GRADO EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES EXAMEN DE FíSICA I 4-9-2014

CUESTIONES

1. Dado el sistema de fuerzas $\mathbf{F_1}=2\mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{F_2} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{F_3} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

   a) Determinar el módulo de la resultante y su dirección expresada utilizando los cosenos directores **(0.3).**

   b) Calcular el momento resultante respecto al origen si las tres fuerzas están aplicadas en el punto P de coordenadas (1,1,-1) **(0.2).**

   c) Utilizar la fuerza resultante para calcular el apartado anterior. ¿Que teorema se utiliza? ¿Bajo que condiciones es valido utilizar dicho teorema? **(0.5)**.

SOLUCION:

a) La resultante es la suma de los vectores:

$$\mathbf{F_1} = (2, 0, -1)$$
$$\mathbf{F_2} = (0, 1, 2)$$
$$\mathbf{F_3} = (1, 1, 0),$$
$$\boxed{\mathbf{R} = (3, 2, 1)}$$

$$|R| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14} = 3.74$$

$$\mathbf{R}\,\mathbf{i} = |\mathbf{R}|\,|\mathbf{i}|\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 3/3.74 \Rightarrow \alpha = 36.66°$$
$$\mathbf{R}\,\mathbf{j} = |\mathbf{R}|\,|\mathbf{j}|\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = 2/3.74 \Rightarrow \alpha = 57.67°$$
$$\mathbf{R}\,\mathbf{k} = |\mathbf{R}|\,|\mathbf{k}|\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = 1/3.74 \Rightarrow \alpha = 74.49°$$

b) El momento resultante es la suma de los momentos

$$\mathbf{M_oF_1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(-1 + 0) + \mathbf{j}\,(-2 + 1) + \mathbf{k}\,(0 - 2) = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M_oF_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(2 + 1) + \mathbf{j}\,(0 - 2) + \mathbf{k}\,(1 - 0) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{M_oF_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(0 + 1) + \mathbf{j}\,(-1 + 0) + \mathbf{k}\,(1 - 1) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$$

El momento resultante es la suma de los momentos: $\boxed{\Sigma \mathbf{M_o} = 3\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} - \mathbf{k}}$

c) $\mathbf{M_oR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(1+2) + \mathbf{j}\,(-3-1) + \mathbf{k}\,(2-3) = 3\,\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$

El momento de la resultante coincide con el momento resultante. El teorema utilizado es el teorema de Varignon, que dice que el momento resultante de un sistema de vectores concurrentes es igual al momento de la resultante aplicado en el punto de concurrencia.

---

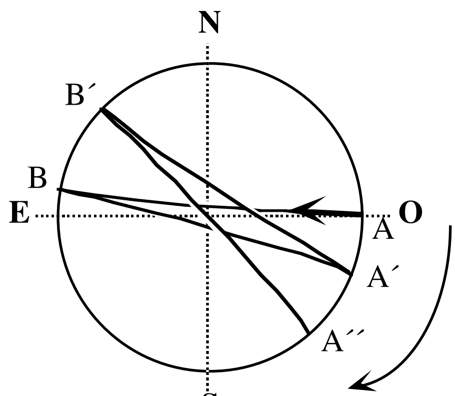
2. Péndulo de Foucault: ¿Qué es? ¿Para que sirve? ¿En que ley o principio físico se basa? Explica su funcionamiento (1).

SOLUCION:

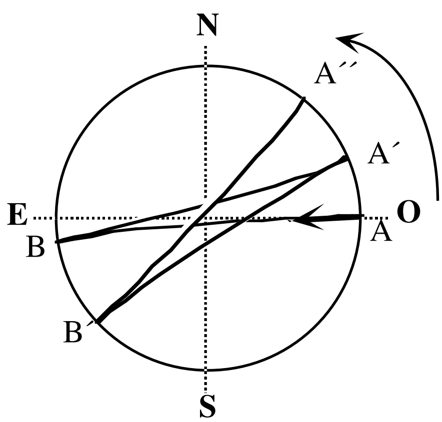
El péndulo de Foucault es un péndulo simple de gran tamaño. Foucault construyó su péndulo en 1851 y lo colgó de la Torre de los Inválidos, en París, para demostrar que la Tierra está girando. El plano de oscilación del péndulo gira 360° en 24 horas. En realidad, el plano de oscilación no es el que gira, sino la Tierra.

En el Hemisferio Norte el plano de oscilación gira en sentido horario, mientras que en el Hemisferio Sur lo hace en el antihorario. Esta variación puede entenderse en términos de la aceleración coriolis: para un observador situado en el Hemisferio Norte, cuando el péndulo realiza una oscilación, sufre una aceleración de Coriolis ($-2\,\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}'$)dirigida hacia la derecha del movimiento, lo que hace que el plano de oscilación gire en sentido horario (ver figura).

Si nos encontramos en el Hemisferio Sur, la aceleración de coriolis va dirigida hacia la izquierda del movimiento, lo que produce que el plano de oscilación gire en sentido antihorario (ver figura).



Hemisferio norte



Hemisferio sur

3. Choque central entre dos partículas:

a) ¿Cuál es el valor máximo y mínimo del coeficiente de restitución e? Comenta qué le pasa a las partículas después del choque en ambos casos (0.5).

b) Demuestra que cuando e = 1 se conserva la energía cinética del sistema (0.5).

Nota: ($e = -\dfrac{v'_B - v'_A}{v_B - v_A}$).

SOLUCION:

a) El valor máximo es 1 y el es mínimo 0. En el primer caso, el choque es elástico, y las partículas se separan entre si con una velocidad máxima. En el segundo caso el choque es inelástico, y las partículas se quedan “pegadas”, moviéndose las dos con la misma velocidad.
Para e = 1 se conserva la energía mecánica, mientras que cuando e = 0 se pierde la mayor energía posible.

b) Por la conservación del momento:

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \Rightarrow m_A \boxed{(v_A - v'_A)} = m_B \boxed{(v'_B - v_B)}$$

$$\text{Si } e = 1 \quad \Rightarrow \quad (v_B - v_A) = -(v'_B - v'_A) \quad \Rightarrow \boxed{v_A + v'_A} = \boxed{v_B + v'_B}$$

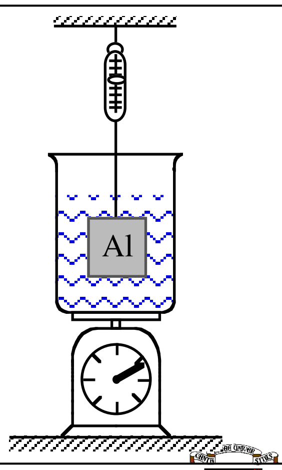
El producto de los términos de la izquierda de las ecuaciones anteriores, tiene que ser igual al producto de los términos de la derecha:

$$m_A (v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = m_B (v'_B - v_B)(v_B + v'_B) \Rightarrow m_A v_A^2 - m_A v'^2_A = m_B v'^2_B - m_B v_B^2$$

Multiplicando los dos miembros de esta última ecuación por (1/2) y despejando los términos iniciales a la izquierda y los finales a la derecha de la ecuación se transforma en :

$$\boxed{(1/2)\, m_A v_A^2 + (1/2)\, m_B v_B^2 = (1/2)\, m_A v'^2_A + (1/2)\, m_B v'^2_B}$$

que es la ecuación de conservación de la energía cinética.

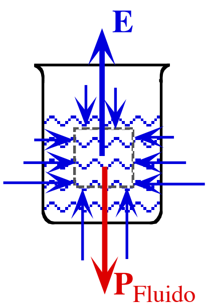


4. a) Enunciar y razonar el principio de Arquímedes **(0.5)**.

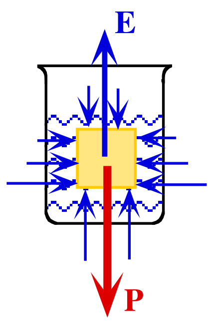
b) Tenemos un bloque de aluminio de 2 kg (densidad 2.7 g/cm^3) colgado de una balanza de muelle (ver figura). Sobre una balanza de platillo descansa un recipiente de 1.5 kg en cuyo interior hay 1kg de agua. ¿Cuales serán las lecturas de las balanzas de muelle y de platillo cuando se sumerja el bloque de aluminio en el agua como se indica en la figura? **(0.5)**.

SOLUCION:

a) El principio de Arquímedes dice que todo cuerpo sumergido en el seno de un fluido experimenta una fuerza ascensorial (empuje) igual al peso del volumen desalojado.



Una demostración sencilla es considerar un fluido en reposo en el que aislamos mentalmente un volumen de fluido igual al volumen del objeto. Ese volumen de fluido esta en reposo, y sin embargo tiene un peso que actúa sobre su centro de masas. Este volumen imaginario esta en equilibrio debido a las fuerzas de la presión que ejerce el resto del fluido sobre su superficie: la presión es mayor en la parte inferior originando una fuerza neta (el empuje) que se opone al peso.



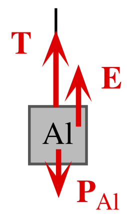
Si ahora sustituimos nuestro volumen imaginario por el objeto de igual forma, la presión en el fluido no cambia, por lo que las fuerzas que origina sobre la superficie del objeto son las mismas que en caso anterior y por lo tanto son iguales al peso del fluido desalojado, llevando sentido contrario.

b) Primero calculamos el empuje sobre el bloque de aluminio. Para calcularlo, hay que determinar el volumen del aluminio: $V_{al} = m_{al}/\rho_{al} = 2 / 2700 = 7.407\ 10^{-4}\ m^3$

$$\boxed{E = V_{al}\ \rho_{ag}\ g = 7.4\ 10^{-4}\ 1000\ g = 0.74\ g\ \ N}$$

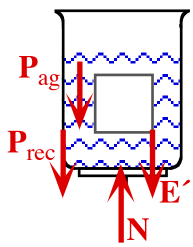
Sobre el bloque de aluminio actúan tres fuerzas, la tensión, el peso y el empuje. Como está en equilibrio se cumple:

$$T + E - P_{al} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = P_{al} - E\ = 2\ g - 0.74\ g = 1.26\ g\ N}$$



Lo que marca la balanza de muelle en kg es la T/g $\Rightarrow$ $\boxed{m_{muelle} = 1.26\ kg}$

Si el agua ejerce un empuje E sobre el aluminio, el aluminio ejerce una reacción E´ sobre el agua. Las fuerzas que actúan sobre al base del platillo son el peso del agua, el peso del recipiente, E´ y la normal N.



$$N - P_{ag} - P_{rec} - E' = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = P_{ag} + P_{rec} + E' = 1\ g + 1.5\ g + 0.74\ g = 3.24\ g\ N}$$

Lo que marca la balanza de platillo en kg es la N/g $\Rightarrow$ $\boxed{m_{platillo} = 3.24\ kg}$

Como comprobación, entre las dos balanzas tienen que soportar todo el peso (aluminio, recipiente y agua. Efectivamente, la masa total de los tres objetos es de 4.5 kg, y lo que marcan las balanzas es

$$3.24 + 1.26 = 4.5\ kg$$

PROBLEMAS

1. Una saltadora de 60.0 kg salta de un puente unida a él por una cinta elástica de 10.0 m de largo. Ella llega al punto más bajo de su movimiento a 35.0 m debajo del puente antes de regresar. Su movimiento se puede descomponer en una caída libre de 10.0 m y una segunda parte de 25.0 m de M.A.S.
a) ¿Durante qué intervalo está ella en caída libre? **(0.3)**
b) Use el principio de conservación de la energía para hallar la constante elástica de la cinta **(0.5)**.
c) ¿Cuál es la ubicación del punto de equilibrio donde la fuerza elástica equilibra la fuerza gravitatoria sobre la saltadora? **(0.3)**
d) ¿Cuál es la frecuencia angular de la oscilación? **(0.3)**
e) ¿Qué intervalo de tiempo se requiere para que la cinta se estire 25.0 m durante dicho M.A.S.? **(0.6)**

Solución:

a) Si tomamos el origen de alturas en la posición del puente, ponemos en ese momento a cero el cronómetro y consideramos que la velocidad vertical inicial era nula, cuando ha descendido a una altura de –10 m tenemos que:

$$y_{\substack{caida\\libre}} = -\frac{1}{2} g t^2_{\substack{caida\\libre}} \quad \Rightarrow \quad t_{\substack{caida\\libre}} = \boxed{1.429 \text{ s}}$$

b) Igualando la energía total del sistema (cinética, pot. gravitatoria y pot elástica) al principio y al final, y llamando h a la diferencia de altura entre el puente y el punto más bajo (35 m) y $x_{máx.}$ al máximo alargamiento de la cinta elástica (25 m):

$$\Delta\left(K + U_{grav.} + U_{elást.}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta K + \Delta U_{grav.} + \Delta U_{elást.} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 - mgh + \frac{1}{2} k x^2_{máx.} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2mgh}{x^2_{máx.}} = \boxed{65.86 \text{ N/m}}$$

c) En la situación de equilibrio:

$$F_{elást.} = F_{grav.} \quad \Rightarrow \quad k x_{equil.} = mg \quad \Rightarrow \quad x_{equil.} = \frac{mg}{k} = \boxed{8.93 \text{ m}}$$

Es decir a 18.93 m por debajo del puente.
La parte de M.A.S. que realiza la saltadora tiene una amplitud de $A = x_{máx.} - x_{equil.} = 16.07$ m .

d) La frecuencia angular de la oscilación viene dada por: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \boxed{1.048 \text{ rad/s}}$

e) Si ponemos a cero el cronómetro cuando la saltadora se encuentra en el punto más bajo y medimos posiciones respecto a la posición de equilibrio y con sentido positivo hacia abajo, la ecuación del M.A.S. será (téngase en cuenta que en el punto más bajo la distancia a la posición de equilibrio es máxima):

$$y(t) = A\cos(\omega t)$$

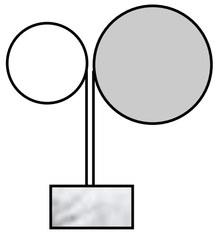
Cuando la cinta empezó a estirarse la saltadora se encontraba a 8.93 m por encima del punto de equilibrio, $y_{inicial} = -8.93$ m , y eso ocurrió en el instante:

$$y_{inicial} = A\cos(\omega t_{inicial}) \quad \Rightarrow \quad t_{inicial} = -2.062 \text{ s}$$

con lo que el intervalo de tiempo durante el cual se estiró 25 m la cinta fue: $\boxed{2.062 \text{ s}}$

---

2. En un sistema como el de la figura constituido por un anillo de radio r_1 = 0.1 m y masa m_1= 5 kg, un cilindro homogéneo de radio r_2 = 0.15 m y masa m_2 = 10 kg y un bloque de masa *m* de 15 kg, soltamos éste último desde el reposo y la dejamos descender 5 m a medida que las cuerdas se desenrollan del anillo y del cilindro. Despreciando el rozamiento y teniendo en cuenta que el anillo y el cilindro están fijos, calcular:
a) la velocidad final de la masa *m* **(0.6)**
b) su aceleración **(0.6)**
c) las aceleraciones angulares del anillo y del cilindro **(0.4)**
d) la tensión en las cuerdas **(0.4)**.



Solución:

a) Si tomamos el sentido positivo de movimiento hacia abajo para la masa que cae y tomamos sentidos positivos de giro horario para el anillo y antihorario para el cilindro sus velocidades angulares estarán relacionadas con la velocidad de caída del cuerpo: $\omega_1 = \frac{v}{r_1}$ y $\omega_2 = \frac{v}{r_2}$.

Tomando como origen de energía potencial gravitatoria cuando se encuentra *m* en el punto más bajo y aplicando la conservación de la energía:

$$\left.\begin{array}{c} E_{arriba} = mgh \\ E_{abajo} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 \\ I_1 = m_1 r_1^2 \qquad I_2 = \frac{1}{2}m_2 r_2^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} E_{arriba} = E_{abajo} \quad \Rightarrow \quad \ldots \\ v = \sqrt{\dfrac{2mgh}{m + m_1 + \frac{m_2}{2}}} = \boxed{7.67 \text{ m/s}} \end{array}$$

b) En un movimiento uniformemente acelerado tenemos que: $v^2 = v_0^2 + 2ah$ donde h es el recorrido realizado por el cuerpo desde la situación inicial. En nuestro caso la velocidad inicial v_0 es nula y por comparación con el resultado anterior:

$$v^2 = 2\left(\frac{mg}{m + m_1 + \frac{1}{2}m_2}\right)h \quad \Rightarrow \quad a = \frac{mg}{m + m_1 + \frac{m_2}{2}} = \boxed{5.88 \text{ m/s}^2}$$

c) Para el anillo y el cilindro tenemos: $\alpha_1 = \frac{a}{r_1} = \boxed{58.8 \text{ rad/s}^2}$ $\quad \alpha_2 = \frac{a}{r_2} = \boxed{39.2 \text{ rad/s}^2}$

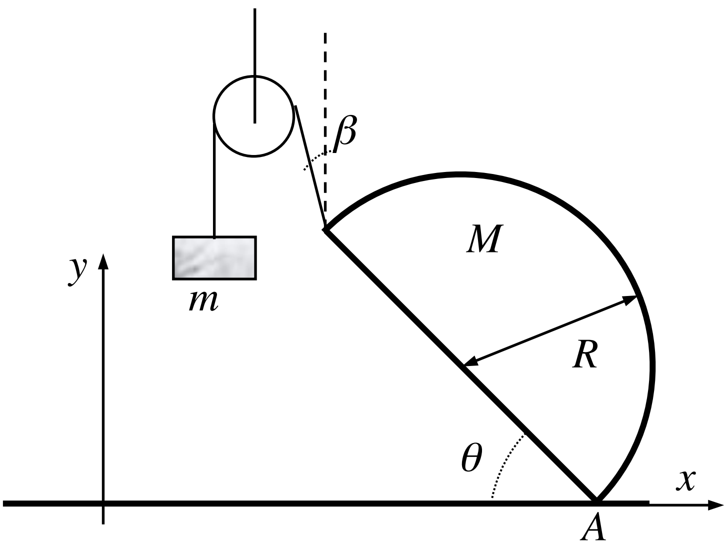
d) Aplicando la segunda ley de Newton a la rotación del anillo y del cilindro

$$T_1 r_1 = I_1 \alpha_1 = \left(m_1 r_1^2\right)\left(\frac{a}{r_1}\right) = m_1 a\, r_1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = m_1 a = \boxed{29.4 \text{ N}}$$

$$T_2 r_2 = I_2 \alpha_2 = \left(\frac{1}{2}m_2 r_2^2\right)\left(\frac{a}{r_2}\right) = \frac{1}{2}m_2 a r_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{1}{2}m_2 a = \boxed{29.4 \text{ N}}$$

---

3. Una placa en forma de semidisco uniforme de radio R = 1 m y masa M = 1 kg está apoyada en un suelo rugoso en el punto A. Su diámetro forma un ángulo θ = 45° con la horizontal, y está enganchada a una cuerda que forma un ángulo β = 15° con la vertical (ver figura).
   a) Encontrar la distancia entre el C.M. de la placa y el punto A **(0.6)**. **No se puede dar por sabido dónde se encuentra el C.M. hay que demostrarlo mediante cálculos.**
   b) Encontrar la masa m del bloque colgado del otro extremo de la cuerda que hace que el sistema se encuentre en equilibrio **(0.7)**.
   c) Determinar el coeficiente de rozamiento mínimo necesario en el contacto con el suelo rugoso para que el sistema esté en equilibrio **(0.7)**.



Solución:

a) Utilizando el segundo teorema de Pappus Guldin se demuestra que el C.M. se encuentra a una distancia $d = \frac{4R}{3\pi}$ del centro de la circunferencia. La distancia s del C.M. al punto A será:

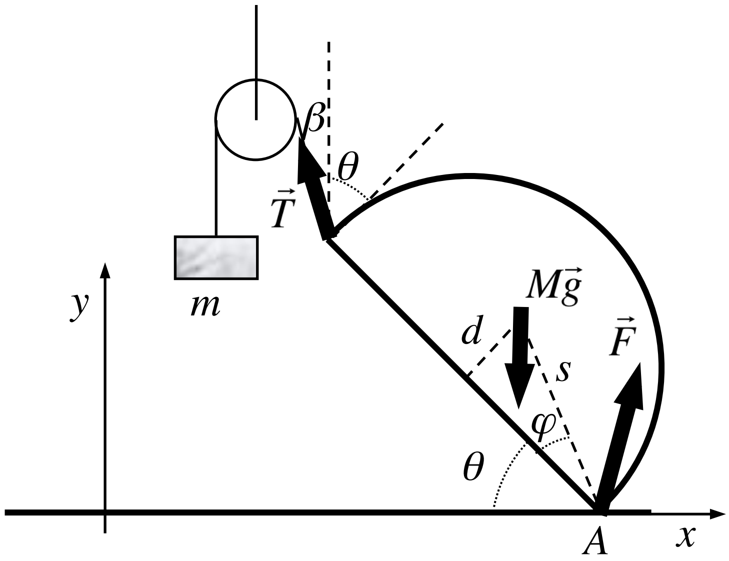
$$s = \sqrt{R^2 + d^2} = R\sqrt{1 + \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2} = \boxed{1.086 \text{ m}}$$

b) En el equilibrio para la masa m tenemos que: $T = mg$.

Por otro lado el momento neto sobre la placa debe ser nulo:

$$T(2R)\cos(\beta+\theta) = Mgs\cos(\varphi+\theta)$$

de las dos ecuaciones: $m = \left(\dfrac{s}{2R}\right)\dfrac{\cos(\varphi+\theta)}{\cos(\beta+\theta)}M = \boxed{0.4070 \text{ kg}}$



c) La fuerza neta sobre la placa es nula en el equilibrio con lo que la fuerza de contacto en el punto A (fuerza de rozamiento y normal) será:

$$F_{roz.} = F_x = T\,\mathrm{sen}(\beta) = mg\,\mathrm{sen}(\beta) = 0.1053Mg$$

$$N = F_y = Mg - T\cos(\beta) = Mg\left[1-\left(\frac{m}{M}\right)\cos(\beta)\right] = 0.6069Mg$$

La fuerza de rozamiento es estática con lo que:

$$F_{roz.} \le F_{\substack{roz.\\ máx.}} = \mu_{est.}N \quad \Rightarrow \quad \mu_{est.} \ge \frac{F_{roz.}}{N} = \boxed{0.1736}$$