$F = ma), y finalmente otra para la polea A ($\sum$M = Iα),.

$$T_{AB} - m_A g\text{sen}30 - fr_{max} = m_A a \quad \Rightarrow (a = \alpha R) \Rightarrow \quad T_{AB} = m_A g\text{sen}30 + fr_{max} + m_A \alpha R \qquad (1)$$

$$m_D g - T_{DB} = m_D a \quad \Rightarrow (a = \alpha R) \Rightarrow \quad T_{DB} = m_D g - m_D \alpha R \qquad (2)$$



$$(T_{DB} - T_{AB}) R = I \alpha \qquad (3)$$

Sustituyendo las ecuaciones 1 y 2 en la 3:

$m_D gR - m_D \alpha R^2 - m_A g\text{sen}30R - fr_{max} R - m_A \alpha R^2 = I \alpha$ $\Rightarrow$ agrupando la que lleva α en el 2º miembro $\Rightarrow$

$$m_D gR - m_A g\text{sen}30R - fr_{max} R = (I + m_D R^2 + m_A R^2) \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{m_D\, g\, R - m_A\, g\, \text{sen}30\, R - fr_{max} R}{I + m_D R^2 + m_A R^2}$$

y teniendo en cuenta que $fr_{max} = \mu N = \mu\, m_A g\cos 30 \Rightarrow$

$$\alpha = \frac{(m_D - m_A \text{sen}30 - \mu\, m_A \cos 30) gR}{I + m_D R^2 + m_A R^2} \Rightarrow \alpha = \frac{(84.64 - 100 \frac{1}{2} - 0.1\ 100 \frac{\sqrt{3}}{2})\ 9.81\ 0.1}{0.5 + 70\ (0.1)^2 + 100\ (0.1)^2} \Rightarrow$$

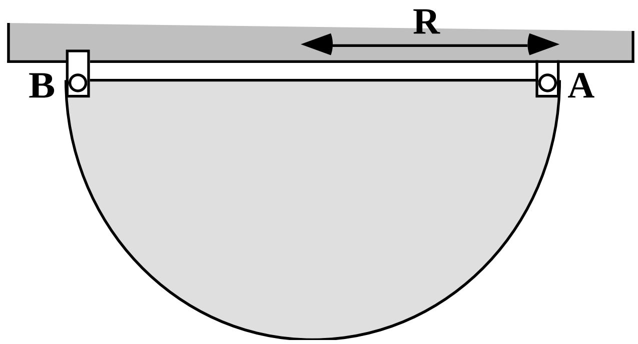
$$\boxed{\alpha = 10.86 \text{ rad /s}^2} \Rightarrow a = \alpha R = 10.86 \quad 0.1 \Rightarrow \boxed{a = 1.086 \text{ m/s}^2}$$

f) Para obtener las tensiones sustituimos el valor de α en las ecuaciones 1 y 2, quedándonos unos valores de:

$$T_{AB} = 100\ \ 9.81\text{sen}30 + 0.1\ 100\ \ 9.81 \cos 30 + 100\ 10.86\ \ 0.1 \quad \Rightarrow \boxed{T_{AB} = 684.06 \text{ N}}$$

$$T_{DB} = 84.64\ \ 9.81 - 84.64\ \ 10.86\ \ 0.1 \quad \Rightarrow \boxed{T_{DB} = 738.40 \text{ N}}$$

2) Una placa semicircular de masa M y radio R, está enganchada al techo por sus dos extremos como se indica en la figura. Determinar en función de M,R y g:



a) La posición del C.M. de la placa.

b) Su momento de inercia respecto del punto A.

Si en un instante determinado el enganche B se rompiera determinar:

c) La aceleración angular justo después de romperse el enganche B.

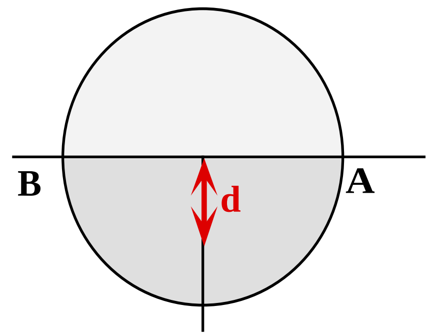
d) La reacción en el enganche A justo después de romperse el enganche B

e) La velocidad angular que lleva la placa cuando el centro de masas ocupa la posición mas baja posible.

f) Calcular el valor numérico de los apartados anteriores tomando M = 0.8 kg y R = 50 cm.
Nota: Si no sabes resolver el apartado b), para poder continuar con los apartados posteriores, toma como valor del momento de inercia: $I = 3MR^2$.

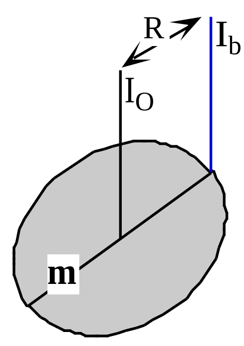
SOLUCION

a) Por simetría, el CM estará a lo largo de la línea que divide la placa semicircular en dos trozos iguales. La única incógnita será saber a que distancia de la línea AB estará. La forma mas sencilla de determinar esta distancia es aplicando Papus Gulding para un volumen de revolución, ya que al girar la placa entorno a un eje que pase por los puntos AB se genera una esfera.



El teorema de Papus Gulding dice que el volumen de un cuerpo de revolución es igual a la superficie del área generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el CM al generar el volumen, es decir:

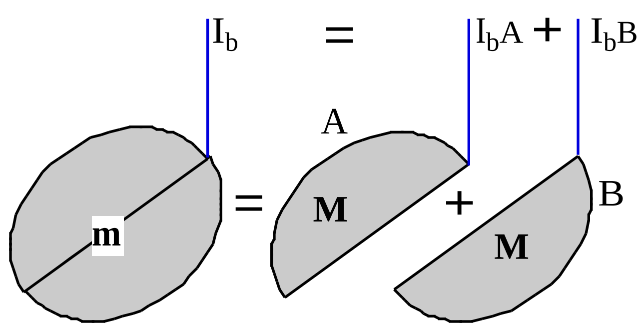
$V = 2\pi d\, A \;\Rightarrow\; (4/3)\,\pi\, R^3 = 2\pi d\;(1/2)\,\pi\, R^2 \;\Rightarrow$ (despejando d) $\Rightarrow$ $\boxed{d = \dfrac{4\,R}{3\,\pi}}$



b) El momento de inercia de una placa circular respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro es

$I_0 = 1/2\ mR^2$. Aplicando Steiner, podemos calcular el momento de inercia respecto aun eje paralelo que pase por el borde: $I_b = I_0 + mR^2 = 1/2\ mR^2 + mR^2 = (3/2)\ mR^2$

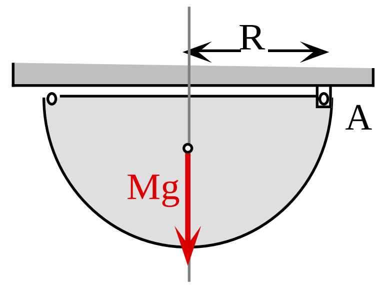
La placa circular es la suma de dos placas semicirculares, tal como muestra la figura por lo que el momento de inercia será la suma de los momentos de inercia de las dos placas: $I_b = I_bA + I_bB$. Por simetría los momento de inercia de las dos placas semicirculares son iguales ($I_bA = I_bB = I$) por lo que : $I_b = 2I$.



Despejando I e introduciendo el valor de I_b calculado anteriormente

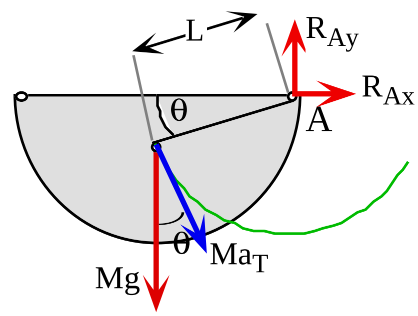
$I = I_b /2 \; = \; (3/2)\, mR^2 \; /2 \; = \; (3/2)\,(m/2)R^2$

Si la masa de circulo completo es m y la del semicírculo M, la relación será M = m/2, por lo que el momento de inercia que nos piden es $\boxed{I = \; (3/2)\, MR^2}$



c) Para calcular la aceleración angular aplicamos $\sum \mathbf{M} = I\alpha$, todo respecto al punto A. La única fuerza que origina momento respecto del punto A es el peso aplicado en el centro de masas $\Rightarrow$ la ecuación anterior se transforma en $\quad MgR \; = (3/2)\, M\, R^2\, \alpha \; \Rightarrow \boxed{\alpha \; = 2g \,/\, 3R}$

d) Las fuerzas que actúan sobre la placa son el peso y la reacción en A, que la podemos descomponer en dos componentes: R_{Ax} y R_{Ay}.



En un sólido rígido, la suma de fuerzas es igual a la masa por la aceleración del CM($\sum \mathbf{F} = M\, \mathbf{a}_{CM}$). Al romperse el enganche B, el CM describe una trayectoria circular por lo tendrá una aceleración normal ($a_N = v^2/R$) y otra tangencial ($a_T = \alpha R$). En el instante inicial, la velocidad es cero por lo que $a_N = 0$ y solo tendremos a_T:

$$a_T = \alpha L = \; (2g \,/\, 3R)\; L = \; (2gL \,/\, 3R)$$

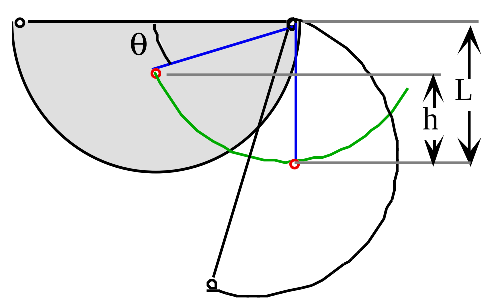
Esta aceleración es perpendicular a la línea que une el punto A con el CM, y formara un ángulo θ con la vertical.

Al plantear la ecuación ($\sum \mathbf{F} = M\, \mathbf{a}_{CM}$) para las componentes x e y nos queda:

$$R_{Ax} \; = \; M\, a_T \operatorname{sen} \theta \quad \Rightarrow \quad R_{Ax} \; = \; M\, \frac{2gL}{3R}\, \frac{4R/3\pi}{L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{Ax} \; = (8/9\pi) Mg}$$

$$R_{Ay} \; - \; M\, g = - \, M\, a_T \cos \theta \quad \Rightarrow \quad R_{Ay} = \; Mg - M\, \frac{2gL}{3R}\, \frac{R}{L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{Ay} \; = (1/3)\, Mg}$$

e) La energía potencial gravitatoria se transforma en energía cinética de rotación:



$$Mgh = 1/2 \; I\, \omega^2 \qquad (4)$$

con $\quad h = L - L \operatorname{sen}\theta \; = L\,(1\text{-}\operatorname{sen}\theta) \qquad (5)$

y $\; L \; = \; \sqrt{d^2 + R^2} \; = \sqrt{\dfrac{16R^2}{9\pi^2} + R^2} \; = \; \left(\sqrt{\dfrac{16^2}{9\pi^2} + 1} \right) R \; = \; 1.086 \; R$

y $\quad \operatorname{tg}\theta \; = \; d/R = (4R/3\pi) \,/\, R \; = \; 4 \,/ 3\pi \quad \Rightarrow \quad \theta = \; 22.997°$

Introduciendo estos valores en la ecuación 5, $h = 1.086\; R\; (1 - \operatorname{sen}\, 22.997) \; = 0.6617\; R$. Sustituyendo este valor en la ecuación 4 y despejando la velocidad angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{2Mg\,h}{I}} = \sqrt{\frac{2Mg\;0.6617\,R}{(3/2)MR^2}} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{0.8823g}{R}}}$$

f) Si suponemos que : M = 0.8 kg, R = 50 cm y tomamos g = 9.81 m/s^2:

$$d = \frac{4\,R}{3\,\pi} = \frac{4\;0.5}{3\,\pi} \Rightarrow \boxed{d = 0.2122\text{ m}}$$

$$I = (3/2)\,MR^2 = (3/2)\;0.8\;(0.5)^2 \Rightarrow \boxed{I = 0.3\text{ kgm}^2}$$

$$\alpha = 2g / 3R = (2\;\;9.81) / (3\;0.5) \Rightarrow \boxed{\alpha = 13.8\text{ rad s}^{-2}}$$

$$R_{Ax} = (8/9\pi)\,Mg = (8/9\pi)\;0.8\;9.81 \Rightarrow \boxed{R_{Ax} = 2.220\text{ N}}$$

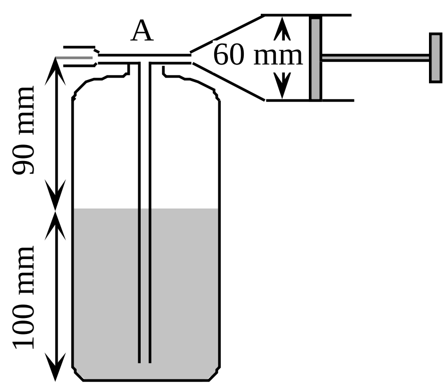
$$R_{Ay} = (1/3)\,Mg = (1/3)\;\;0.8\;\;9.81 \Rightarrow \boxed{R_{Ay} = 2.616\text{ N}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{0.8823g}{R}} = \sqrt{\frac{0.8823\;\;9.81}{0.5}} \Rightarrow \boxed{\omega = 17.31\text{ rad/s}}$$

---

3) El pulverizador de insecticida de la figura posee un émbolo de 60 mm de diámetro y un tubo de salida de 6 mm de diámetro, siendo el tramo intermedio de 2 mm de diámetro. El nivel de insecticida está 90 mm por debajo del tubo de entrada A, y 100 mm por encima del fondo del recipiente.

a) Determinar la presión manométrica (P-Patm) en el fondo del recipiente.



Si presionamos sobre el émbolo aplicándole una velocidad de 1 mm/s:

b) ¿Cuales serán las velocidades del aire en el tramo intermedio y en el tubo de salida?

c) ¿Que altura ascenderá el insecticida por el tubo vertical?

d) Determinar la velocidad mínima que deberíamos suministrar al embolo para que el aire que sale por el otro extremo contenga insecticida.

e) ¿Que fuerza mínima debemos ejercer sobre el embolo en el caso anterior?

Suponer que el insecticida tiene la densidad del agua y que el aire tiene una densidad de 10 kg/m^3. Desde el punto de vista estático considerar la densidad del aire despreciable.

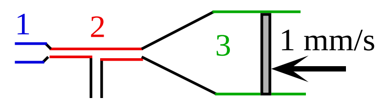
SOLUCION

a) La presión absoluta en el fondo del recipiente es la suma de la presión atmosférica (Patm) mas la debida al insecticida (ρgH) $P = Patm + \rho gH$

La presión manométrica (Pmano.) es la presión absoluta (P) menos la presión atmosférica:

$$Pmano = P - Patm = (Patm + \rho gH) - Patm = \rho gH = 1000\ 9.81\ \ 0.1 \Rightarrow \boxed{Pmano\ = 981 \text{ Pascales}}$$

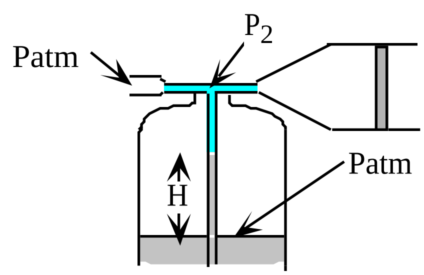
b) Aplicamos la ecuación de continuidad: v A = cte. entre los tramos 1-3 y 2-3



$$v_1A_1 = v_3A_3 \Rightarrow v_1 = v_3\frac{A_3}{A_1} = v_3\frac{\pi R_3^2}{\pi R_1^2} = v_3\left(\frac{R_3}{R_1}\right)^2 = 10^{-3}\left(\frac{60}{6}\right)^2 \Rightarrow \boxed{v_1 = 0.1 \text{ m/s}}$$

$$v_2A_2 = v_3A_3 \Rightarrow v_2 = v_3\frac{A_3}{A_2} = v_3\frac{\pi R_3^2}{\pi R_2^2} = v_3\left(\frac{R_3}{R_2}\right)^2 = 10^{-3}\left(\frac{60}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{v_2 = 0.9 \text{ m/s}}$$

c) Al ser la densidad del aire despreciable, la presión en el tramo vertical es igual que la existente en cualquier punto del tramo horizontal intermedio 2. Para conocer esta presión aplicamos Bernoulli entre el tramo 1 que esta a presión atmosférica y el tramo intermedio (además $h_1 = h_2$)



$$P_1 + \cancel{\rho_{aire}gh_1} + (1/2)\,\rho_{aire}v_1^2 = P_2 + \cancel{\rho_{aire}gh_2} + (1/2)\,\rho_{aire}v_2^2 \Rightarrow$$

$$Patm + (1/2)\,\rho_{aire}v_1^2 = P_2 + (1/2)\,\rho_{\ aire}v_2^2 \Rightarrow P_2 = Patm - (1/2)\,\rho_{\ aire}(v_2^2 - v_1^2)$$

Como $v_2 > v_1$ P_2 está a menor presión que Patm y el liquido ascenderá por el tubo una altura H tal que la presión en el tramo 2 mas la presión de la columna de liquido, tiene que ser igual a la presión en la superficie libre del líquido, que es Patm:

$$P_2 + \rho gH = Patm \Rightarrow \rho gH = Patm - P_2 = Patm - [Patm - (1/2)\,\rho_{aire}(v_2^2 - v_1^2)] = (1/2)\,\rho_{aire}(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow$$

$$H = (\rho_{aire}/2g\rho)\ (v_2^2 - v_1^2) = (10/\ 2\ 9.81\ 10^3)\ (0.9^2 - 0.1^2) = 0.000408 \text{ m} \Rightarrow \boxed{H = 0.41 \text{ mm}}$$

d) Para que salgan partículas de insecticida, este tiene que ascender hasta el tubo horizontal por lo que la altura H tiene que ser igual o mayor que 0.09 m

$$H \geq 0.09 \Rightarrow$$

$$\frac{\rho_{aire}}{\rho}\ \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\text{ g}} \geq 0.09 \Rightarrow \frac{10}{10^3}\ \frac{\left(v_3\frac{R_3^2}{R_2^2}\right)^2 - \left(v_3\frac{R_3^2}{R_1^2}\right)^2}{2\text{ g}} \geq 0.09 \Rightarrow v_3^2\left[\left(\frac{R_3}{R_2}\right)^4 - \left(\frac{R_3}{R_1}\right)^4\right] \geq 18\text{g}$$

$$\Rightarrow v_3^2\ (30^4 - 10^4) \geq 18\text{ g} \Rightarrow v_3^2 \geq 18\ \ 9.81\ \ /\ 800000 \Rightarrow v_3 \geq 0.01486 \text{ m/s} \Rightarrow \boxed{v_3 \geq 14.9 \text{ mm/s}}$$

e) Tenemos que calcular la presión mínima en el embolo, para lo cual aplicamos Bernoulli entre los puntos 1 y 3 cuando la velocidad del embolo es de 0.01486 m/s

$$P_1 + \cancel{\rho_{aire} g h_1} + (1/2)\, \rho_{aire} v_1^2 \quad = \quad P_3 + \cancel{\rho_{aire} g h_3} + (1/2)\, \rho_{\ aire} v_3^2 \quad \Rightarrow$$

$$Patm + (1/2)\, \rho_{\ aire} v_1^2 \quad = \quad P_3 + (1/2)\, \rho_{\ aire} v_3^2 \quad \Rightarrow \quad P_3 = Patm + (1/2)\, \rho_{\ aire}(v_1^2 - v_3^2) \Rightarrow$$

$$P_3 = Patm + (1/2)\, \rho_{\ aire}[v_3^2\, (A_3/A_1)^2 - v_3^2] = Patm + (1/2)\ \rho_{aire}\, v_3^2\ [\,(R_3/R_1)^4 - 1] \Rightarrow$$

$$P_3 = Patm + (1/2)\ 10\ v_3^2\ [10^4 - 1] \ = Patm + 4.9995\ 10^4\ v_3^2 = Patm + 4.9995\ 10^4\ (0.01486)^2 \Rightarrow$$

$$P_3 = Patm + 11.04 \quad \text{Pascales}$$

En el interior del embolo actúa P_3 y en el exterior Patm. La fuerza que tenemos que ejercer es la diferencia de presiones por la superficie es decir $F = (P_3 - Patm)\, A = 11.04\ \pi\, (0.03)^2 \Rightarrow \boxed{F = 0.0312\ N}$