

CUESTIONES

1) a) Define el momento de un vector respecto a un punto. b) Demuestra y explica el teorema de Varignon para un sistema de vectores concurrentes.

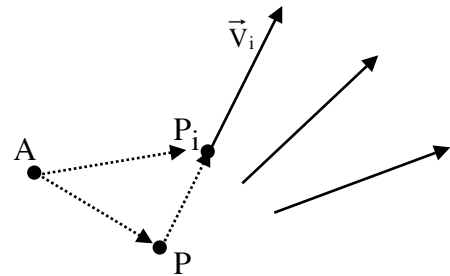
SOLUCION:

a) El momento de un vector $\vec{V}$ respecto a un punto A, es el producto vectorial del vector que va del punto A al origen del vector P con el propio vector $\vec{V}$.

$$\vec{M}_A \vec{V} = \vec{AP} \times \vec{V}$$

b) El teorema de Varignon dice que el momento de un sistema de vectores concurrentes (momento resultante) es igual al momento de la resultante aplicado en el punto de concurrencia.

Si tenemos un sistema de n vectores concurrentes $\vec{V}_i$, cada uno de ellos aplicado en un punto P_i , y que concurren en un punto P, el momento del sistema respecto a un punto A es:



$$\vec{M}_A = \sum_{i=1,n} \vec{AP}_i \wedge \vec{V}_i = \sum_{i=1,n} (\vec{AP} + \vec{PP}_i) \wedge \vec{V}_i = \sum_{i=1,n} \vec{AP} \wedge \vec{V}_i + \sum_{i=1,n} \vec{PP}_i \wedge \vec{V}_i$$

Sacando factor común a $\vec{AP}$ y teniendo en cuenta que $\vec{PP}_i$ es paralelo a $\vec{V}_i$ y por lo tanto $\vec{PP}_i \wedge \vec{V}_i = 0$ para todos los vectores i,

$$\vec{M}_A = \vec{AP} \wedge \sum_{i=1,n} \vec{V}_i = \vec{AP} \wedge \vec{R}$$



- 2) a) Cuando decimos que el movimiento es relativo ¿qué queremos decir?
 b) Si una partícula se mueve respecto a dos sistemas de referencia, que también se están moviendo entre sí. ¿Es posible algún caso en el que la velocidad de la partícula sea la misma con respecto a los dos sistemas de referencia? ¿Y la aceleración?
 c) El agua de un río se mueve con una velocidad uniforme de 0.5 m/s. Un estudiante nada corriente arriba una distancia de 1 km y después regresa, también nadando, al punto de partida. Si el estudiante puede nadar con el agua en calma a 1.2 m/s ¿cuánto tarde en el viaje? Comparar este tiempo con el que tardaría si el agua estuviese en calma.

SOLUCION

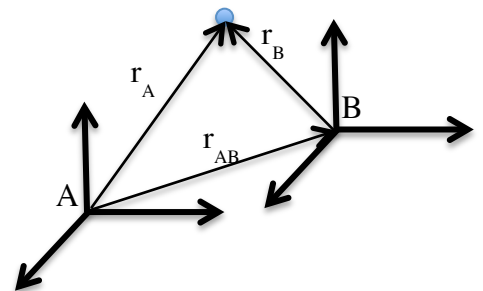
a) Queremos decir que el movimiento siempre depende del sistema de referencia respecto al cual se calcula. Una misma partícula describirá movimientos diferentes para diferentes sistemas de referencia.

b) Cuando una partícula se mueve respecto a dos sistemas de referencia A y B que se están moviendo entre si con una velocidad $\mathbf{V}_{AB}$ (velocidad de B respecto de A), la velocidad es siempre diferente, ya que si la velocidad respecto al sistema B es $\mathbf{V}_B$, la velocidad respecto al sistema A será:

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_{AB} + \mathbf{V}_B.$$

Si vemos la grafica, la relación anterior entre las velocidades se obtiene derivando la relación entre las posiciones:

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_B$$



En el caso de las aceleraciones, se cumplirá $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{AB} + \mathbf{a}_B$. Por este motivo, si la aceleración relativa entre los dos sistemas es 0 ($\mathbf{a}_{AB} = 0$), lo que ocurre cuando los dos sistemas son inerciales, las aceleraciones serán las mismas para el sistema A y el B. Por el contrario, si un sistema acelera respecto a otro, $\mathbf{a}_{AB} \neq 0$ por lo que los dos verán aceleraciones diferentes.

c) En el tramo de ida el estudiante nada contra corriente, la velocidad absoluta respecto a un sistema de referencia fijo en la orilla es $v_i = 1.2 - 0.5 = 0.7$ m/s

En el tramo de vuelta el estudiante nada a favor de la corriente, la velocidad absoluta respecto a un sistema de referencia fijo en la orilla es $v_v = 1.2 + 0.5 = 1.7$ m/s

El tiempo total en el viaje será la suma de la ida y la vuelta:

$$T = t_i + t_v = \frac{1000}{0.7} + \frac{1000}{1.7} = 1428.6 + 588.2 = 2016.8 \text{ s}$$

Cuando el agua está en calma, la velocidad es la misma en la ida y en la vuelta: 1.2 m/s, por lo que el tiempo total será:

$$T = t_i + t_v = \frac{1000}{1.2} + \frac{1000}{1.2} = 833.3 + 833.3 = 1666.6 \text{ s}$$

Por lo tanto tarda 1.2 veces mas con el agua en movimiento que con el agua en calma

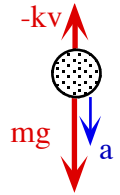


- 3) a) Analizar el tipo de movimiento que posee una partícula sometida a su propio peso y a una fuerza de rozamiento directamente proporcional a su velocidad. b) Representar aproximadamente la aceleración y la velocidad de la partícula en función del tiempo.

SOLUCION:

Aplicando la segunda ley de Newton, la suma de las fuerzas que actúan es igual a la masa por la aceleración:

$$mg - kv = ma \quad (3.1)$$

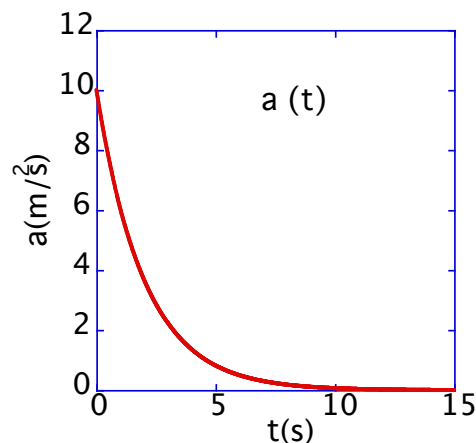
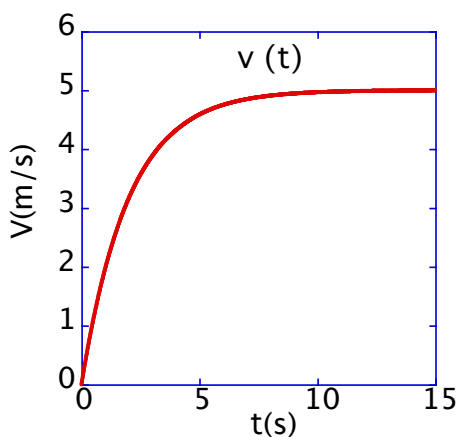


Si la partícula parte del reposo, la velocidad inicial es 0 y por lo tanto la aceleración inicial es: $a = g$.

A medida que pasa el tiempo, la partícula va adquiriendo velocidad por lo que la aceleración va disminuyendo.

Este proceso continua hasta que la velocidad es tan grande que la fuerza de rozamiento compensa al peso ($kv = mg$), y la aceleración es $a = 0$; alcanzándose entonces la velocidad límite: $v_L = mg/k$.

Las graficas aproximadas son:



En cuanto a determinar el **espacio recorrido** por la partícula, si lo queremos calcular **en función de la velocidad**, se parte de la ecuación (3.1): $mg - kv = ma$

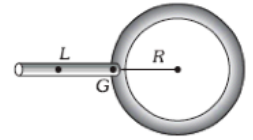
y sustituimos la aceleración tomando $a = dv/dx \cdot dx/dt = dv/dx \cdot v$

La ecuación que nos queda es $mg - kv = m (dv/dx) v$, Finalmente pasamos la v y el dv a un lado de la ecuación, el dx a otro, e integramos.

Si lo queremos calcular **en función del tiempo**, hay que hacerlo en dos pasos. Primero escribimos la aceleración como $a = dv/dt$ y sustituimos en la ecuación (3.1), nos queda $mg - kv = m \cdot dv/dt$. Despejando e integrando determinamos $v(t)$. En un segundo paso, como $v(t) = dx/dt$, despejamos el dx e integrando calculamos $x(t)$.



- 4) Tenemos un alambre homogéneo con el que hemos construido un objeto de la forma de la figura. (varilla de longitud L y radio del aro igual a R). Hallar la relación que debe existir entre R y L para que el centro de gravedad del sistema sea G .



SOLUCION

Primero definimos un sistema de referencia cuyo origen este en G , por lo que las coordenadas del centro de gravedad respecto a ese sistema serán $(0, 0)$. A continuación utilizamos la definición de centro de masas considerando que el cuerpo es la suma de dos cuerpos y, además, como el alambre es homogéneo, la masa es proporcional a la longitud:

$$x_G = \frac{L_A x_{GA} + L_B x_{GB}}{L_A + L_B}$$

$$L_A = L \quad L_B = 2\pi R$$

$$x_{GA} = -L/2 \quad x_{GB} = R$$

Por simetría, los centros de masas de la varilla y del círculo se encuentran en sus centros respectivos $(-L/2$ y $R)$.

Sustituyendo en la ecuación del centro de gravedad:

$$0 = \frac{L \cdot (-L/2) + 2\pi R \cdot R}{L + 2\pi R} \Rightarrow -L^2/2 + 2\pi R^2 = 0 \Rightarrow L = 2\sqrt{\pi}R$$



PROBLEMAS

1) Disponemos de un muelle vertical de cte. elástica $k = 1 \text{ kN/m}$, longitud natural 110 cm y masa despreciable sobre el que colocamos una lámina de 10 kg .

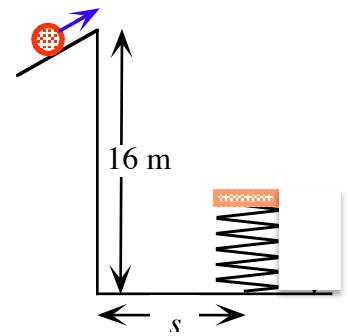
a) ¿Cuál es la nueva longitud del muelle una vez colocada dicha lámina?

Desde una azotea de 16 m de altura se lanza un balón de 1 kg a una velocidad de 20 m/s formando un ángulo de 30° con la horizontal.

b) ¿A qué distancia s debemos colocar el muelle para que el balón caiga sobre la lámina?

c) Una vez que el balón ha chocado con la lámina determinar las velocidades de ambos ($e = 0.8$) y la energía perdida en el choque.

d) ¿Cuál será la longitud del muelle en su máxima compresión?



SOLUCION

- a) Al colocar la lámina sobre la plataforma y dejarla en equilibrio la fuerza elástica se debe equilibrar con la fuerza del peso de la lámina, con lo que la contracción x del muelle y la nueva longitud L' serán:

$$mg = kx \Rightarrow x = \frac{mg}{k} = 9.8 \text{ cm} \Rightarrow L' = L - x = \boxed{100.2 \text{ cm}}$$

- b) Si colocamos el origen de coordenadas en la esquina izquierda del suelo (ver figura), los ejes X e Y hacia la derecha y hacia arriba y en ese momento ponemos a cero el cronómetro, las ecuaciones del movimiento parabólico del balón serán:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos \theta t & v_x(t) &= v_0 \cos \theta \\ y(t) &= y_0 + v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 & v_y(t) &= v_0 \sin \theta - g t \end{aligned}$$

En el momento que impacta contra la lámina sobre el muelle:

$$L' = y_0 + v_0 \sin \theta t_{\text{impacto}} - \frac{1}{2} g t_{\text{impacto}}^2 \Rightarrow t_{\text{impacto}} = 3.046 \text{ s (la otra solución no tiene sentido)}$$

Y en ese momento la distancia horizontal recorrida será:

$$s = v_0 \cos \theta t_{\text{impacto}} = \boxed{52.75 \text{ m}}$$

- c) Antes del choque la velocidad de cada uno es:

$$v_{\text{balón},x} = v_0 \cos \theta = 17.32 \text{ m/s}$$

$$v_{\text{balón},y} = v_0 \sin \theta - g t_{\text{impacto}} = -19.85 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{\text{lámina}} = 0$$

En el choque sólo cambian las componentes verticales del movimiento para los dos cuerpos, balón y lámina. En el choque se conserva el momento lineal. En concreto para la componente vertical:

$$m_{\text{balón}} v_{\text{balón},y} + m_{\text{lámina}} v_{\text{lámina},y} = m_{\text{balón}} v'_{\text{balón},y} + m_{\text{lámina}} v'_{\text{lámina},y}$$

Por otro lado tenemos la ecuación asociada al coeficiente de restitución:



$$e = -\frac{v'_{lámina,y} - v'_{balón,y}}{v_{lámina,y} - v_{balón,y}}$$

Con estas dos ecuaciones tenemos que:

$$v'_{balón,y} = 12.63 \text{ m/s} \quad v'_{lámina,y} = -3.25 \text{ m/s}$$

La energía perdida en el choque será (téngase en cuenta que las componentes x de las velocidades no cambian):

$$\begin{aligned} \Delta E &= K_{final} - K_{inicial} = \left(\frac{1}{2} m_{balón} v_{balón}^2 + \frac{1}{2} m_{lámina} v_{lámina}^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_{balón} v_{balón}^2 + \frac{1}{2} m_{lámina} v_{lámina}^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} m_{balón} v_{balón,y}^2 + \frac{1}{2} m_{lámina} v_{lámina,y}^2 - \frac{1}{2} m_{balón} v_{balón,y}^2 = \boxed{-64.47 \text{ J}} \end{aligned}$$

Que el resultado sea negativo indica que se pierde energía en el choque.

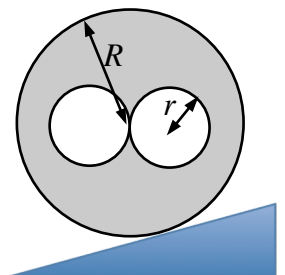
- d) Justo después del choque la lámina se encuentra en su situación inicial de equilibrio (ver apartado a) moviéndose hacia abajo con una cierta velocidad (ver apartado c) con lo que su movimiento posterior será un Mov. Armónico Simple. La velocidad que tiene inicialmente hacia abajo será la máxima que tendrá en dicho M.A.S. (ya que es la velocidad que tiene al pasar por su posición de equilibrio) y la amplitud A del M.A.S. que va a realizar será:

$$v_{lámina,máx.} = |v'_{lámina,y}| = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m_{lámina}}} A \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m_{lámina}}{k}} |v'_{lámina,y}| = 32.5 \text{ cm}$$

Con lo cual es su máxima compresión la nueva longitud del muelle será:

$$L'' = L' - A = \boxed{67.7 \text{ cm}}$$

2) Tenemos una pieza de masa M obtenida a partir de un cilindro homogéneo de radio R al que se le han practicado dos cavidades cilíndricas en su interior de radio $r = 0.344R$ (ver figura). Dicha pieza va a bajar rodando sin deslizar por un plano inclinado un ángulo θ . Si su momento de inercia respecto del eje de rotación durante su descenso lo escribimos como $I = kMR^2$.



a) Demostrar que el valor numérico de k es 0.6.

b) Discutir cómo se puede entender el resultado numérico obtenido comparándolo con el valor que tendríamos si la pieza fuese maciza (0.3).

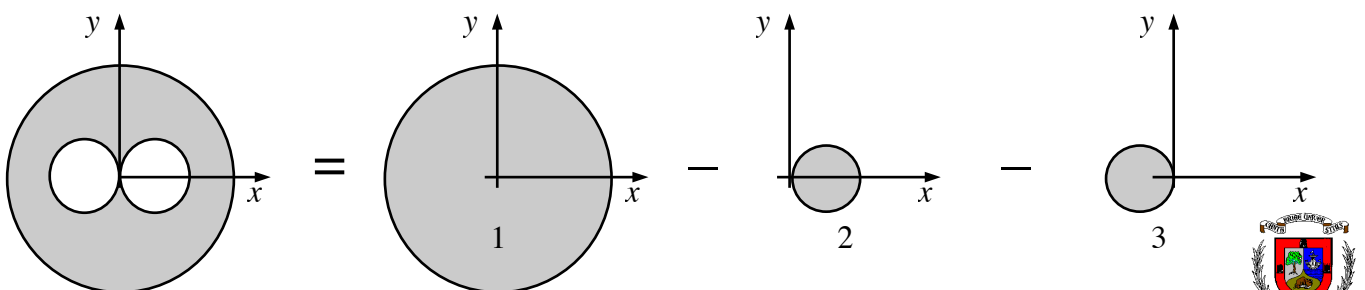
c) Calcular la aceleración con la que baja

d) Calcular la fuerza de rozamiento que actúa sobre la pieza.

e) Si recorre una distancia d a lo largo del plano discuta y calcule cuál será la variación de la energía mecánica que habrá experimentado a lo largo de dicho recorrido.

SOLUCION

- a) Podemos tratar dicha pieza como la contribución de tres piezas:



El momento de inercia respecto del eje Z de la pieza 1 será:

$$I_{z,1} = \frac{1}{2} M_1 R^2 = \frac{1}{2} (\rho \pi R^2 H) R^2 = \frac{1}{2} \rho \pi H R^4$$

Si llamamos Z' a un eje paralelo al eje Z y que pase por el centro de la pieza 2 utilizando el teorema de Steiner podemos calcular su momento de inercia respecto del eje Z:

$$\begin{aligned} I_{z,2} &= I_{z',2} + M_2 r^2 = \frac{1}{2} M_2 r^2 + M_2 r^2 = \frac{3}{2} M_2 r^2 = \frac{3}{2} (\rho \pi r^2 H) r^2 = \frac{3}{2} \rho \pi H r^4 = \\ &= \frac{3}{2} \rho \pi H (0.344R)^4 = 2.101 \cdot 10^{-2} \rho \pi H R^4 \end{aligned}$$

Para la pieza tres tenemos el mismo valor, con lo que el momento de inercia de toda la pieza será:

$$I_z = I_{z,1} - I_{z,2} - I_{z,3} = \frac{1}{2} \rho \pi H R^4 - 2(2.101 \cdot 10^{-2} \rho \pi H R^4) = 0.4580 \rho \pi H R^4$$

Finalmente calculando el valor de la densidad volúmica ρ y sustituyendo:

$$\rho = \frac{M_{pieza}}{V_{placa}} = \frac{M_{pieza}}{\pi R^2 H - 2\pi r^2 H} = \frac{M_{pieza}}{\pi R^2 H - 2\pi (0.344R)^2 H} = 1.310 \left(\frac{M_{pieza}}{\pi R^2 H} \right) \Rightarrow$$

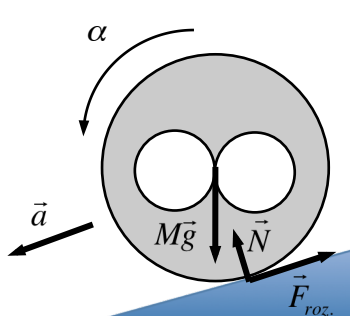
$$\Rightarrow I_z = 0.4580 \left(1.310 \frac{M_{pieza}}{\pi R^2 H} \right) \pi H R^4 = 0.6000 M_{pieza} R^2$$

b) Si la pieza hubiese sido maciza la expresión de su momento de inercia habría sido:

$$I_z = \frac{1}{2} M_{pieza} R^2 = 0.5 M_{pieza} R^2$$

Se puede entender que el coeficiente en nuestro caso sea mayor ($0.6 > 0.5$) ya que la masa de la pieza se encuentra por término medio más alejada del eje que en el caso del cilindro macizo, con lo cual contribuye más al momento de inercia.

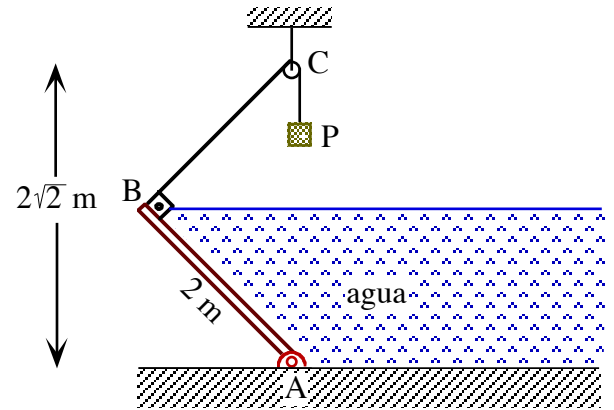
c) y d) Dibujando el diagrama de fuerzas, planteando la segunda ley de Newton para traslaciones y rotaciones y teniendo en cuenta la condición de rodadura:

$$\left. \begin{aligned} Mg \sin \theta - F_{roz.} &= Ma \\ F_{roz.} R &= I_z \alpha \\ \alpha &= \frac{a}{R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= \frac{5}{8} g \sin \theta \\ \alpha &= \frac{5}{8} \frac{g}{R} \sin \theta \\ F_{roz.} &= \frac{3}{8} Mg \sin \theta \end{aligned}$$


e) Como la fuerza de rozamiento que actúa sobre la pieza es estática (debido a la condición de rodadura) no realiza trabajo con lo cual la energía mecánica del sistema se conserva y por lo tanto su variación es nula.

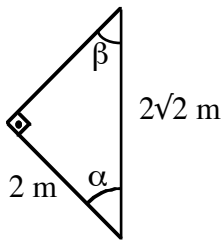
3) La compuerta AB de la figura de un peso de 200 kg, articulada en A, y cuyas dimensiones son $a = AB = 2\text{ m}$ y $b = 1\text{ m}$ (Longitud, normal al plano de la fig.); está soportada por medio de una cadena BC que pasa por una polea de radio muy pequeño situada en C, sobre la vertical que pasa por A, y por medio de un peso P. En la posición de la figura:

- Determinar la presión absoluta en el fondo del embalse.
- Calcular la fuerza que ejerce el agua sobre la compuerta.
- Determinar el punto de aplicación de dicha fuerza.
- Representa todas las fuerzas que actúan sobre la compuerta.
- Calcular P para que el sistema este en equilibrio.



SOLUCION

a) primer paso será determinar la altura de agua para lo cual representamos el triangulo ABC



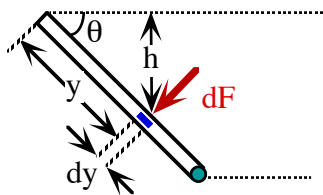
$$\text{por el teorema del seno: } \frac{2}{\sin \beta} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 90} \Rightarrow \beta = 45^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$\text{La altura de agua es } h = 2 \cos 45 = \sqrt{2} \text{ m}$$

$$\text{La presión absoluta será: } P = P_{\text{atm}} + \rho g h = 1.013 \cdot 10^5 + 1000 \cdot 9.81 \cdot \sqrt{2} = 1.013 \cdot 10^5 + 0.139 \cdot 10^5 \Rightarrow$$

$$P = 1.152 \cdot 10^5 \text{ Pascales} = 1.137 \text{ atm}$$

b) La fuerza ejercida por el agua sobre la placa será únicamente debida a la presión ejercida por el agua, que a una profundidad h es $P = \rho g h$. Si consideramos una franja de la presa de anchura dy y longitud b , toda ella situada a una profundidad h , la fuerza que actúa sobre la misma será:



$$dF = P ds = P b dy = \rho g h b dy = \rho g y \cos \theta b dy$$

Para calcular la fuerza total sobre la presa debemos integrar dF entre la superficie del agua y el extremo inferior de la presa. La "altura" de la compuerta es $L = AB = 2\text{ m}$:

$$F = \int_0^L \rho g y \sin \theta b dy = \rho g \sin \theta b \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^L = (1/2) \rho g \sin \theta b L^2 \Rightarrow$$

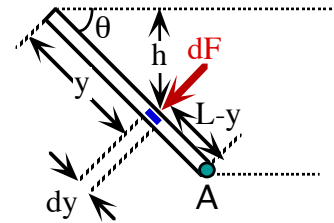
$$F = (1/2) \cdot 10^3 \cdot 9.81 \cdot \sin 45 \cdot 1 \cdot 2^2 = 13873 \text{ N}$$

b) El punto de aplicación de la fuerza F sobre la presa será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos)



El momento respecto al punto A de un dF actuando sobre una franja a una profundidad h será:

$$dM = dF (L-y) = \rho g y \cos\theta b dy (L-y)$$



donde hemos tomado el valor de dF calculado en el apartado anterior. Para calcular el momento total, integramos entre el borde superior e inferior de la presa:

$$M = \int_0^L \rho g y \cos\theta b (L-y) dy = \rho g \cos\theta b \int_0^L (Ly - y^2) dy = \rho g \cos\theta b \left(L \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^L - \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^L \right) \Rightarrow$$

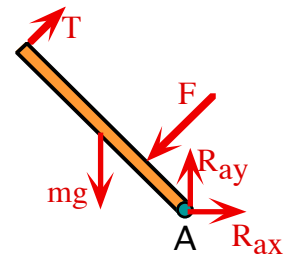
$$\boxed{M = \rho g \cos\theta b \left(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3} \right) = \frac{1}{6} \rho g \cos\theta b L^3}$$

Si el punto de aplicación esta a una distancia d respecto a la parte inferior de la presa a lo largo de la compuerta, tiene que verificarse que

$$Fd = M \Rightarrow$$

$$d = \frac{M}{F} = \frac{(1/6) \rho g \cos\theta b L^3}{(1/2) \rho g \cos\theta b L^2} \Rightarrow \boxed{d = (1/3) L} \Rightarrow \boxed{d = 0.667 \text{ m}}$$

c) Las fuerzas que actúan sobre la compuerta son las representadas en la figura:



d) En principio, no es necesario determinar R_{ax} y R_{ay} , por lo que si calculamos momentos respecto al punto A, podremos despejar directamente T: como la compuerta está en equilibrio $\sum M_A = 0 \Rightarrow$

$$2 T - mg \cdot 1 \sin 45 - F (1/3) 2 = 0 \Rightarrow \boxed{T = \frac{mg}{2\sqrt{2}} + \frac{F}{3} = 693.7 + 4624.3 = 5318 \text{ N}}$$

La tensión se propaga por la cuerda y soporta el peso P que esta en equilibrio, por lo que

$$P - T = 0 \Rightarrow \boxed{P = T = 5318 \text{ N}}$$

Que corresponde a una masa

$$\boxed{m = P/g = 542 \text{ kg}}$$

