EXAMEN DE FISICA I (GTI) 5-9-2013

CUESTIONES

1) Los vectores (–3, 2, –1), (1, –3, 5) y (2, 1, –4), están aplicados en los puntos a (2, 1, 2), b (–1, 0, 1) y c (1, 2, 0) respectivamente. Calcular:
a) la resultante **(0.2)**.
b) el momento resultante respecto del origen **(0.4)**.
c) el momento resultante respecto del punto P (5, 8, –3) **(0.4)**.

SOLUCION:

a) La resultante es la suma de los vectores:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= (-3, 2, -1)\\ \mathbf{B} &= (1, -3, 5)\\ \mathbf{C} &= (2, 1, -4),\\ \hline \mathbf{R} &= \boxed{(0, 0, 0)}\end{aligned}$$

b) El momento resultante es la suma de los momentos

$$\mathbf{M_o A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(-1-4) + \mathbf{j}\,(-6+2) + \mathbf{k}\,(4+3) = -5\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 7\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M_o B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(0+3) + \mathbf{j}\,(1+5) + \mathbf{k}\,(3-0) = 3\,\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M_o C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(-8-0) + \mathbf{j}\,(0+4) + \mathbf{k}\,(1-4) = -8\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}$$

El momento resultante es la suma de los momentos: $\boxed{\sum \mathbf{M_o} = -10\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 7\,\mathbf{k}}$

c) La relación entre el momento resultante respecto al origen O y respecto a un punto P es

$$\mathbf{M_P} = \mathbf{M_O} - \mathbf{OP} \wedge \mathbf{R}$$

Como la resultante es nula $\mathbf{R} = 0$, $\sum \mathbf{M_P} = \sum \mathbf{M_O} \Rightarrow \boxed{\mathbf{M_P} = -10\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 7\,\mathbf{k}}$

2) a) Define y explica brevemente las leyes de Newton **(0.6)**.
b) A partir del principio de conservación del momento lineal para un sistema de dos partículas razonar y deducir la 3ª ley de Newton **(0.4)**.

SOLUCION:
a)
La **primera ley** se la conoce como ley de inercia y dice que una partícula libre mantiene su estado de movimiento, es decir que si estaba en reposo, sigue en reposo, y si se movía con una velocidad v, mantiene dicha velocidad. Una partícula es libre si no está sujeta a ninguna interacción

$$\text{Partícula libre} \Rightarrow \mathbf{v} = \text{cte}$$

La **segunda ley** dice que para cambiar el estado de movimiento (producir una aceleración) hay que aplicar una fuerza. Para un objeto determinado, la relación entre la fuerza aplicada y la aceleración del objeto es constante **F/a** = Cte. Esta constante es la masa del objeto (**F/a** = m), por lo que la masa nos da una medida de la inercia de un cuerpo a cambiar su estado de movimiento. La segunda ley se suele enunciar como:

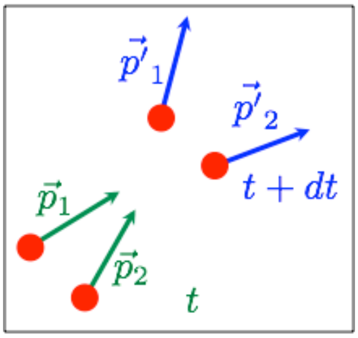
F = m**a**

La **tercera ley** se la conoce como ley de acción y reacción y dice que las fuerzas siempre actúan por pares: si un cuerpo A ejerce una fuerza $\mathbf{F}_{AB}$ sobre otro B , el cuerpo B, a su vez, realiza una fuerza $\mathbf{F}_{BA}$ sobre el A, de tal forma que las dos fuerzas tienen el mismo módulo, la misma dirección pero sentidos contrarios $\mathbf{F}_{AB}$ = -$\mathbf{F}_{BA}$ Además, cada fuerza actúa en un cuerpo distinto.

b) Las leyes de newton (1ª y 3ª) se pueden deducir directamente a partir del **principio general de conservación del momento lineal**: en un sistema aislado, el momento lineal se conserva. La 1ª se deduce aplicando dicho principio aun cuerpo:

$$\vec{p} = \text{cte.} \Rightarrow m\vec{v} = \text{cte.} \Rightarrow \vec{v} = \text{cte.}$$

y la 3ª aplicándolo a un sistema formado por dos cuerpos aislados:



$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p'}_1 + \vec{p'}_2 \Rightarrow \vec{p'}_1 - \vec{p}_1 = -(\vec{p'}_2 - \vec{p}_2) \Rightarrow$$

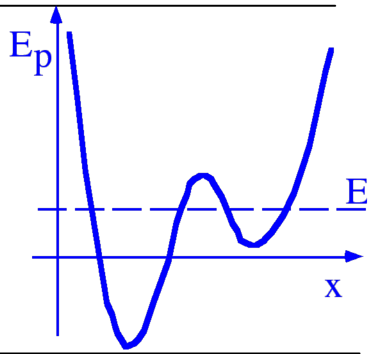
$$\Rightarrow d\vec{p}_1 = -d\vec{p}_2 \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Donde hemos aplicado la definición de fuerza:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

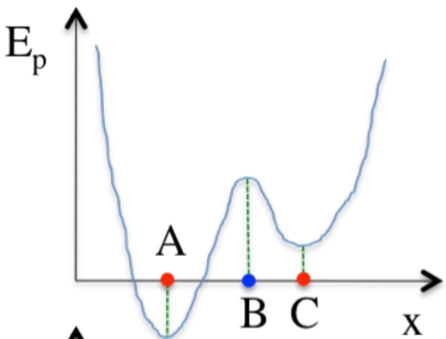
Lo que se corresponde con la 2ª ley de Newton

3) Tenemos una partícula realizando un movimiento unidimensional a lo largo del eje X y sometida a fuerzas conservativas cuya energía potencial viene representada en la gráfica.
a) ¿En que puntos del eje X la partícula se encontrará en equilibrio? Discutir de que tipo de equilibrio se trata **(0.4).**
b) Indicar el sentido de la fuerza que actúa sobre la partícula en cualquier punto del eje X (**0.2**).
c) Si la partícula tuviese una energía total E (ver gráfica) ¿qué tipo de movimiento realizaría la partícula? (indicar todo lo que se sepa sobre el movimiento) (**0.4**).

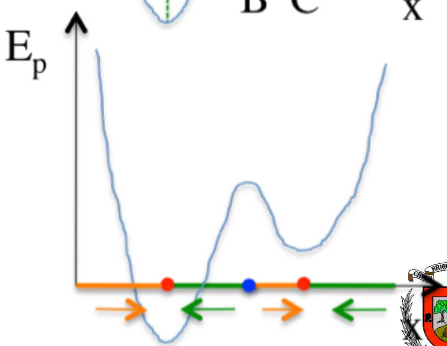


SOLUCION

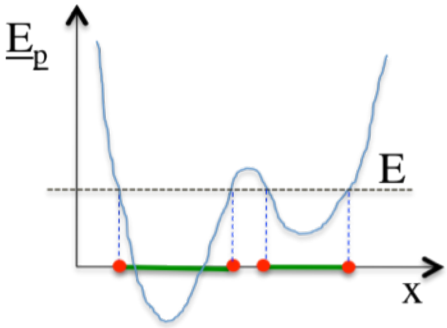
a) la partícula se encuentra en equilibrio en los máximos y en los mínimos de la Ep. El equilibrio es estable en los mínimos (puntos A y C), ya que cuando la partícula se aleja de esos puntos, las fuerzas tratan de devolverla a esa posición. El equilibrio es inestable en el punto B, ya que las fuerzas tratan de alejar a la partícula de esa posición.



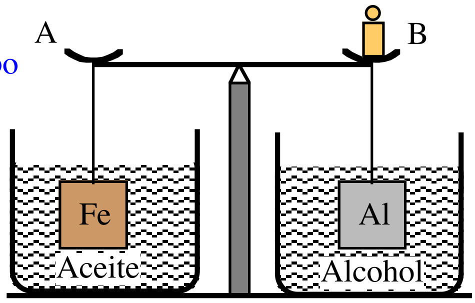
b) Por definición la fuerza es menos el gradiente de la Ep. Como estamos en una dimensión: Fx = -dEp/dx, por lo que la fuerza será positiva (hacia la derecha) cuando la Ep disminuye y negativa (hacia la izquierda) cuando Ep aumenta, ver figura.



c) La partícula estaría atrapada en uno de los dos pozos de potencial que muestra la figura y no podría saltar de uno a otro. Por lo tanto solo se movería a lo largo de una de las dos líneas verdes mostradas en la figura. Si los pozos de potencial fuesen parabólicos, seria un movimiento armónico simple (MAS), pero como no lo son, el movimiento es periódico pero no armónico simple, aunque seria bastante parecido al MAS.



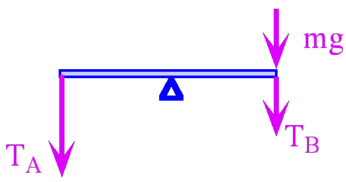
4) a) Enuncia y razona el principio de Arquímedes **(0.4)**.
b) Del platillo A de una balanza hidrostática se suspende un cubo macizo de Fe de arista 7 cm y del platillo B se suspende un cubo macizo de Al de arista 10 cm. Sumergimos el cubo de Fe en aceite y el de Al en alcohol. En estas condiciones hay que añadir al platillo B una masa de 496 g para equilibrar la balanza. Calcular la densidad del aceite **(0.6)**.
Datos: $\rho_{Fe} = 7{,}8\ g/cm^3$, $\rho_{Al} = 2{,}67\ g/cm^3$, $\rho_{Alcohol} = 0{,}91\ g/cm^3$



SOLUCION

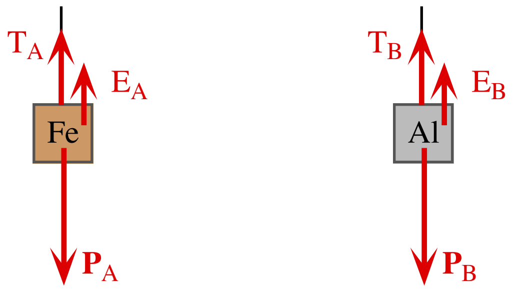
a) El principio de Arquímedes dice que todo cuerpo sumergido en el seno de un fluido experimenta una fuerza ascensorial (empuje) igual al peso del volumen desalojado.
Si tenemos….

b) Sobre el brazo de la balanza solo actúan las tensiones de las cuerdas y el peso colocado en B. Como está en equilibrio, se tiene que cumplir que



$$T_A = T_B + mg \qquad (1)$$

Para calcular las tensiones, aplicamos el Principio de Arquímedes a cada uno de los cuerpos



Cuerpo A: $T_A + E_A - P_A = 0 \Rightarrow T_A = P_A - E_A = V_A \rho_A g - V_A \rho_{aceite} g$

Cuerpo B: $T_B + E_B - P_B = 0 \Rightarrow T_B = P_B - E_B = V_B \rho_B g - V_B \rho_{alcohol} g$

Sustituyendo estas tensiones en la ecuación (1) :

$$V_A \rho_A \cancel{g} - V_A \rho_{aceite} \cancel{g} = V_B \rho_B \cancel{g} - V_B \rho_{alcohol} \cancel{g} + m\cancel{g} \Rightarrow$$

$$V_A \rho_A - V_A \rho_{aceite} = V_B (\rho_B - \rho_{alcohol}) + m \Rightarrow$$

$$V_A \rho_{aceite} = V_A \rho_A - V_B (\rho_B - \rho_{alcohol}) - m \Rightarrow$$

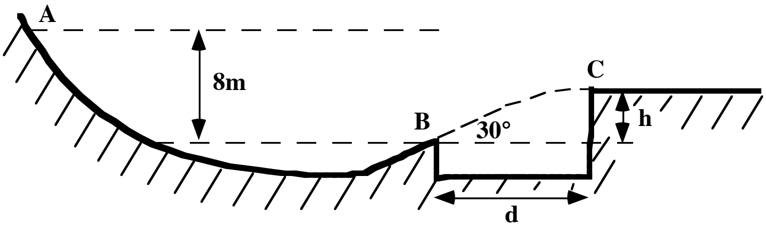
$$\rho_{aceite} = [V_A\, \rho_A - V_B\, (\rho_B - \rho_{alcohol}) - m] / V_A \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho_{aceite}} = [(0.07)^3\ 7.8\ 10^3 - (0.1)^3\ (2.67 - 0.91)\ 10^3 - 0.496] / (0.07)^3 = \boxed{1.22\ 10^3\ \text{Kg/m}^3}$$

PROBLEMAS

---

1) Una persona sentada en un trineo plano se propone descender por una pendiente cubierta de hielo a partir del punto A, salir despedida en el punto B y aterrizar con velocidad horizontal en el borde C. El ángulo de lanzamiento en B es de 30°. Despreciando la fricción y la resistencia del aire determinar: a) la velocidad del trineo en B **(0.4)**, b) las dimensiones *h* y *d* que sitúan el punto C **(0.4)**, c) la velocidad del trineo en el momento de aterrizar en C **(0.3)**. d) Si en lugar del trineo es una bola ($I = 2/5\ mr^2$) que baja rodando sin deslizar, encontrar la velocidad con la que llega al punto B **(0.6)** y razonar según el resultado si la bola llegará al punto C **(0.3)**.



SOLUCION

a) Como la pendiente está cubierta de hielo no actúa ninguna fuerza de rozamiento durante todo el descenso de *A* a *B*. Tomando como origen de alturas en *B* y aplicando la conservación de la energía tenemos que la energía gravitatoria inicial en *A* (sale del reposo) se transforma en energía cinética en *B*:

$$mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh_A} = \boxed{12.52\ \text{m/s}}$$

b) Al salir de *B* inicia un movimiento parabólico. Si ponemos a cero el cronómetro cuando sale de *B* y en esta posición ponemos el origen de coordenadas, las ecuaciones del movimiento serán:

$$x(t) = v_B \cos\theta\, t \qquad v_x(t) = v_B \cos\theta$$

$$y(t) = v_B \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v_y(t) = v_B \operatorname{sen}\theta - gt$$

Cuando llega a *C* la velocidad horizontal se anula con lo que si llamamos t_C al tiempo en que se llega a dicha posición:

$$v_y(t_C) = v_B \operatorname{sen}\theta - gt_C = 0 \quad \Rightarrow \quad t_C = \frac{v_B \operatorname{sen}\theta}{g}$$

En ese instante los desplazamientos horizontal y vertical serán:

$$d = x(t_C) = v_B \cos\theta\, t_C = 4\sqrt{3}\ \text{m} = \boxed{6.93\ \text{m}}$$

$$h = y(t_C) = v_B \operatorname{sen}\theta\, t_C - \frac{1}{2}gt_C^2 = \boxed{2\ \text{m}}$$

c) La velocidad del trineo al llegar a *C* será:

$$v_C = v_x(t_C) = v_B \cos\theta = \boxed{10.84 \text{ m/s}}$$

d) Para que baje rodando necesitaríamos que en la pendiente hubiese rozamiento (otro tipo de superficie en vez de hielo) pero aún así podríamos aplicar conservación de la energía como se hizo en el apartado a) ya que la fuerza de rozamiento que actúa es estática y no realiza trabajo. En este caso tenemos que la energía gravitatoria inicial en A (sale del reposo) se transforma en energía cinética en B que será ahora de dos tipos, de traslación y de rotación:

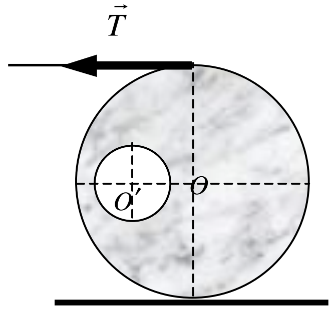
$$mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v_B}{r}\right)^2 =$$

$$= \frac{7}{10}mv_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{\frac{10}{7}gh_A} = \boxed{10.58 \text{ m/s}}$$

Como la velocidad de salida del punto B es ahora más pequeña no llegará al punto C.

---

2) La esfera uniforme de radio a y centrada en O (ver figura) pesaba en un principio 81 N. Después de taladrársele un agujero esférico de radio r y centro en O' su peso es de 78 N. a) Según los datos, determinar el valor del cociente r/a **(0.2)**. b) Tomando el origen de coordenadas en el punto O, calcular la posición del c.m. de la pieza final tomando $\overline{OO'} = \frac{2}{3}a$ **(0.6)**. Suponiendo que la esfera no desliza sobre la mesa: b) ¿cuál debe ser la tensión de la cuerda que le impida moverse en la situación representada? **(0.6)** c) ¿cuánto valdrá la fuerza de rozamiento? **(0.2)** d) Determinar el coeficiente de rozamiento mínimo para que no deslice **(0.4)**.



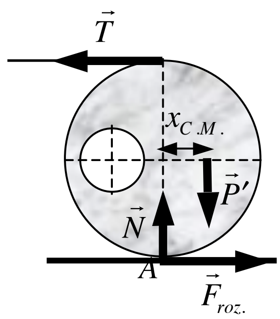
SOLUCION

a) Llamemos P y P' al peso de la esfera antes y después de hacerle el agujero. Llamemos r al radio del agujero y ρ a la densidad del material. Con los datos que nos dan en el enunciado podemos calcular r:

$$P' = \left(\frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{4}{3}\pi r^3\right)\rho g = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho g\left(1 - \frac{r^3}{a^3}\right) = P\left(1 - \frac{r^3}{a^3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad r = a\left(1 - \frac{P'}{P}\right)^{1/3} = \frac{a}{3}$$

b) Si ponemos el origen de coordenadas en O podemos calcular donde se encuentra el C.M. del cilindro agujereado (por simetría la coordenada $y_{C.M.}$ será nula):



$$x_{C.M.} = \frac{0 - (P - P')\left(-\frac{2}{3}a\right)}{P'} = \frac{1}{39}a$$

c) Aplicando las condiciones de la estática:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_{roz.} - T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = F_{roz.} \\ N - P' = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P' \end{cases}$$

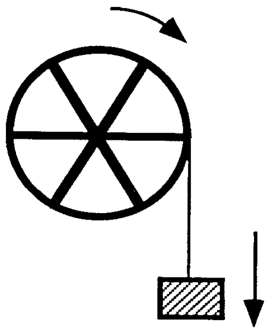
$$\sum_i \vec{\tau}_i^{\,A} = 0 \quad \Rightarrow \quad T(2a) - P' x_{C.M.} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \left(\frac{x_{C.M.}}{2a} \right) P' = \boxed{1\ \mathrm{N}}$$

d) La fuerza de rozamiento es estática y debe ser menor que su valor máximo:

$$F_{roz.} = T \leq F_{roz.máx.} = \mu N = \mu P' \quad \Rightarrow \quad \mu \geq \frac{T}{P'} = \boxed{\frac{1}{78}}$$

---

3) En la periferia de una rueda de radio 1 m capaz de girar alrededor de un eje horizontal se ha enrollado una cuerda de 5 m de longitud y de peso despreciable de la que cuelga una masa de 10 kg. El anillo y los seis radios que constituyen la rueda son homogéneos y su densidad lineal es de 1 kg/m. Calcular: a) el momento de inercia de la rueda **(0.5)**, b) la aceleración de caída de la masa **(0.6)**, c) la tensión en la cuerda **(0.6)**, d) el tiempo que tarda la cuerda en desenrollarse por completo **(0.3)**.



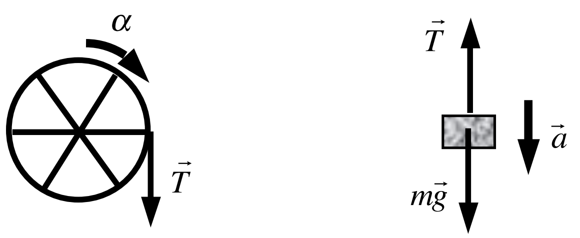
SOLUCION

a) El momento de inercia de la rueda será:

$$I_{rueda} = I_{anillo} + I_{radios} = M_{anillo} R^2 + 6\left[\frac{1}{3} M_{radio} R^2 \right] =$$

$$= (\lambda 2\pi R) R^2 + 6\left[\frac{1}{3} (\lambda R) R^2 \right] = 2(1+\pi)\lambda R^3 = \boxed{8.28\ \mathrm{kg\ m^2}}$$

b) y c) Tomando el sentido positivo para la traslación del bloque el vertical hacia abajo y como sentido positivo de rotación para la rueda el horario y planteando la segunda ley de Newton para cada cuerpo:



$$TR = I_{rueda} \alpha \qquad\qquad mg - T = ma$$

Dos ecuaciones que junto con la relación: $a = \alpha R$ completan un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas cuya solución es:

$$\boxed{\begin{aligned} T &= \left[\frac{2(1+\pi)\lambda R}{m+2(1+\pi)\lambda R}\right] mg = 44.4 \text{ N} \\ a &= \left[\frac{m}{m+2(1+\pi)\lambda R}\right] g = 5.36 \text{ m/s}^2 \\ \alpha &= \left[\frac{m}{m+2(1+\pi)\lambda R}\right] \frac{g}{R} = 5.36 \text{ rad/s}^2 \end{aligned}}$$

d) La longitud de cuerda desenrollada en cualquier instante (suponiendo que estaba completamente enrollada) será: $l(t) = \frac{1}{2} a t^2$. Cuando se desenrolla por completo:

$$L = \frac{1}{2} a t_{desenrrollado}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{desenrollado} = \sqrt{\frac{2L}{a}} = 1.37 \text{ s}}$$