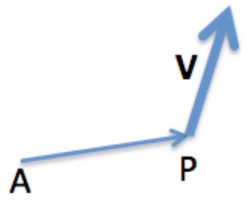
EXAMEN DE FISICA I (GTI) 6-10-2012

CUESTIONES

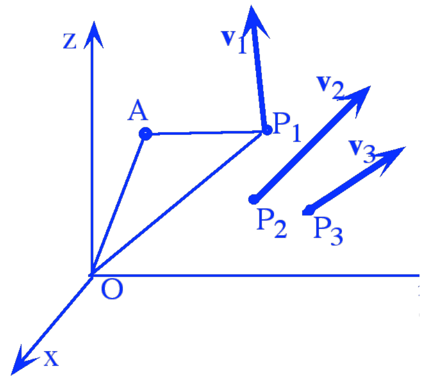
1) a) Define el momento de un vector respecto a un punto (0.2). b) Si tenemos un sistema de vectores, encuentra la relación entre el momento resultante respecto a un punto O y un punto A (0.5). c) Discuta en que casos el momento resultante coincide (0.3).

SOLUCION



a) Es el producto vectorial del vector que va del punto (A) al origen del vector (P), con el propio vector **V.**

$$\mathbf{M_A\ V} = \mathbf{AP} \wedge \mathbf{V}$$



b) Vamos a calcular el momento resultante respecto a un punto cualquiera A y lo relacionaremos con el obtenido respecto al origen.

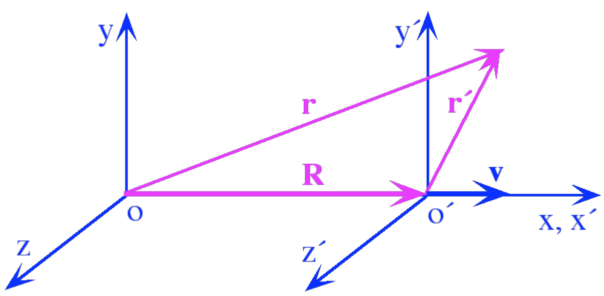
$$\mathbf{M}_A = \sum \mathbf{AP}_i \wedge \mathbf{V}_i = \sum (\mathbf{AO} + \mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{V}_i) = \sum (-\mathbf{OA} + \mathbf{OP}_i) \wedge \mathbf{V}_i =$$
$$= \sum (-\mathbf{OA} \wedge \mathbf{V}_i) + \sum (\mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{V}_i) = -\mathbf{OA} \wedge \sum (\mathbf{V}_i) + \sum (\mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{V}_i) = -$$
$$\mathbf{OA} \wedge \mathbf{R} + \sum (\mathbf{OP}_i \wedge \mathbf{V}_i) = = -\mathbf{OA} \wedge \mathbf{R} + \mathbf{M}_O$$

Es lo que se denomina campo de momentos.

c) Si la resultante es nula ($\mathbf{R} = 0$) $\Rightarrow$ $\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_O$ lo que significa que el momento resultante es igual cuando lo calculamos respecto al origen o respecto aun punto cualquiera A, y por lo tanto es independiente del punto respecto al cual se calcula.

2) Relación entre las coordenadas espaciales, velocidades y aceleraciones en el movimiento relativo de traslación uniforme (Transformaciones Galileanas) (0.6). ¿Cuando no se pueden utilizar estas trasformaciones, y hay que utilizar las de Lorentz? Da una idea de porqué. (0.4)

SOLUCION



Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia con los ejes paralelos y uno moviéndose respecto al otro a lo largo de la dirección x con una velocidad : **v** = v**i**

Supongamos también que para t = 0 el origen de coordenadas de ambos sistemas o y o´ coinciden.
En un cierto instante de tiempo la separación entre los dos orígenes será **R** = **oo´** = **v**t = vt **i**
La posición de una partícula respecto al sistema o viene descrita por un vector de posición **r**, mientras que respecto al sistema o´ el vector de posición será **r´.**

La relación entre los vectores de posición en ambos sistemas es $\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'}$ $\Rightarrow \begin{cases} x = vt + x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

Solo es diferente la coordenada x. Derivando la relación vectorial de las posiciones:

$$\boxed{\mathbf{V} = d\mathbf{r}/dt = d\mathbf{R}/dt + d\mathbf{r}'/dt = \mathbf{v} + \mathbf{V}'} \Rightarrow \begin{cases} Vx = v + V'x \\ Vy = V'y \\ Vz = V'z \end{cases}$$

Solo es diferente la componente x de la velocidad. Derivando la relación vectorial de las velocidades:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{V}/dt = d\mathbf{v}/dt + d\mathbf{V}'/dt$$

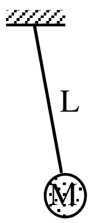
Pero al ser un movimiento de traslación uniforme: $d\mathbf{v}/dt = 0$ y $d\mathbf{V}'/dt = \mathbf{a}'$ por lo que $\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}'}$

Este es un resultado muy importante, ya que la aceleración es un invariante en los sistemas que se mueven con velocidades uniformes unos respecto de otros (sistemas inerciales).

Las transformaciones de Galileo dejan de ser validas cuando las velocidades entre los sistemas de referencia se acercan a la velocidad de la luz. En ese caso tenemos que utilizar las transformaciones de Lorentz. La razón esta en que la luz tiene que llevar la misma velocidad para los dos sistemas de referencia, y esto solo se cumple si aplicamos las transformaciones de Lorentz.

Para velocidades de desplazamiento entre sistemas pequeñas ($v << c$) aunque apliquemos las transformaciones de Galileo, la luz lleva prácticamente la misma velocidad c para los dos sistemas. Sin embargo, si v tiende a c, al aplicar las transformaciones de Galileo, encontraríamos claramente diferentes velocidades para la luz en los dos sistemas y ello nos obliga a utilizar Lorentz.

3) Construimos un péndulo suspendiendo una masa M de un hilo de longitud L y masa despreciable. Demostrar el tipo de movimiento que realiza para pequeños ángulos. Encontrar su período.

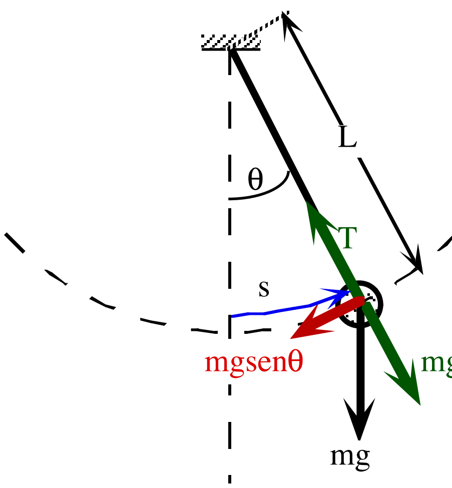


SOLUCION

Al desplazar la masa de su posición de equilibrio, la componente tangencial del peso, origina una aceleración tangencial. Si aplicamos la 2º ley de Newton:

$$F_T = m\,a_T = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2} = mL\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \Rightarrow$$

$$-\,mg\,\text{sen}\theta = mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



El signo (-) de la fuerza se introduce ya que cuando el ángulo θ es (+) la fuerza es (-). La fuerza se opone al aumento del ángulo

Si $\theta < 10°$ $\operatorname{sen}\theta = \theta$ $\Rightarrow$ La ecuación anterior se transforma en

$$-g\theta = L\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0}$$

Es una ecuación diferencial de 2º grado cuya solución es $\boxed{\theta = \theta_0 \cos\left(\sqrt{g/L}\ t + \alpha\right)}$

Por lo que realizara un movimiento periódico armónico simple de amplitud θ_0, fase inicial α y frecuencia angular $\omega = \sqrt{g/L}$ $\Rightarrow$

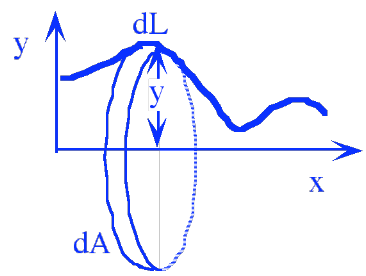
el período será: $T = 2\pi/\omega$ $\Rightarrow$ $\boxed{T = 2\pi\sqrt{L/g}}$

4. Enunciar los teoremas de Pappus-Guldin (0.4) y aplicar a un caso concreto (0.6).

SOLUCION

Permiten calcular centros de masas de curvas y superficies planas.

a) El área de una superficie de revolución (A) es igual a la longitud de la curva generatriz (L) multiplicada por la distancia recorrida por el centro de masas de la curva cuando se engendra la superficie. Nota: la curva no puede cortar al eje de giro.

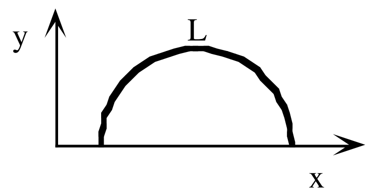


El dA generado por un dl al girar es: $dA = 2\pi y\ dL$; integrando para toda la longitud: $A = \int 2\pi y\ dL = 2\pi \int y\ dL$.

Por definición $y_G = \dfrac{\int y dL}{L}$ por lo que $\boxed{A = 2\pi\ y_G\ L}$

Ejemplo: alambre semicircular,

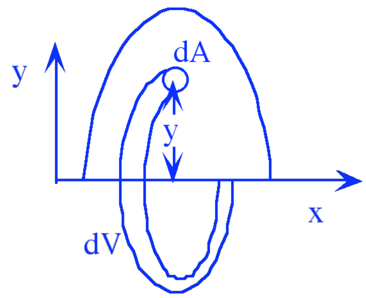
$L = 1/2\ (2\pi R) = \pi R$ y $A = 4\pi R^2$ $\Rightarrow$ $\boxed{y_G} = \dfrac{A}{2\pi L} = \dfrac{4\pi R^2}{2\pi\pi R} = \boxed{\dfrac{2R}{\pi}}$



b) El volumen de un cuerpo de revolución (V) es igual al área generatriz (A) multiplicada por la distancia recorrida por el centro de masas del área cuando se engendra el volumen.

Nota: el área no puede cortar al eje de giro.

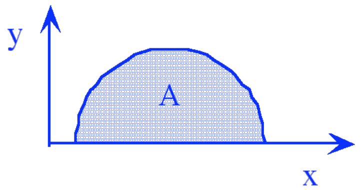
El dV generado por un da al girar es : $dV = 2\pi y\, dA$, integrando para todo el área: $V = \int 2\pi y\, dA = 2\pi \int y\, dA$.



Por definición $y_G = \dfrac{\int y dA}{A}$ por lo que $\boxed{V = 2\pi\, y_G\, A}$

Ejemplo: Placa semicircular,

$$A = 1/2\,(\pi R^2) \quad y \quad V = 4/3\,\pi R^3 \Rightarrow \boxed{y_G = \frac{V}{2\pi A} = \frac{\cancel{4/3}\,\pi R^3}{2\pi\,\cancel{1/2}\,\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}}$$



PROBLEMAS

---

1. Una pequeña esfera de 100 g de masa cuelga de un hilo de 2 m de longitud cuyo otro extremo está sujeto a un punto fijo. Lanzamos horizontalmente otra pequeña esfera que choca frontalmente con la primera, siendo el coeficiente de restitución e = 0.25. Calcular la velocidad mínima que ha de llevar la segunda esfera (0.8) y su masa (0.7) para que la primera esfera describa un movimiento circular completo en el plano vertical y la segunda caiga verticalmente después del choque. ¿Qué energía se pierde en el choque? (0.5)

SOLUCION

Cuando después del choque la primera esfera se encuentra en el punto superior de la trayectoria circular aplicando la segunda ley de Newton podemos encontrar información sobre su velocidad $v'_{1,\text{sup}}$:

$$\vec{T} + m_2\vec{g} = m_2\vec{a} \quad \Rightarrow \quad T + m_2 g = m_2 a = m_2 \frac{v'^2_{1,\text{sup}}}{L} \quad \Rightarrow \quad T = mg\left[\frac{v'^2_{1,\text{sup}}}{Lg} - 1\right]$$

Como la tensión debe ser positiva o como mínimo nula:

$$T = mg\left[\frac{v'^2_{1,\text{sup}}}{Lg} - 1\right] \geq 0 \quad \Rightarrow \quad v'_{1,\text{sup}} \geq \sqrt{gL}$$

aplicando la conservación de la energía entre la situación superior y la situación inferior con la velocidad mínima $v'_{1,\text{sup. mínima}}$:

$$m_2 g(2L) + \frac{1}{2}m_2 v'^2_{1,\text{sup. mínima}} = \frac{1}{2}m_2 v'^2_{1,\text{inf. mínima}}$$

$$\Rightarrow \quad m_2 g(2L) + \frac{1}{2}m_2\left(gL\right) = \frac{1}{2}m_2 v'^2_{1,\text{inf. mínima}} \quad \Rightarrow \quad v'_{1,\text{inf. mínima}} = \sqrt{5gL}$$

Teniendo en cuenta que el choque es frontal, los cambios de las velocidades en el choque se producen en dicha dirección horizontal (las componentes verticales de las velocidades se conservan). La segunda esfera no tenía inicialmente velocidad vertical y por lo tanto tampoco la tendrá después del choque. Si nos dicen que la segunda esfera va a caer verticalmente, nos están por lo tanto diciendo que va a salir del reposo, sin velocidad ni horizontal ni vertical.

Aplicando las ecuaciones de conservación del momento lineal y del coeficiente de restitución:

$$\left.\begin{aligned} m_2 v_2 = m_1 v'_{1,\text{inf.}} \quad &\Rightarrow \quad v_2 = \frac{m_1}{m_2} v'_{1,\text{inf.}} \\ 0.25 = \frac{v'_{1,\text{inf.}}}{v_2} \quad &\Rightarrow \quad v_2 = 4\,v'_{1,\text{inf.}} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} &v_{2,\text{mínima}} = 4\,v'_{1,\text{inf. mínima}} = 4\sqrt{5gL} = 39.6 \text{ m/s} \\ &\frac{m_1}{m_2} = 4 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 25 \text{ g} \end{aligned}\right.$$

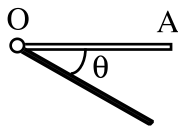
El cambio en el choque de la energía del sistema será:

$$E_{c,final} - E_{c,inicial} = \frac{1}{2}mv^2_{2,\text{mínima}} - \frac{1}{2}mv'^2_{1,\text{inf.mínima}} = -14.7 \text{ J}$$

El signo negativo indica que se pierde energía en el choque.

---

2) Una varilla homogénea OA de masa m y longitud L, puede girar en un plano vertical en torno a un eje que pasa por O (ver figura).

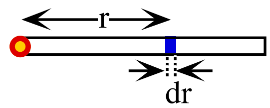


a) Calcular el momento de inercia de la varilla respecto al eje que pasa por O.
b) Calcular la aceleración angular de la varilla en el instante en que se abandona desde la posición horizontal.
c) Calcular la velocidad angular y la aceleración angular cuando la varilla forma un ángulo θ con la horizontal.
d) Aplicar las ecuaciones encontradas en los tres apartados anteriores para determinar I, α(0), ω(θ) y α(θ) en el caso de m= 2kg, L = 0.5 m y θ = 30º.

SOLUCION

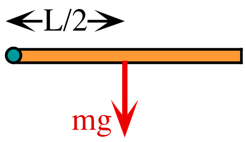
a) La definición de momento de inercia es $I = \int dm\, r^2$ con $dm = \rho\, dV = \rho\, S\, dr$ (S = sección transversal de la barra) ⇒

$$I = \int_0^L \rho\, S dr\, r^2 = \rho\, S\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^L = \frac{1}{3}\rho\, SL^3$$



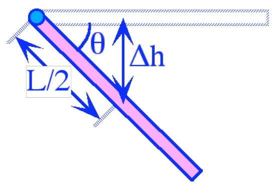
Donde ρ y S han salido fuera de la integral por ser una barra uniforme.
Como la masa de la barra es $m = \rho\, SL$, el momento de inercia se puede escribir como $\boxed{I = (1/3)\, mL^2}$

b) Para calcular la aceleración angular, utilizamos la ecuación $\sum M = I\alpha$. La única fuerza que produce momento sobre la varilla es el peso, situado en su centro de masas.



$$M = I\alpha \Rightarrow. \quad \alpha = \frac{M}{I} = \frac{mg\,(L/2)}{(1/3)\, mL^2} = \frac{3g}{2\,L} = \frac{14.71}{L}\ \text{rad/s}^2$$

c) La forma mas sencilla de determinar la velocidad angular es por energías. Respecto al eje, la varilla realiza un movimiento de rotación puro, por lo que la perdida de energía potencial gravitatoria se convierte en energía cinética de rotación:

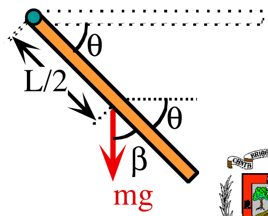


$$-\Delta Ep = \Delta Ec \Rightarrow mg\,(-\Delta h) = (1/2)\, I\,(\omega^2 - \omega_0^2)$$

Teniendo en cuenta que parte del reposo $\omega_0 = 0$. Además la perdida de Ep se contabiliza en el centro de masas por lo que $-\Delta h = (L/2)\, \text{sen}\theta$. Con estas consideraciones la ecuación de la energía se transforma en:

$$Mg(L/2)\, \text{sen}\theta = (1/2)\, I\, \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{m\, g\, L\, \text{sen}\theta}{\frac{1}{3} mL^2}} = \sqrt{\frac{3\, g\ \text{sen}\theta}{L}}\ \text{rad/s}$$

En cuanto a la aceleración angular, aplicamos de nuevo $M = I\alpha$ ⇒.



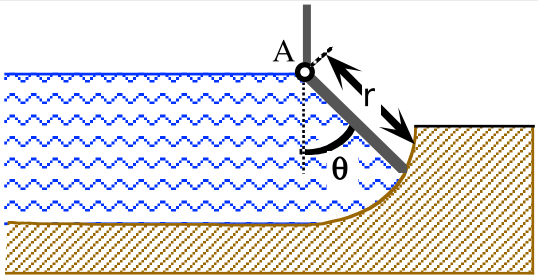
$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{mg\,(L/2)\, \text{sen}\beta}{(1/3)\, mL^2} = \frac{3g\cos\theta}{2\,L} = 14.71\,\frac{\cos\theta}{L}\ \text{rad/s}^2$$

d) Si m= 2kg, L = 0.5 m y θ = 30º ⇒

$$\boxed{I = (1/3)\ 2\ (0.5)^2 = 0.1667\ \text{kgm}^2}$$

$$\boxed{\alpha(0) = (14.71/0.5) = 29.42\ \text{rad/s}^2}$$

$$\boxed{\omega(30) = \sqrt{\frac{3 \bullet 9.81 \bullet \text{sen}30}{0.5}} = 5.42\ \text{rad/s}} \qquad \boxed{\alpha(30) = 14.71\frac{\cos 30}{0.5} = 25.48\ \text{rad/s}^2}$$



3) Una compuerta uniforme rectangular de masa M, altura r y anchura b está sujeta por goznes en A. Si el líquido de densidad ρ alcanza una altura r, determinar:

a) La fuerza que el líquido ejerce sobre la compuerta (en función de ρ, g, b, r y θ).

b) El punto de aplicación de la fuerza resultante (en función de r).

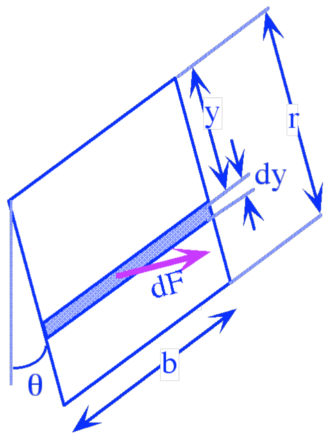
c) El ángulo que alcanza la compuerta respecto de la vertical, θ (en función de ρ, b, r y M).

Si el líquido es agua, r = 2 m, b = 0.5 m y M = 1000 kg, **calcular numéricamente**:

d) La presión debida al agua en el fondo del recipiente.

e) La fuerza que ejerce el agua sobre la compuerta y el ángulo θ utilizando las ecuaciones encontradas en los apartados a y c respectivamente.

SOLUCION



a) Consideramos una franja de la compuerta de grosor dy y longitud b situada a una distancia y del gozne y por lo tanto a una profundidad ycosθ, la fuerza que actúa sobre la misma será la presión ejercida por el agua (P = ρgycosθ) multiplicada por la superficie:

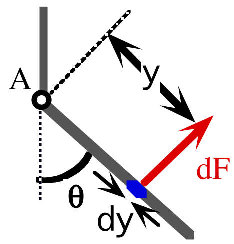
$$dF = Pds = Pbdy = \rho g y\cos\theta\, bdy$$

Para calcular la fuerza total sobre la presa debemos integrar dF entre la superficie del agua y el extremo inferior de la compuerta:

$$\boxed{F = \int_0^r dF = \int_0^r \rho g y\cos\theta\, bdy = \rho g b\cos\theta \int_0^r ydy = \rho g b\cos\theta \left[\frac{y}{2}\right]_0^r = \frac{1}{2}\rho g b\cos\theta\, r^2}$$

b) El punto de aplicación de la fuerza F sobre la presa será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos)

El momento <u>respecto al punto A</u> de un dF actuando sobre una franja de anchura dy a una distancia y será:



$$dM = dF\, y = \rho g y \cos\theta\, b dy\, y$$

donde hemos tomado el valor de dF calculado en el apartado anterior. Para calcular el momento total integramos entre el borde superior e inferior de la presa:

$$M = \int_0^r dM = \int_0^r \rho g y \cos\theta\, b dy\, y = \rho g b \cos\theta \int_0^r y^2 dy = \rho g b \cos\theta \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^r \Rightarrow$$

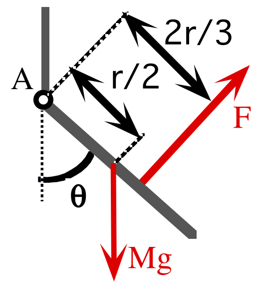
$$\boxed{M = (1/3)\, \rho g b \cos\theta\, r^3}$$

Si el punto de aplicación esta a una distancia d respecto al gozne A de la presa, tiene que verificarse que

$$Fd = M \Rightarrow$$

$$d = \frac{M}{F} = \frac{(1/3)\, \rho\, g\, b\cos\theta\, r^3}{(1/2)\, \rho\, g\, b\cos\theta\, r^2} \Rightarrow \boxed{d = (2/3)r}$$

d) La compuerta es uniforme, por lo que el punto de aplicación del peso esta situado en el centro de la misma, a una distancia r/2 del gozne.
En el equilibrio, la compuerta no rota, por lo que $\sum M_A = 0 \Rightarrow$



$$Mg\,(r/2)\, \text{sen}\theta - F\,(2/3)r\, \text{sen}\, 90 = 0 \Rightarrow$$

$$Mg\,(r/2)\, \text{sen}\theta = (1/2)\, \rho g b \cos\theta\, r^2\, (2/3)\, r \Rightarrow \quad M\,(\text{sen}\theta/\cos\theta) = \rho b r^2\, (2/3) \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{tg}\theta = \frac{2\rho b r^2}{3M}}$$

d) La presión debida al agua a una profundidad H es ρgH, en nuestro caso H = r:

$$\boxed{P = \rho g r = 10^3\ 9.81\ \ 2 = 19.62\ 10^3 \text{ Pascales} = 0.1937 \text{ atm}}$$

e) $\boxed{F = (1/2)\, \rho g b \cos\theta\, r^2 = (1/2)\, 10^3\ 9.81\ 0.5 \cos\theta\ 2^2 = 9810 \cos\theta \ \text{N}}$

$$\text{tg}\theta = \frac{2\rho b r^2}{3M} = \frac{2\ 1000\ 0.5\ 2^2}{3\ 1000} = \frac{4}{3} \Rightarrow \quad \theta = \text{arctg}\,(4/3) \Rightarrow \boxed{\theta = 53.13°}$$

Si sustituimos este valor del ángulo en la ecuación de la fuerza: $\boxed{F = 9810 \cos(53.13) = 5886 \text{ N}}$