EXAMEN DE FISICA I (GTI) 23-1-2013

CUESTIONES

1) La aceleración de un cuerpo que se mueve en línea recta viene dada por $a = 2 – t$ con a en m/s^2 y t en s. Sabiendo que el móvil parte del reposo en la posición $x = 5$, hallar: a) la expresión de la velocidad y la posición en función del tiempo **(0.4)**, b) en que instante la velocidad es nula **(0.2)**. c) Representar a y v en función del tiempo **(0.4)**.

SOLUCION:

a) Recordando que $a = dv/dt \Rightarrow dv = a dt \Rightarrow \int dv = \int a\, dt + c_1$

Sustituyendo el valor de la aceleración dentro de la integral

$$\int dv = \int (2 - t)\, dt + c_1 \quad \Rightarrow v = 2t - t^2/2 + c_1$$

Para determinar c1 imponemos que para $t = 0$, $v = 0 \Rightarrow 0 = 0 – 0 + c1 \Rightarrow c_1 = 0$, por lo tanto

$$\boxed{v = 2t - t^2/2}$$

Para determinar la posición, partimos de $v = dx/dt \Rightarrow dx = vdt \Rightarrow \int dx = \int v\, dt + c_2$

Sustituyendo el valor de la velocidad dentro de la integral

$$\int dx = \int (2t - \frac{t^2}{2})\, dt + c_2 \quad \Rightarrow x = 2\, t^2/2 - t^3/6 + c_2$$

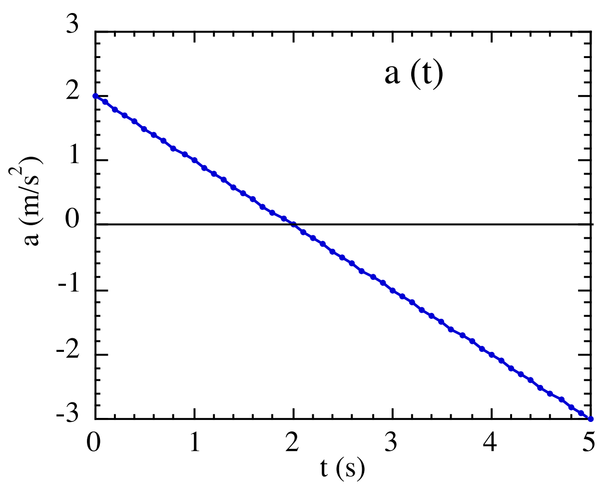
Para determinar c_2 imponemos que para $t = 0$, $x = 5 \Rightarrow 5 = 0 – 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 5$, por lo tanto

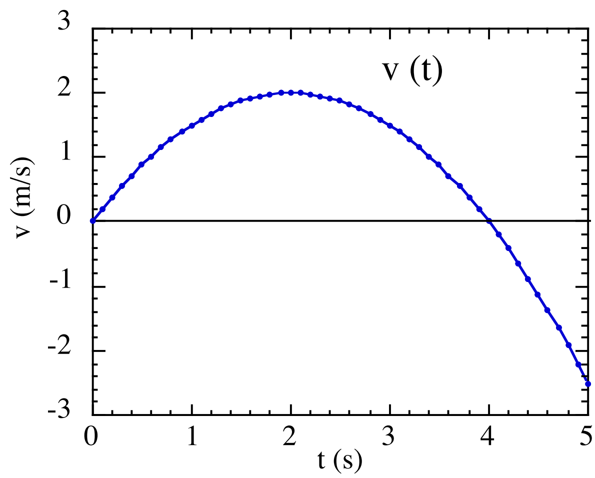
$$\boxed{x = 5 + t^2 - \frac{t^3}{6}}$$

b) Si la velocidad es nula $\Rightarrow 0 = 2t - t^2/2 = (2 - t/2)\, t \Rightarrow$ hay dos posibilidades,

$$t = 0 \quad \Rightarrow \boxed{t = 0}$$
$$2 - t/2 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{t = 4}$$

c)



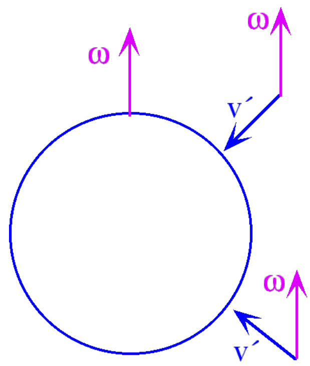


2) Recordando que la relación entre la aceleración de la gravedad observada desde la Tierra ($\vec{g}$) y la que ve un observador inercial ($\vec{g}_0$) es: $\vec{g} = \vec{g}_0 - 2\vec{\omega}\times\vec{v}' - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

a) Explica cómo es la aceleración de Coriolis de un cuerpo que cae verticalmente. ¿En qué puntos de la superficie es máxima y mínima? ¿Qué diferencias hay entre el hemisferio norte y el hemisferio sur? **(0.5)**.

b) Explica cómo es la aceleración de Coriolis de un cuerpo que se mueve horizontalmente sobre la superficie terrestre ¿Qué diferencias hay entre el hemisferio norte y el hemisferio sur? Pon dos ejemplos de sus consecuencias **(0.5)**.

SOLUCION:



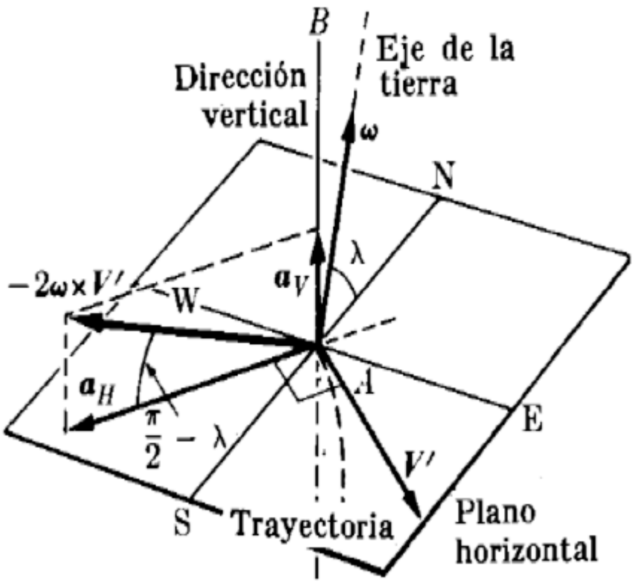
a) En esta cuestión solamente consideraremos los efectos asociados a **v´**, que dan lugar a la aceleración de Coriolis, y no describiremos los asociados a la posición "**r**" que dan lugar a la aceleración centrifuga.

Si la figura representa un corte de la Tierra, el producto vectorial de (**ω** x **v´**), es un vector perpendicular al papel que sale hacia nosotros. Como la aceleración de Coriolis lleva un signo menos, el vector entrara hacia el papel, es decir, va dirigido hacia el Este.

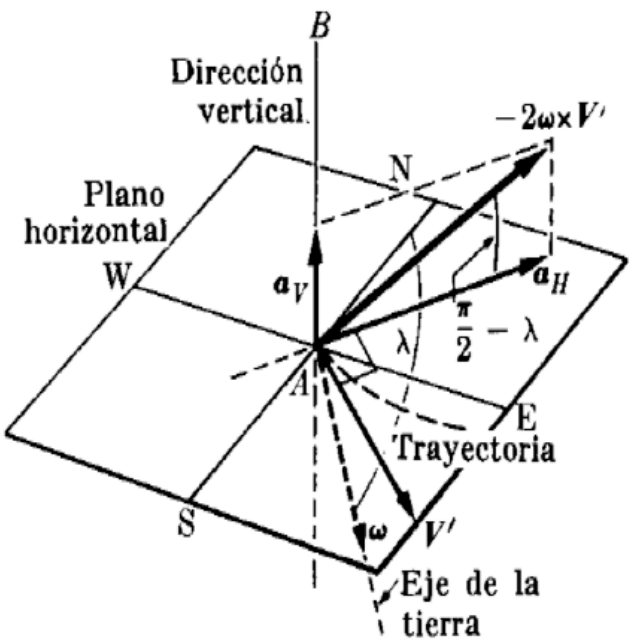
Esto sucede tanto en el Hemisferio Norte como en el Sur, es decir los efectos son iguales.

Como **ω** es constante, para un mismo valor de **v´,** la aceleración de Coriolis será máxima cuando **ω** y **v´** formen 90 grados, es decir en el ecuador y mínima cuando formen 0 o 180 grados, es decir en los Polos.

b) Cuando un objeto se mueve horizontalmente en el hemisferio norte con una velocidad **v´** respecto a la superficie de la Tierra, la aceleración de Coriolis es un vector que sale de la superficie Terrestre y que tiene una componente horizontal dirigida hacia al derecha del movimiento, ver figura a). Si nos encontramos en el hemisferio sur, la aceleración de Coriolis también sale de la superficie Terrestre, pero la componente horizontal va dirigida hacia la izquierda, ver figura b).

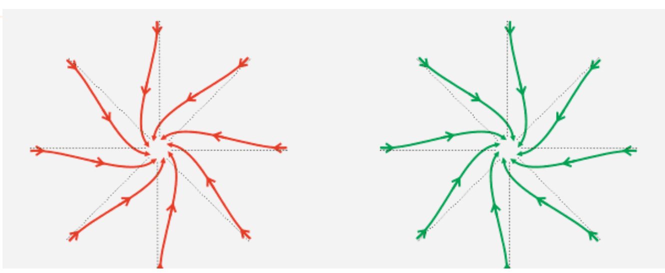


(a) Hemisferio norte

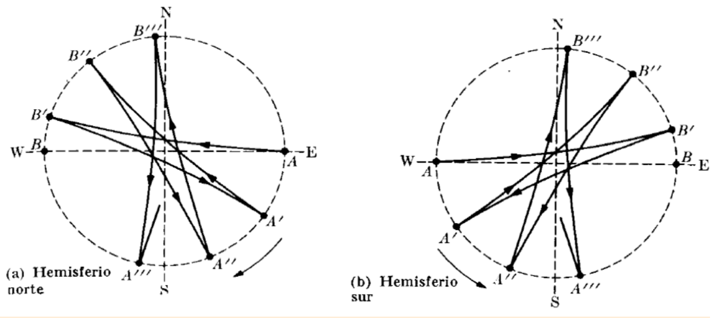


(b) Hemisferio sur

Una consecuencia de la aceleración de Coriolis es el giro de los huracanes, que lleva sentido antihorario en el hemisferio norte y horario en el sur.



Otro ejemplo es el movimiento del plano de rotación de un péndulo (Péndulo de Foucault), que gira en sentido horario en el hemisferio norte y antihorario en el sur.



---

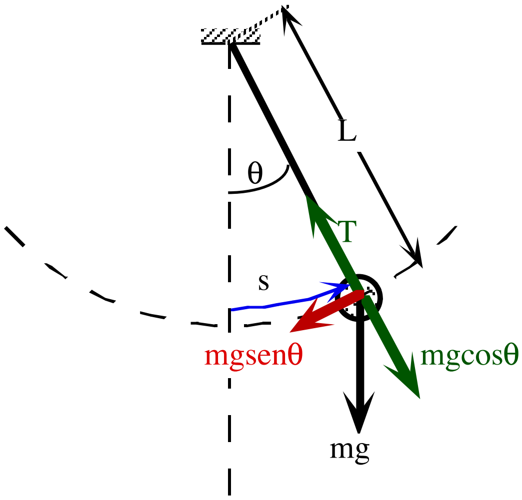
3) Construimos un péndulo suspendiendo una masa *M* de un hilo de longitud *L* y masa despreciable.

a) Demostrar el tipo de movimiento que realiza para pequeños ángulos **(0.5)**.

b) Encontrar su período **(0.5)**.

SOLUCION

Al desplazar la masa de su posición de equilibrio, la componente tangencial del peso, origina una aceleración tangencial. Si aplicamos la 2º ley de Newton:



$$F_T = m\,a_T = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2} = mL\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad\Rightarrow$$

$$-\,mg\mathrm{sen}\theta = mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

El signo (-) de la fuerza se introduce ya que cuando el ángulo θ es (+) la fuerza es (-). La fuerza se opone al aumento del ángulo

Si $\theta < 10°$ $\mathrm{sen}\theta = \theta$ $\Rightarrow$ La ecuación anterior se transforma en

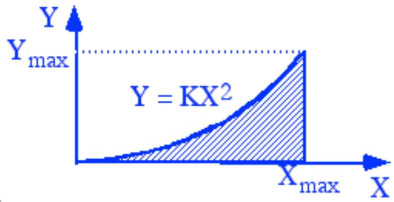
$$-\,g\theta = L\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0}$$

Es una ecuación diferencial de 2º grado cuya solución es $\boxed{\theta = \theta_0 \cos\left(\sqrt{g/L}\;t + \alpha\right)}$

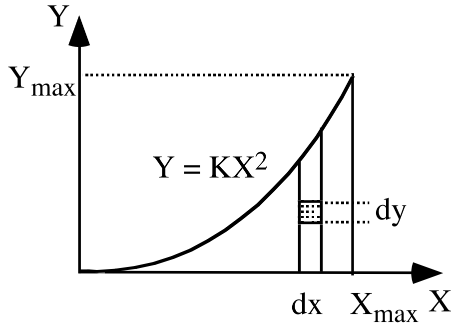
Por lo que realizara un movimiento periódico armónico simple de amplitud θ_0, fase inicial α y frecuencia angular $\omega = \sqrt{g/L}$ $\Rightarrow$

el período será: $T = 2\pi/\omega$ $\Rightarrow$ $\boxed{T = 2\pi\sqrt{L/g}}$

4) Determinar la posición del centro de masas de la placa homogénea de la figura:



SOLUCION:



Recordando la definición de centro de masas de una superficie homogénea $x_{CM} = \dfrac{\int x\, ds}{\int ds}$ y teniendo en cuenta que $ds = dx\, dy$, donde este diferencial de área se integra en la superficie delimitada por la parábola $y = kx^2$ y el eje x, llegamos a la ecuación de partida:

$$x_{CM} = \frac{\iint x dx dy}{\iint dx dy} = \frac{\int_0^{X_{max}} x dx \int_0^{kx^2} dy}{\int_0^{X_{max}} dx \int_0^{kx^2} dy} = \frac{\int_0^{X_{max}} x dx \left[y\right]_0^{kx^2}}{\int_0^{X_{max}} dx \left[y\right]_0^{kx^2}} = \frac{\int_0^{X_{max}} x dx\; kx^2}{\int_0^{X_{max}} dx\; kx^2} = \ldots\ldots$$

donde primero hemos integrado dy entre el eje x y la parábola (kx^2) y posteriormente integraremos la variable x entre 0 y X_{max}.

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\int_0^{X_{max}} kx^3\, dx}{\int_0^{X_{max}} kx^2\, dx} = \frac{\left[k\frac{x^4}{4}\right]_0^{X_{max}}}{\left[k\frac{x^3}{3}\right]_0^{X_{max}}} = \frac{k\frac{X_{max}{}^4}{4}}{k\frac{X_{max}{}^3}{3}} = \; = \boxed{\frac{3}{4}X_{max}}$$

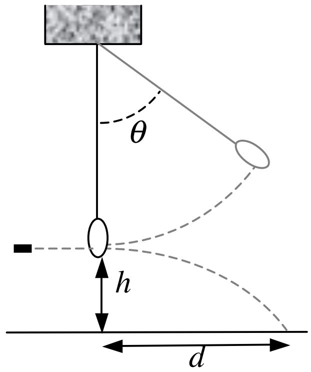
Procediendo de forma análoga para la coordenada y:

$$\boxed{y_{CM}} = \frac{\int y\, ds}{\int ds} = \frac{\iint y dx dy}{\iint dx dy} = \frac{\int_0^{X_{max}} dx \int_0^{kx^2} y\, dy}{\int_0^{X_{max}} dx \int_0^{kx^2} dy} = \frac{\int_0^{X_{max}} dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{kx^2}}{\int_0^{X_{max}} dx \left[y\right]_0^{kx^2}} = \frac{\int_0^{X_{max}} dx\, \frac{k^2x^4}{2}}{\int_0^{X_{max}} dx\; kx^2} =$$

$$= \frac{\left[\frac{k^2}{2}\frac{x^5}{5}\right]_0^{X_{max}}}{\left[k\frac{x^3}{3}\right]_0^{X_{max}}} = \frac{\frac{k^2}{2}\frac{X_{max}{}^5}{5}}{k\frac{X_{max}{}^3}{3}} = \frac{k^2\frac{X_{max}{}^5}{10}}{k\frac{X_{max}{}^3}{3}} = \frac{3}{10}kX_{max}{}^2 = \boxed{\frac{3}{10}Y_{max}}$$

PROBLEMAS

1) Un saco de arena de 4 kg de masa pende de un hilo de 0.6 m de longitud. Sobre el saco se dispara un fusil cuya bala tiene una masa de 40 g. La bala atraviesa el saco y recorre una distancia horizontal d = 20 m antes de pegar en el suelo que se encuentra a h = 1.5 m por debajo del impacto en el saco. El saco oscila alcanzando un ángulo máximo θ = 60º con la vertical. Determinar: a) la velocidad de la bala después del choque **(0.4)**, b) la velocidad del saco después del choque **(0.4)**, c) la tensión en la cuerda que sostiene al saco justo después del choque **(0.4)**, d) la velocidad de la bala antes del choque **(0.4)**, e) la fuerza media que ejerce la arena sobre la bala si tarda en atravesarlo 0.5 s **(0.4)**.



SOLUCION

a) El tiempo que tarda en llegar la bala al suelo después del choque es:

$$h = \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Como nos dan la distancia horizontal recorrida durante ese tiempo:

$$d = v_{bala,después} \Delta t \quad \Rightarrow \quad v_{bala,después} = \frac{d}{\Delta t} = \sqrt{\frac{g}{2h}} d = \boxed{36.1 \mathrm{m/s}}$$

b) Las únicas fuerzas que actúan sobre el saco son el peso, que es una fuerza conservativa, y la tensión de la cuerda, que al ser perpendicular al movimiento del saco no realiza ningún trabajo. Podemos aplicar conservación de la energía entre el punto más bajo de su trayectoria y la posición en la que alcanza su máxima altura. Tomando como origen de energías potenciales gravitatorias en el punto más bajo:

$$E_{abajo} = E_{arriba} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_{saco} v_{saco}^2 = m_{saco} g l (1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad v_{saco} = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)} = \boxed{2.42 \text{ m/s}}$$

c) Aplicando la segunda ley de Newton al saco justo después del choque:

$$T - mg = ma_n = m\frac{v_{saco}^2}{l}$$

$$\Rightarrow \quad T = m\left(\frac{v_{saco}^2}{l} + g\right) = \boxed{78.4 \text{ N}}$$

d) Aplicando el principio de conservación del momento lineal en el choque:

$$m_{bala}\vec{v}_{bala,antes} = m_{bala}\vec{v}_{bala,después} + m_{saco}\vec{v}_{saco}$$

donde todos los vectores tienen la misma orientación horizontal. Despejando:

$$v_{bala,antes} = v_{bala,después} + \left(\frac{m_{saco}}{m_{bala}}\right) v_{saco} = \boxed{278.6 \text{ m/s}}$$

e) La variación de momento lineal de la bala durante el choque es debido al impulso comunicado por la fuerza ejercida por la arena:

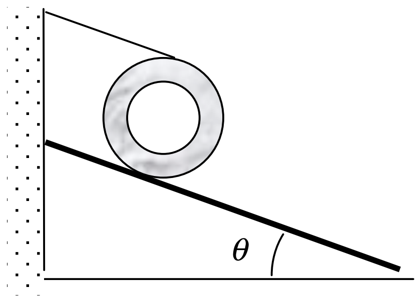
$$\vec{I}(t)=\vec{F}_{arena}\,\Delta t=\vec{p}_{bala,después}-\vec{p}_{bala,antes}=m\left(\vec{v}_{bala,después}-\vec{v}_{bala,antes}\right)$$

Teniendo en cuenta la orientación horizontal de todos los vectores:

$$-F_{arena}\,\Delta t=m\left(v_{bala,después}-v_{bala,antes}\right)\quad\Rightarrow\quad F_{arena}=\frac{m}{\Delta t}\left(v_{bala,antes}-v_{bala,después}\right)=\boxed{19.40\text{ N}}$$

---

2) Un cilindro homogéneo parcialmente hueco, de radio interno R_1 y radio externo R_2 y masa M está situado sobre un plano rugoso inclinado un ángulo θ. Está atado a una pared vertical mediante una cuerda paralela al plano (ver figura) de forma de encontrarse en una situación de equilibrio. a) Calcular su momento de inercia respecto de su eje de simetría **(0.4)**. b) Determinar el valor de la tensión en la cuerda y el valor de la fuerza de rozamiento del cilindro con el plano **(0.4)**, c) Discútase si la situación de equilibrio propuesta para el cilindro podría darse si no hubiese rozamiento con el plano o si es necesario un coeficiente de rozamiento mínimo y si este fuese el caso calcular dicho coeficiente de rozamiento mínimo **(0.4)**. En un momento determinado se rompe la cuerda, determinar: d) la aceleración de bajada del cilindro **(0.4)**, e) la fuerza de rozamiento con el plano **(0.4)**.

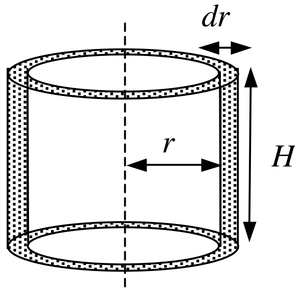


SOLUCION

a) Nuestro cilindro de radio interno R_1 y externo R_2 podemos dividirlo en corazas cilíndricas de radio r y espesor dr (todos los puntos de una de estas corazas se encuentran a la misma distancia del eje de giro). Llamando H a la altura del cilindro, su momento de inercia será:

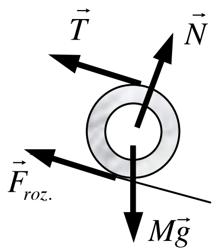
$$I=\int r^2\,dm=\int_{R_1}^{R_2} r^2\rho\,2\pi rH\,dr=\rho\,2\pi H\frac{1}{4}\left(R_2^4-R_1^4\right)=$$

$$=\left(\frac{M}{\pi\left(R_2^2-R_1^2\right)H}\right)2\pi H\frac{1}{4}\left(R_2^4-R_1^4\right)=\boxed{\frac{1}{2}M\left(R_1^2+R_2^2\right)}$$



b) Como el cilindro se encuentra en equilibrio la fuerza total y el momento de fuerzas total que actúan sobre él deben anularse para no producir ningún tipo de aceleración. Aplicando las leyes de Newton:

$$\left.\begin{aligned}&N-Mg\cos\varphi=0\\&Mg\operatorname{sen}\varphi-T-F_{roz.}=0\\&F_{roz.}R-TR=0\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\begin{aligned}&N=Mg\cos\varphi\\&F_{roz.}=T=\frac{1}{2}Mg\operatorname{sen}\varphi\end{aligned}}$$



c) La fuerza de rozamiento calculada en el apartado anterior es estática por lo tanto:

$$F_{roz.}\le F_{roz.máx.}=\mu_e N\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{2}Mg\operatorname{sen}\varphi\le\mu_e Mg\cos\varphi\quad\Rightarrow\quad\boxed{\mu_e\ge\frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta}$$

Necesitamos por lo tanto un coeficiente de rozamiento mínimo.

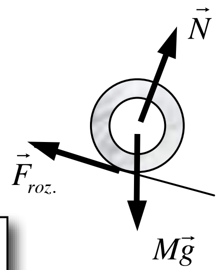
d) Suponemos que en la bajada por el plano inclinado el rozamiento es lo suficientemente importante como para que no deslice y se produzca el movimiento de rodadura. En este caso la fuerza de rozamiento que aparece es estática y no realiza trabajo con lo que podemos aplicar la conservación de la energía. Tomando como origen de energía potencial gravitatoria la altura del C.M. del cilindro cuando ha descendido una distancia *d*:

$$\left.\begin{array}{c} E_1 = Mgd\,\text{sen}\,\varphi \\[2ex] E_2 = \dfrac{1}{2}Mv_{C.M.}^2 + \dfrac{1}{2}I_{C.M.}\omega^2 \\[2ex] I_{C.M.} = \dfrac{1}{2}M\left(R_1^2 + R_2^2\right), \quad \omega = \dfrac{v_{C.M.}}{R_2} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} E_1 = E_2 \quad \Rightarrow \quad \ldots \\[4ex] v_{C.M.} = \sqrt{\left(\dfrac{4R_2^2}{R_1^2 + 3R_2^2}\right) gd\,\text{sen}\,\varphi} \end{array}$$

Comparando el resultado obtenido con lo que nos dicen las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado:

$$v_{C.M.}^2 = v_{C.M.,inicial}^2 + 2ad \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_{C.M.}^2}{2d} = \boxed{\left(\frac{2R_2^2}{R_1^2 + 3R_2^2}\right) g\,\text{sen}\,\varphi}$$

e) En el apartado anterior hemos supuesto que la fuerza de rozamiento era lo suficientemente intensa para que no hubiese deslizamiento sino rodadura. Dibujando el diagrama de fuerzas sobre el cilindro y aplicando la segunda ley de Newton a la traslación y a la rotación podemos calcular su valor:



$$\left.\begin{array}{c} N - Mg\cos\varphi = 0 \\[2ex] Mg\,\text{sen}\,\varphi - F_{roz.} = Ma_{C.M.} \\[2ex] F_{roz.}R = I\alpha = \left[\dfrac{1}{2}M\left(R_1^2 + R_2^2\right)\right]\left(\dfrac{a_{C.M.}}{R_2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} N = Mg\cos\varphi \\[2ex] a_{C.M.} = \left(\dfrac{2R_2^2}{R_1^2 + 3R_2^2}\right) g\,\text{sen}\,\varphi \\[2ex] F_{roz.} = \left(\dfrac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 + 3R_2^2}\right) Mg\,\text{sen}\,\varphi \end{array}}$$

(el cálculo anterior confirma el resultado sobre la aceleración obtenido en el apartado anterior)

Vamos a verificar que nuestra suposición de que baja rodando es correcta. Para que baje rodando (fuerza de rozamiento estática) se debe cumplir:

$$F_{roz.} \le F_{roz.máx.} = \mu_e N = \mu_e Mg\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 + 3R_2^2}\right) Mg\,\text{sen}\,\varphi \le \mu_e Mg\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \mu_e \ge \left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 + 3R_2^2}\right)\text{tg}\,\theta$$

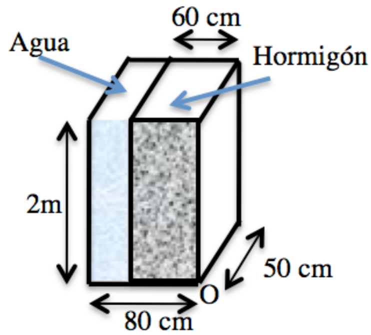
Sabemos del apartado c) que $\mu_e \ge \dfrac{1}{2}\text{tg}\,\theta$, luego si demostramos que $\dfrac{1}{2} \ge \left(\dfrac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 + 3R_2^2}\right)$ también se cumpliría la condición anterior para el coef. de roz. estático:

$$\frac{1}{2} \geq \left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 + 3R_2^2} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} R_1^2 + \frac{3}{2} R_2^2 \geq R_1^2 + R_2^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} R_2^2 \geq \frac{1}{2} R_1^2 \quad \Rightarrow \quad R_2 \geq R_1$$

condición que se cumple siempre. Por lo tanto si admitimos que inicialmente estaba en equilibrio tenemos la seguridad que al romperse la cuerda bajará rodando.

---

3) Un recipiente de 80 x 50 cm2 y 2 m de altura, se cierra en uno de sus laterales con un bloque de hormigón (ρ = 3 g/cm^3). de 60 cm de espesor, tal como muestra la figura. Si el espacio libre, de 20 cm de espesor, es llenado con agua hasta la altura de 2 m Determinar:



a) La presión manométrica en el fondo del recipiente **(0.2)**.
b) El peso del agua y el peso del bloque hormigón **(0.2)**.
c) Determinar la fuerza resultante que ejerce el agua sobre el hormigón y el punto de aplicación de dicha fuerza **(0.8)**.
d) Estará estable el bloque de hormigón o volcara en torno al borde que pasa por el punto O **(0.4)**.
e) Si la densidad del hormigón fuese de ρ = 2 g/cm^3, ¿cuál seria la máxima altura que podría alcanzar el agua antes de que volcase el bloque de hormigón **(0.4)**.

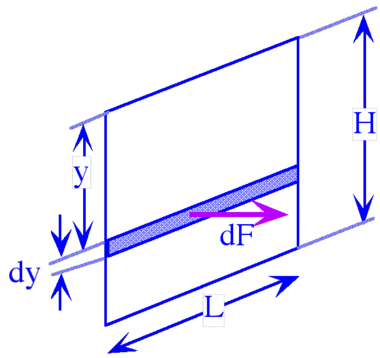
SOLUCION

a) La presión manométrica será: $P_{man.} = \rho_{agua} g H = \boxed{19.6 \text{ kPa}}$

b) Peso del agua $= \rho_{agua} A_{agua} H g = \boxed{1960 \text{ N}}$

Peso del hormigón $= \rho_{horm.} A_{horm.} H g = \boxed{17640 \text{ N}}$

c) La fuerza ejercida por el agua sobre el hormigón será únicamente debida a la presión ejercida por el agua, que a una profundidad y es $P(y) = \rho_{agua}\, g\, y$. Si consideramos una franja del hormigón de altura dy y longitud L, toda ella situada a una profundidad y, la fuerza que actúa sobre la misma será:



$$dF = P(y)\, L\, dy = \rho_{agua}\, g\, L\, y\, dy$$

Para calcular la fuerza total sobre el hormigón debemos integrar dF entre la superficie del agua y el suelo:

$$F = \int_0^H \rho_{agua}\, g\, L\, y\, dy = \frac{1}{2} \rho_{agua}\, g\, L\, H^2 = \boxed{9800 \text{ N}}$$

El punto de aplicación de la fuerza F sobre la presa será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos). Calculando momentos respecto del punto O en el fondo:

$$M_{agua} = \int_0^H \rho_{agua}\, g\, L\, y(H - y)\, dy = \frac{1}{6} \rho_{agua}\, g\, L\, H^3 = 6533 \text{ Nm}$$

con lo que el punto de aplicación de la fuerza F se encontrará a una distancia d del fondo:

$$Fd = M_{agua} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{M_{agua}}{F} = \frac{1}{3}H = \boxed{\frac{2}{3}\text{ m}}$$

d) El momento del peso respecto del punto O será (téngase en cuenta que el peso está aplicado en el C.M. a distancia horizontal s = 30 cm del punto O):

$$M_{peso} = \left(\rho_{horm.} A_{horm.} H g\right) s = 5292 \text{ Nm}$$

Como el momento del peso es de sentido contrario e inferior al momento ejercido por el agua el bloque de hormigón volcará girando alrededor de O.

e) Con la nueva densidad el nuevo momento del peso será:

$$M'_{peso} = \left(\rho'_{horm.} A_{horm.} H g\right) s = 3528 \text{ Nm}$$

y la altura máxima de agua sin que vuelque el bloque será:

$$\left.\begin{aligned} M_{\substack{agua\\ máximo}} &= M'_{peso} \\ M_{\substack{agua\\ máximo}} &= \frac{1}{6}\rho_{agua}\, g\, L\, H^3_{máx.} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad H_{máx.} = \left(\frac{6M'_{peso}}{\rho_{agua}\, g\, L}\right)^{1/3} = \boxed{1.63 \text{ m}}$$