

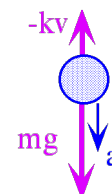
CUESTIONES

- 1) Analizar el tipo de movimiento que posee una partícula sometida a su propio peso y a una fuerza de rozamiento directamente proporcional a su velocidad. Sin necesidad de resolver la ecuación del movimiento, discútase los aspectos más relevantes de dicho movimiento y dibújense aproximadamente la aceleración y la velocidad de la partícula en función del tiempo. ¿Cómo se calculara el espacio recorrido por la partícula?

SOLUCION:

Aplicando la segunda ley de Newton, la suma de las fuerzas que actúan es igual a la masa por la aceleración:

$$mg - kv = ma \quad (3.1)$$

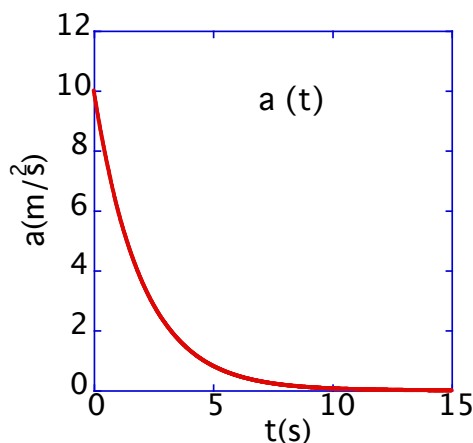
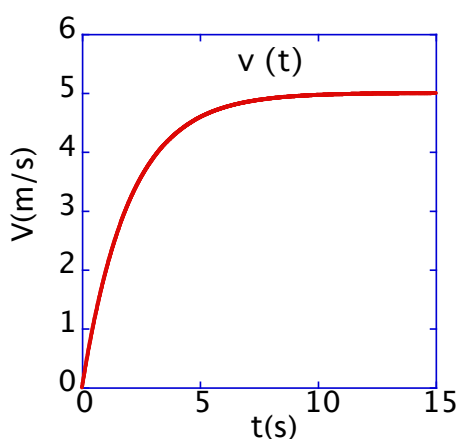


Si la partícula parte del reposo, la velocidad inicial es 0 y por lo tanto la aceleración inicial es: $a = g$.

A medida que pasa el tiempo, la partícula va adquiriendo velocidad por lo que la aceleración va disminuyendo.

Este proceso continua hasta que la velocidad es tan grande que la fuerza de rozamiento compensa al peso ($kv = mg$), y la aceleración es $a = 0$; alcanzándose entonces la velocidad límite: $v_L = mg/k$.

Las graficas aproximadas son:



En cuanto a determinar el **espacio recorrido** por la partícula, si lo queremos calcular **en función de la velocidad**, se parte de la ecuación (3.1): $mg - kv = ma$

y sustituimos la aceleración tomando $a = dv/dx \cdot dx/dt = dv/dx \cdot v$

La ecuación que nos queda es $mg - kv = m (dv/dx) v$, Finalmente pasamos la v y el dv a un lado de la ecuación, el dx a otro, e integramos.

Si lo queremos calcular **en función del tiempo**, hay que hacerlo en dos pasos. Primero escribimos la aceleración como $a = dv/dt$ y sustituimos en la ecuación (3.1), nos queda $mg - kv = m \cdot dv/dt$. Despejando e integrando determinamos $v(t)$. En un segundo paso, como $v(t) = dx/dt$, despejamos el dx e integrando calculamos $x(t)$.



2) Recordando que en la Tierra: $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - 2(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}) - \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r})$,

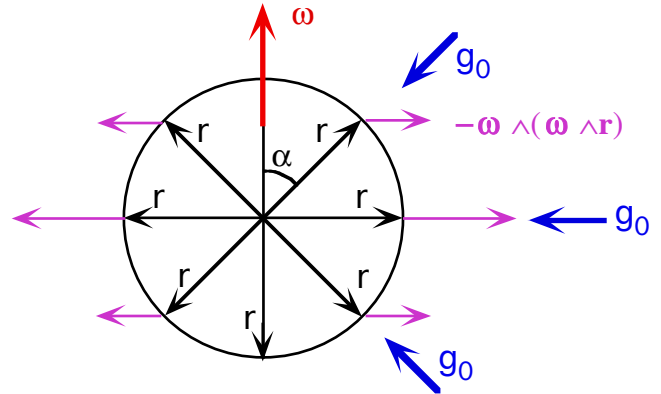
- Representa y explica como es la aceleración centrífuga; en que puntos de la superficie es máxima y mínima.
- Cuanto valen las componentes radial y transversal? En que punto de la superficie serán máximas y mínimas estas componentes. ¿Qué diferencias hay entre el hemisferio norte y el hemisferio sur?

SOLUCION

a) Al realizar el producto vectorial $-\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r})$, vemos que la aceleración centrífuga se aleja perpendicular al eje de giro de la Tierra, y que su modulo vale:

$$|\mathbf{a}_{\text{cen}}| = |\boldsymbol{\omega}| |\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}| \sin 90 = |\boldsymbol{\omega}| |\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{r}| \sin \alpha = |\boldsymbol{\omega}|^2 |\mathbf{r}| \sin \alpha$$

siendo α el ángulo que forma el vector de posición con el eje de giro (el complementario de la latitud). por lo tanto su módulo es máximo en el ecuador y cero en los polos



b) Proyectamos $-\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r})$, sobre la dirección radial y transversal.

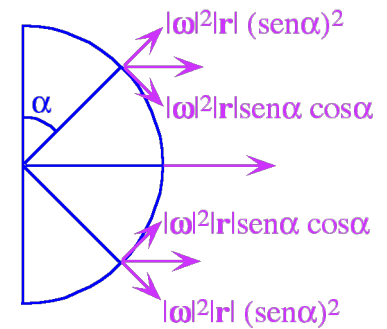
La componente radial vale: $|\boldsymbol{\omega}|^2 |\mathbf{r}| (\sin \alpha)^2$

y la componente transversal: $|\boldsymbol{\omega}|^2 |\mathbf{r}| \sin \alpha \cos \alpha$

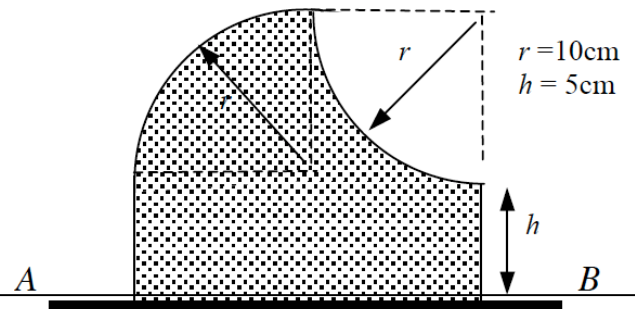
Por lo que la componente radial es máxima en el ecuador y nula en los polos.

La componente transversal es nula tanto en el ecuador como en los polos, siendo máxima para $\alpha = 45^\circ$

La única diferencia entre el Hemisferio Norte y Sur, es que en el Norte la componente transversal va dirigida hacia el sur, mientras que en el Hemisferio Sur va dirigida hacia el norte.

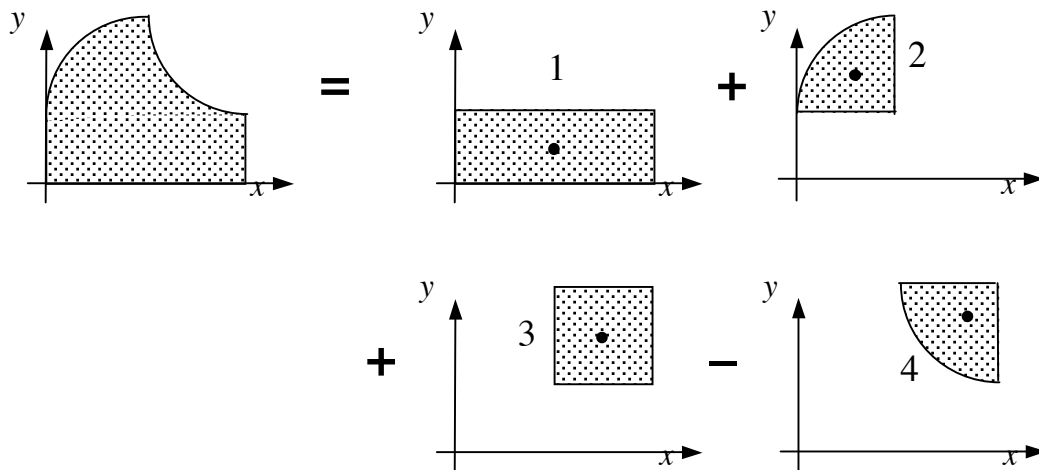


- 3) a) Determinar el centro de masas de la placa homogénea de la figura (0.6).
 b) Obtener el volumen del sólido de revolución formado al girar respecto al eje AB el área mostrada en la figura (0.4).



SOLUCION

Para calcular la posición del C.M. de la placa vamos a dividirla en diferentes partes cuyos C.M. conozcamos:



Las posiciones del C.M. de cada una de las piezas son:

$$\vec{r}_1 = \left(r, \frac{h}{2}, 0 \right) \quad \vec{r}_2 = \left(r - \frac{4r}{3\pi}, h + \frac{4r}{3\pi}, 0 \right)$$

$$\vec{r}_3 = \left(\frac{3r}{2}, h + \frac{r}{2}, 0 \right) \quad \vec{r}_4 = \left(2r - \frac{4r}{3\pi}, h + r - \frac{4r}{3\pi}, 0 \right)$$

La coordenada y del C.M. de toda la pieza será:

$$y_{C.M.} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 - y_4 A_4}{A_1 + A_2 + A_3 - A_4} =$$

$$= \frac{\left(\frac{h}{2} \right) (2rh) + \left(h + \frac{4r}{3\pi} \right) \left(\frac{\pi}{4} r^2 \right) + \left(h + \frac{r}{2} \right) (r^2) - \left(h + r - \frac{4r}{3\pi} \right) \left(\frac{\pi}{4} r^2 \right)}{2rh + \frac{\pi}{4} r^2 + r^2 - \frac{\pi}{4} r^2} = 5.66 \text{ cm}$$

Para obtener el volumen del sólido de revolución generado al girar la placa aplicamos el segundo teorema de Pappus-Guldin:

$$V_{\text{generado}} = A_{\text{placa}} (\text{recorrido C.M. placa})$$

$$\Rightarrow V_{\text{generado}} = (2rh + r^2) (2\pi y_{C.M.}) = 7.11 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$$



4) Enunciar y demostrar el teorema de Steiner o teorema de los ejes paralelos (busca un ejemplo sencillo en el que se pueda aplicar dicho teorema y aplícalo).

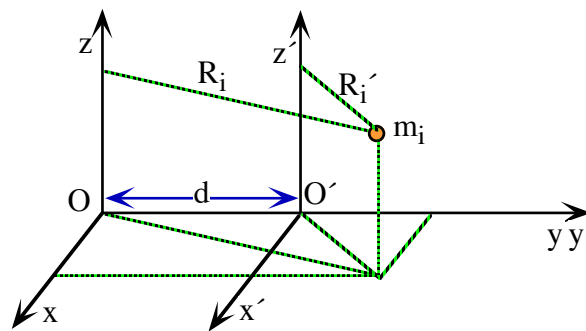
SOLUCION

El teorema de Steiner dice que el momento de inercia respecto a un eje cualquiera es igual al momento de inercia respecto a un eje paralelo que pase por el centro de masas mas el producto de la masa por la distancia entre ejes al cuadrado

$$I = I_{CM} + md^2$$

Demostración:

Consideremos un sistemas de referencia $O'(x', y', z')$ con origen en el centro de masas, y otro $O(x, y, z)$ separado una distancia d , con los tres ejes paralelos al primero y de forma que los ejes y y y' se superpongan ver figura.



La distancia al cuadrado de una masa m_i cualquiera al eje z' es : $R_i'^2 = x_i'^2 + y_i'^2$

mientras que la distancia al eje z es: $R_i^2 = x_i'^2 + (y_i' + d)^2 = x_i'^2 + y_i'^2 + d^2 + 2 y_i' d = R_i'^2 + d^2 + 2 y_i' d$

El momento de inercia respecto al eje z será: $I_z = \sum m_i R_i^2 = \sum m_i [R_i'^2 + d^2 + 2 y_i' d] \Rightarrow$

$$I_z = \sum m_i R_i'^2 + \sum m_i d^2 + \sum m_i 2 y_i' d = I_{CM} + d^2(\sum m_i) + 2d \sum m_i y_i'$$

Llamando $m = \sum m_i$, y considerando que $\sum m_i y_i' = m y_{CM}'$, donde y_{CM}' es la coordenada y del centro de masas en el sistema de referencia centro de masas, por lo que $y_{CM}' = 0 \Rightarrow \sum m_i y_i' = 0$, nos queda

$$I = I_{CM} + md^2$$

Un ejemplo de aplicación puede ser el momento de inercia de un cilindro homogéneo respecto a un eje perpendicular que pase por su centro: $I = (1/2) mr^2$. El momento de inercia respecto a un eje paralelo que pase por el borde del disco es $I = (1/2) mr^2 + mr^2 = (3/2) mr^2$

Otro ejemplo en el de una varilla homogénea de longitud L . El momento de inercia respecto de un eje perpendicular que pase por su centro es $I = (1/12) mL^2$. El momento de inercia respecto de un eje paralelo al primero, que pase por un extremo de la misma será: es $I = (1/12) mL^2 + m(L/2)^2 = (1/3) mL^2$



PROBLEMAS

1) Un palo saltador de un niño almacena energía en un resorte de constante $2.5 \cdot 10^4 \text{ N/m}$. En la posición A ($x_A = -0.100 \text{ m}$) la compresión del resorte es máxima y el niño está momentáneamente en reposo. En la posición B ($x_B = 0$) el resorte está relajado y el niño se mueve hacia arriba. En la posición C el niño está de nuevo momentáneamente en reposo en lo alto del salto. La masa combinada del niño y el palo saltador es 25.0 kg .

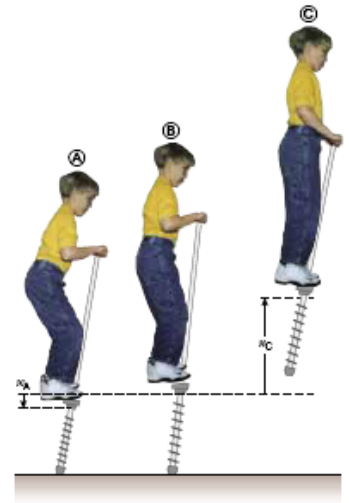
a) Calcule la energía total del sistema niño-palo-Tierra si las energías potenciales gravitacional y elástica son cero para $x = 0$. (0.?).

b) Determine el valor de x_C para la posición C (0.?).

c) Calcule la rapidez del niño en $x = 0$ (0.?).

d) Determine el valor de x para el cual la energía cinética del sistema es máxima (0.?).

e) Calcule la rapidez máxima del niño hacia arriba (0.?).



SOLUCION

a) La energía de nuestro sistema se va a conservar, y en la situación inicial tenemos:

$$E_{sist.} = mgx_A + \frac{1}{2}kx_A^2 = 100.5 \text{ J}$$

b) Esta misma energía la tendremos en la situación C:

$$E_{sist.} = mgx_C \Rightarrow x_C = 0.410 \text{ m}$$

c) La velocidad del niño en B será:

$$E_{sist.} = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B = 2.84 \text{ m/s}$$

d) La energía cinética será máxima cuando la energía potencial total sea mínima;

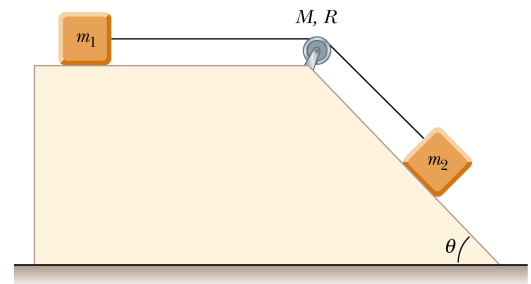
$$K_{\max} \Rightarrow U_{\min} \Rightarrow \vec{F}_{total} = 0 \Rightarrow -kx_D - mg = 0 \Rightarrow x_D = -\frac{mg}{k} = -9.8 \text{ cm}$$

e) La velocidad en dicha posición será:

$$E_{sist.} = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgx_D + \frac{1}{2}kx_D^2 \Rightarrow v_D = 2.85 \text{ m/s}$$

2) Un bloque de masa $m_1 = 2 \text{ kg}$ y un bloque de masa $m_2 = 6 \text{ kg}$ están conectados por una cuerda sin masa sobre una polea en forma de disco sólido que tiene de radio $R = 0.250 \text{ m}$ y masa $M = 10 \text{ kg}$. Se permite que estos bloques se muevan sobre un bloque fijo en forma de cuña de ángulo $\theta = 30^\circ$. El coeficiente de fricción cinética es 0.360 para ambos bloques.

- Calcular el momento de inercia de la polea **(0.2)** (no hace falta demostrar la ecuación del momento de inercia)
- Calcular por energías la velocidad del sistema cuando los bloques se han desplazado 1 m **(0.5)**.
- Trace diagramas de cuerpo libre de ambos bloques y de la polea **(0.3)**.
- Determinar la aceleración de los dos bloques y la aceleración angular de la polea **(0.5)**.
- Determinar las tensiones en la cuerda a ambos lados de la polea **(0.5)**.



SOLUCION

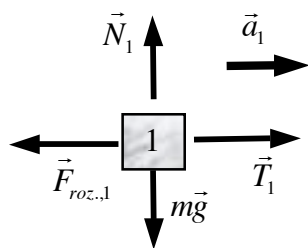
- El momento de inercia de la polea será: $I = \frac{1}{2}MR^2 = 0.3125 \text{ kgm}^2$
- Tomando como sistema todo el conjunto junto con la Tierra y aplicando la conservación de la energía:

$$\Delta E_{\text{sist.}} = 0 \Rightarrow \Delta K + \Delta U_{\text{grav.}} + \Delta E_{\text{térmica}} = 0$$

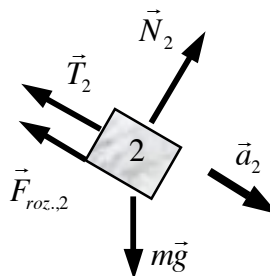
$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2 - m_2gd \sin\theta + \mu m_1gd + \mu m_2gd \cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow v = 0.786 \text{ m/s}$$

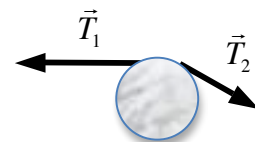
- Sin tener en cuenta el peso de la polea y la reacción del enganche sobre ella ya que no intervienen en las ecuaciones:



$$m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_{\text{roz.,1}} = m\vec{a}_1$$



$$m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{\text{roz.,2}} = m\vec{a}_2$$



$$T_2R - T_1R = I\alpha$$

- Para calcular la aceleración común a los dos cuerpos podemos utilizar el resultado del apartado b):

$$v^2 = 2ad \Rightarrow a = 0.309 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R} = 1.23 \text{ rad/s}^2$$

- Para calcular las tensiones aplicamos la segunda ley de Newton:

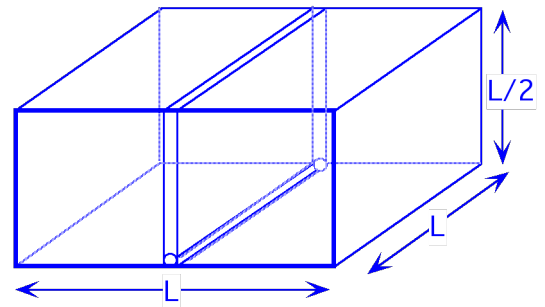
$$T_1 - F_{\text{roz.,1}} = m_1a \Rightarrow T_1 = F_{\text{roz.,1}} + \mu m_1g + m_1a = (\mu g + a)m_1 = 7.67 \text{ N}$$

$$m_2g \sin\theta - F_{\text{roz.,2}} - T_2 = m_2a \Rightarrow T_2 = m_2g \sin\theta - \mu m_2g \cos\theta - m_2a = 9.22 \text{ N}$$

Comprobando que se cumple la tercera ecuación: $T_2R - T_1R = I\alpha$



3) Un recipiente cuadrado de lado $L = 1 \text{ m}$ y altura $L/2 = 0.5 \text{ m}$ (medidas interiores), esta dividido en dos partes iguales por una placa de acero de 4mm de espesor. Dicha placa está unida al recipiente por un eje en su parte inferior (ver figura). Vertemos 249 litros de agua en la parte izquierda y 124.5 litros de mercurio ($\rho_{\text{Hg}} = 13.6 \text{ g/cm}^3$) en la derecha.



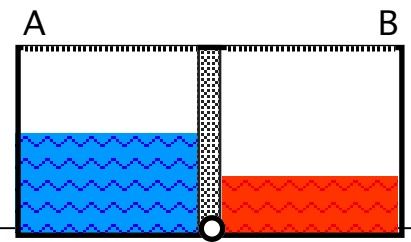
- ¿Cuál es la presión en el fondo del recipiente en los dos lados? (0.3)
- ¿Cuál es la fuerza que ejerce el agua sobre la placa y el punto de aplicación? (0.3)
- ¿Cuál es la fuerza que ejerce el mercurio sobre la placa y el punto de aplicación? (0.3)
- Determinar la fuerza total ejercida sobre la placa y el punto de aplicación (0.3).

Para que la placa no gire, tenemos que unirla mediante un cable a uno de los lados del recipiente.

- ¿A que lado habrá que unirla, y cuanto valdrá la tensión? (0.3)

Si la densidad del acero es $\rho_a = 7 \text{ g/cm}^3$,

- ¿Cuánto pesará la placa? (0.2)
- ¿Cuál será la reacción en el eje? (0.3)



SOLUCION

- Primero calculamos las alturas alcanzadas por el agua y el mercurio:

$$h_a = V_a / S = \frac{249 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{(1 \times 0.498) \text{ m}^2} = 0.5 \text{ m}$$

$$h_{\text{Hg}} = V_{\text{Hg}} / S = \frac{124.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{(1 \times 0.498) \text{ m}^2} = 0.25 \text{ m}$$

La presión manométrica será:

$$P_a = \rho_a g h_a = 1000 \cdot 9.81 \cdot 0.5 = 4905 \text{ Pascales} = 0.0484 \text{ atm}$$

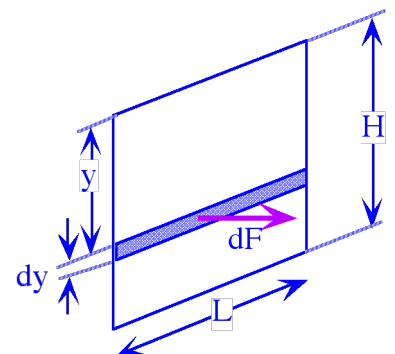
$$P_{\text{Hg}} = \rho_{\text{Hg}} g h_{\text{Hg}} = 13600 \cdot 9.81 \cdot 0.25 = 33354 \text{ Pascales} = 0.329 \text{ atm}$$

- La fuerza ejercida por el agua sobre la placa será únicamente debida a la presión ejercida por el agua, que a una profundidad y es $P = \rho g y$. Si consideramos una franja de la presa de altura dy y longitud L , toda ella situada a una profundidad y , la fuerza que actúa sobre la misma será:

$$dF = P ds = PL dy = \rho_a g y L dy$$

Para calcular la fuerza total sobre la presa debemos integrar dF entre la superficie del agua y el extremo inferior de la presa:

$$F = \int_0^H \rho g y L dy = \rho g L \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^H = (1/2) \rho g L H^2 \Rightarrow F_a = (1/2) 10^3 \cdot 9.81 \cdot 1 \cdot 0.5^2 = 1226.25 \text{ N}$$



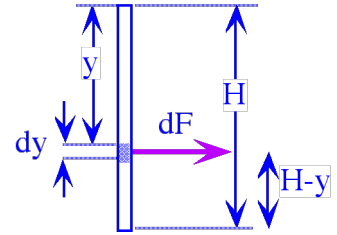
El punto de aplicación de la fuerza F sobre la presa será aquél en el que el momento de la fuerza sea igual a la suma de los momentos que actúan sobre cada franja (el momento de la resultante = resultante de los momentos)



El momento respecto a un punto del fondo de un dF actuando sobre una franja a una profundidad y será:

$$dM = dF(H-y) = \rho g y L dy (H-y)$$

donde hemos tomado el valor de dF calculado en el apartado anterior. Para calcular el momento total, integramos entre el borde superior e inferior de la presa:



$$M = \int_0^H \rho g y L (H-y) dy = \rho g L \int_0^H (Hy - y^2) dy = \rho g L \left(H \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^H - \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^H \right) = \rho g L \left(\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3} \right) \Rightarrow$$

$$M = (1/6) \rho g L H^3 \quad (3.1)$$

Si el punto de aplicación está a una altura d respecto a la parte inferior de la presa, tiene que verificarse que

$$Fd = M \Rightarrow$$

$$d = \frac{M}{F} = \frac{(1/6) \rho g L H^3}{(1/2) \rho g L H^2} \Rightarrow d = (1/3) H \Rightarrow d_a = 0.1667 \text{ m}$$

c) En el caso del mercurio las ecuaciones son las mismas cambiando únicamente la densidad y el valor de la altura H ($H = 0.25 \text{ m}$).

$$F = (1/2) \rho g L H^2 \Rightarrow F_{Hg} = (1/2) 13.6 \cdot 10^3 \cdot 9.81 \cdot 0.25^2 = 4169.25 \text{ N}$$

$$d = (1/3) H \Rightarrow d_{Hg} = 0.08333 \text{ m}$$

d) la fuerza total ejercida por los fluidos sobre la placa es

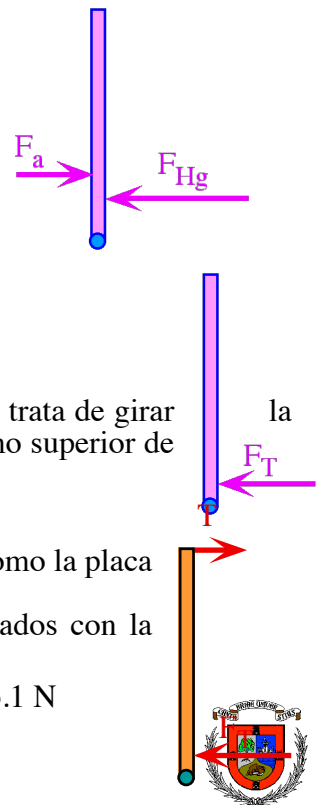
$$F_T = F_a - F_{Hg} = 1226.25 - 4169.25 = -2943 \text{ N}$$

es una fuerza de 2943 N dirigida hacia el sentido negativo del eje x .

El punto de aplicación estará a una distancia d tal que

$$d F_T = d_a F_a - d_{Hg} F_{Hg} \Rightarrow d = (d_a F_a - d_{Hg} F_{Hg}) / F_T \Rightarrow$$

$$d = (204.4 - 347.4) / (-2943) = 0.0486 \text{ m}$$



e) si observamos en la figura la fuerza resultante y el punto de aplicación, vemos que trata de girar la placa en sentido antihorario, por lo que para que no gire, tendremos que unir el extremo superior de la placa al lado B.

El valor de la tensión la calculamos aplicando las leyes de la estática, y en particular como la placa no puede rotar, $\sum M = 0$.

Calculamos los momentos respecto al eje y y considerando que el cable forma 90 grados con la placa,

$$(L/2) T + d F_T = 0 \Rightarrow T = - (d F_T) / (L/2) \Rightarrow T = - (0.0486 \cdot -2943) / 0.5 \Rightarrow T = 286.1 \text{ N}$$

f) La masa de la placa será el producto del volumen por la densidad:

$$m = V \rho_{\text{acero}} = 1 \times 0.5 \times 0.004 \times 7 \times 10^3 = 14 \text{ kg}$$

g) la reacción en el eje se calcula aplicando las leyes de la estática, y en particular como la placa no se traslada

$$\begin{aligned} \sum f_x = 0 &\Rightarrow F_T + T + R_x = 0 \Rightarrow R_x = - (T + F_T) = - (286.1 - 2943) = 2656.9 \text{ N} \\ \sum f_y = 0 &\Rightarrow \text{Peso} + R_y = 0 \Rightarrow R_y = - \text{Peso} = - (-14 \ 9.81) = 137.34 \text{ N} \end{aligned}$$

